ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ამოცანები სტატისტიკურ ფიზიკაში

$$P(\mathbf{x}) = \frac{e^{-\beta E(\mathbf{x})}}{\sum_{\mathbf{x}\in\Sigma} e^{-\beta E(\mathbf{x})}} = \frac{e^{-\beta E(\mathbf{x})}}{Z}$$

არჩილ უგულავა
ზაზა ტოკლიკიშვილი

2017

9 789941 135934

ამოცანები სტატისტიკურ ფიზიკაში

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

არჩილ უგულავა
ზაზა ტოკლიკიშვილი

ამოცანები სტატისტიკურ ფიზიკაში

2017

სტატისტიკური ფიზიკა და თერმოდინამიკა წარმოადგენს ფიზიკის ერთ-ერთ ძირითად მიმართულებას, რომლის ცოდნა აუცილებელია მეცნიერებისა და ტექნიკის მრავალი დარგის სპეციალისტისთვის.

წიგნში შესულია ამოცანები სტატისტიკურ ფიზიკასა და თერმოდინამიკაში. ის განკუთვნილია ფიზიკის მიმართულების ბაკალავრიატის სტუდენტებისათვის. ამოცანათა კრებულით სარგებლობა შეუძლიათ ფიზიკის მიმართულების მაგისტრატურისა და სხვა მიმართულების სტუდენტებსაც, რომლებიც სწავლობენ სტატისტიკურ ფიზიკას.

ამოცანათა კრებული დაყოფილია პარაგრაფებად. თითოეული პარაგრაფის დასაწყისში მოყვანილია მოკლე თეორიული მასალა, რომლის ცოდნაც აუცილებელია ამოცანის ამოხსნისათვის. კრებულში მოყვანილია ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა და პასუხები.

გამოცემაზე მუშაობდნენ:
თამარ ებრალიძე
მარიკა ერქომაიშვილი
მაია ეჯიბია

ქვეყნდება ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით

ISBN 978-9941-13-593-4 (pdf)

შინაარსი

	7
1. ალბათობა, ალბათობის განაწილება	9
2. ფაზური სივრცე, ლიუვილის თეორემა	17
3. გიბსის განაწილება	21
4. მაქსველის განაწილება	29
5. ბოლცმანის განაწილება	41
6. თერმოდინამიკა, თერმოდინამიკური ფუნქციები	53
7. თერმოდინამიკური ფუნქციები და აირთა მდგომარეობის განტოლება	69
8. გიბსის კვანტური განაწილება	83
9. ფერმი-დირაკისა და ბოზე-აინშტაინის განაწილება	89
10. ფლუქტუაციები	99
11. ამოხსნები	107
12. მათემატიკური დამატება	267
1. ეილერის ფუნქცია	268
2. ზოგიერთი ინტეგრალის გამოთვლა	269
3. ალბათობის ინტეგრალი	271
4. მაკდონალდსის ფუნქცია	272
13. ძირითადი ფიზიკური მუდმივები	273
14. პასუხები	275
15. გამოყენებული ლიტერატურა	319

1. ალბათობა, ალბათობის განაწილება

თუ რაიმე მოვლენა A n ერთნაირი ექსპერიმენტის დროს ხდება $k_n(A)$ სიხშირით, მაშინ სიდიდე $h(A)=\frac{k_n(A)}{n}$ წარმოადგენს A მოვლენის ფარდობით სიხშირეს ამ ექსპერიმენტების სერიის დროს, ზოგად შემთხვევაში, $h(A)$ სიდიდე იცვლება ერთი ექსპერიმენტების სერიიდან სხვაზე გადასვლის დროს, თუ ეს სიდიდე, როცა $n\to\infty$ მიისწრაფვის რაღაც ზღვრული მნიშვნელობისაკენ, არის $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_n(A)}{n}$, მაშინ ამ უკანასკნელს ეწოდება A მოვლენის ალბათობა.

ალბათობის ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $0\le P(A)\le 1$. შეუძლებელი მოვლენის ალბათობა ნულის ტოლია, იმ მოვლენის ალბათობა, რომელიც ყოველთვის მოხდება, ტოლია ერთის.

ორ A და B მოვლენას ეწოდება არათავსებადი, თუ ერთდროულად არ შეიძლება მოხდეს. ორი მოვლენის ჯამი, ანუ გაერთიანება $C=A\cup B$ ეწოდება A და B მოვლენიდან ერთ-ერთის დადგომას. $\cup$ ნიშანი ნიშნავს „ან ერთს, ან მეორეს“. ორი არათავსებადი A და B მოვლენიდან ერთ-ერთის დადგომა განისაზღვრება ალბათობათა შეკრების კანონით:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B);$$

ორი მოვლენის ნამრავლი ანდა თანაკვეთა $C=A\cap B$ ეწოდება ამ ორი A და B მოვლენის ერთდროულად დადგომას.

ორ მოვლენას ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ერთ-ერთი მათგანის დადგომა გავლენას არ ახდენს მეორე მოვლენის დადგომის ალბათობაზე:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

თუ ხორციელდება n დამოუკიდებელი ცდა და ყოველ ამ ცდაში რაღაც A მოვლენის დადგომის ალბათობა ტოლია p-სი, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ A მოვლენა მოხდა k-ჯერ, განისაზღვრება ბინომიალური განაწილების კანონით, ანუ ბერნულის განაწილებით:

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k},$$

როცა $n>>k$, მაშინ მიიღება პუასონის განაწილება:

$$P(k)=\frac{\bar{k}^k}{k!}e^{-\bar{k}};$$

ხოლო, როცა $n>>1$, $k>>1$ და $k-\bar{k}<<\bar{k}$, მიიღება გაუსის განაწილება:

$$P(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{k}}}\exp\left(-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\bar{k}}\right).$$

ამოცანა # 1.1

ნაწილაკი მოძრაობს უსასრულოდ ღრმა ერთგანზომილებიან a სიგანის პოტენციურ "ორმოში". განვსაზღვროთ $[x, x+dx]$ ინტერვალში ნაწილაკის მოხვედრის ალბათობა, თუ ნაწილაკის მოძრაობა კლასიკური მექანიკის კანონების მიხედვით აღიწერება.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.2

განვსაზღვროთ ერთგანზომილებიან პარაბოლურ პოტენციურ ორმოში მოძრაობისას ნაწილაკის $[x, x+dx]$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.3

ვთქვათ, სისტემა ხასიათდება $dw \sim xydxdy$ ალბათობის განაწილებით $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$ შუალედში. მოვახდინოთ ამ განაწილების ნორმირება.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.4

წინა ამოცანის მიხედვით იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ x სიდიდეს აქვს განსაზღვრული მნიშვნელობა y სიდიდის ნებისმიერი მნიშვნელობის დროს.

პასუხი

ამოცანა # 1.5

იპოვეთ $\overline{x}$, $\overline{x^2}$, $\overline{\Delta x^2}$ თუ x სიდიდის ალბათობის განაწილება მოიცემა ფორმულით: $dw = const \cdot e^{-\alpha x} dx$.

პასუხი

ამოცანა # 1.6

ალბათობა იმისა, რომ რაღაც სისტემის მახასიათებელი სიდიდეები x და y მოთავსებულნი არიან ინტერვალში $[x,\ x+dx]$, $[y,\ y+dy]$ მოიცემა გამოსახულებით $dW(x,y) = Ce^{-\alpha\left(x^2+y^2\right)}dxdy$, $\alpha > 0$ დავუშვათ, x და y ცვლადების ცვლილების საზღვრებია $[-\infty, +\infty]$ და $[-\infty, +\infty]$. იპოვეთ მანორმირებელი მამრავლი C.

პასუხი

ამოცანა # 1.7

წინა ამოცანის მიხედვით იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ x სიდიდის მნიშვნელობა მოთავსებულია ინტერვალში: $[x, x+dx]$.

პასუხი

ამოცანა # 1.8

ვთქვათ, x-სიდიდის მიხედვით განაწილების ფუნქცია $[0, \infty]$ არეში არის $dw = C\exp(-\alpha x)dx$. ვიპოვოთ ალბათობის განაწილება y სიდიდისათვის, თუ იგი დაკავშირებულია x-თან თანაფარდობით $x = y^2$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.9

ვთქვათ, x-ცვლადი თანაბრად არის განაწილებული a-დან b-მდე. ვიპოვოთ x-ის საშუალო მნიშვნელობა $\overline{x}$, x^2-ის საშუალო მნიშვნელობა $\overline{x^2}$ და საშუალო კვადრატული გადახრა $\overline{(\Delta x)^2}$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.10

ვთქვათ, სისტემა თანაბარი ალბათობით შეიძლება იმყოფებოდეს N სხვადასხვა მდგომარეობაში. იპოვეთ ერთ რომელიმე მდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობა.

პასუხი

ამოცანა # 1.11

იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ კამათლის ორჯერ ზედიზედ გაგორებისას ორივეჯერ მოვა 5 ქულა.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.12

იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ ორი კამათლის ერთდროულად გაგორებისას მოვა ათი ქულა.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.13

იპოვეთ ქულათა საშუალო რიცხვი, რომელიც მოვა კამათლის ერთხელ გაგორებისას.

ამოცანა # 1.14

იპოვეთ A მანორმირებელი მამრავლი, $\overline{x}$, $\overline{x^2}$, $\overline{(\Delta x)^2}$ გაუსის განაწილებისათვის $dw(x) = Ae^{-\alpha x^2}dx$.

პასუხი

ამოცანა # 1.15

გაუსის განაწილება ორი ცვლადისთვის იწერება შემდეგნაირად: $dW(x,y) = Ae^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$. იპოვეთ A მანორმირებელი მამრავლი, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$, $\overline{xy}$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.16

იდეალური გაზი შედგება N მოლეკულისაგან და მოთავსებულია V მოცულობის ჭურჭელში. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ მცირე გამოყოფილ მოცულობაში v $(v << V)$ მოთავსებულია n მოლეკულა. განიხილეთ ზღვრული შემთხვევები:

ა) $N >> n$,

ბ) $\overline{n} \sim n >> 1$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.17

ვაჩვენოთ, რომ პუასონის განაწილება $w(n) = \dfrac{a^n e^{-a}}{n!}$ აკმაყოფილებს ნორმირების პირობას. იპოვეთ $\overline{n}$, $\overline{n^2}$, $\overline{(\Delta n)^2}$.

ამოცანა # 1.18

თერმოელექტრული ემისიის დროს ხდება ელექტრონების ამოფრქვევა მეტალის ანდა ნახევარგამტარის ზედაპირიდან, ჩათვალეთ რომ: ა) ელექტრონების ამოსვლა მეტალიდან სტატისტიკურად დამოუკიდებელი მოვლენაა; ბ) ერთი ელექტრონის ამოსვლის ალბათობა უსასრულოდ მცირე დროის შუალედში dt ტოლია λdt (λ მუდმივი სიდიდეა). განსაზღვრეთ n ელექტრონის ამოსვლის ალბათობა t დროის განმავლობაში.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.19

გამოიყენეთ წინა ამოცანის შედეგები და გამოთვალეთ $\overline{\Delta n^2}$, იმის გათვალისწინებით, რომ 1 წმ-ში საშუალოდ ამოიფრქვევა n_0 ელექტრონი.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.20

ურნაში დევს 10 თეთრი და 8 ლურჯი ბურთი. განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ სამჯერ ზედიზედ ამოვა ლურჯი ბურთი, თუკი:

ა) ამოღებისას ბურთები უკან ბრუნდება;

ამოღებისას ბურთები უკან აღარ ბრუნდება.

პასუხი

ამოცანა # 1.21

გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ $n = 5$ ახალდაბადებულიდან 0, 1, 2, 3, 4, 5 აღმოჩნდება ბიჭი. მრავალწლიანი დაკვირვების საფუძველზე დადგინდა, რომ ახალდაბადებული ბიჭების რაოდენობის შეფარდება გოგონების რაოდენობასთან არის 106:100.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 1.22

დავუშვათ, x და y ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეა. მაშინ დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

ა) $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ ბ) $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$.

პასუხი

ამოცანა # 1.23

დავუშვათ, x და y ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეა. მაშინ დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$\overline{(x-\overline{x})(y-\overline{y})} = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$.

პასუხი

ამოცანა # 1.24

დაწერეთ ალბათობის განაწილება წერტილისათვის, რომელიც თანაბრად ბრუნავს წრეწირზე.

პასუხი

2. ფაზური სივრცე, ლიუვილის თეორემა

ფაზური სივრცე, ანუ Γ სივრცე, არის აბსტრაქტული $2s$-განზომილების სივრცე ყველა განზოგადებული q_j კოორდინატის და განზოგადებული p_j იმპულსის სისტემისა, რომლის თავისუფლების ხარისხი არის s. სისტემის მდგომარეობა დროის მოცემულ მომენტში გამოისახება წერტილით ფაზურ სივრცეში. დროის განმავლობაში ფაზური წერტილი, რომელიც გამოსახავს სისტემის მიკრომდგომარეობას, მოძრაობს Γ-სივრცეში ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ.

ფაზური მოცულობა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$d\Gamma = \prod_{j=1}^{s} dq_j dp_j ,$$

კვაზიკლასიკურად აღწერის დროს სისტემის ყოველ კვანტურ მდგომარეობას შეესაბამება ფაზური მოცულობა: h^s, აქ h პლანკის მუდმივაა.

კვანტურ მდგომარეობათა რიცხვი, რომელიც მოდის განზოგადებული კოორდინატების და იმპულსების $q_j - q_j + dq_j$ $p_j - dp_j$ ინტერვალებზე, გამოისახება ასე: $d\Omega\left(q_j, p_j\right) = \dfrac{d\Gamma}{h^s}$.

ლიუვილის თეორემის თანახმად, გიბსის კანონიკური ანსამბლისათვის ფაზური წერტილების რიცხვის სიმკვრივე რჩება მუდმივი მათი მოძრაობისას ფაზური ტრაექტორიების გასწვრივ. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფაზური მოცულობის ელემენტი, რომელიც გადაადგილდება ფაზურ სივრცეში დროის განმავლობაში, შეიძლება შეიცვალოს მხოლოდ ფორმით, ხოლო მისი მნიშვნელობა რჩება უცვლელი.

$$d\Gamma_{t_0=0} = d\Gamma_t .$$

ამოცანა # 2.1

განსაზღვრეთ m მასის მქონე v_0 სიჩქარით ინერციით მოძრავი ნაწილაკის ფაზური ტრაექტორია.

ამოხსნა

ამოცანა # 2.2

წინა ამოცანის პირობებში შეამოწმეთ ლიუვილის თეორემის სამართლიანობა.

ამოხსნა

ამოცანა # 2.3

დახაზეთ სიმძიმის ველში მყოფი m მასის მქონე ნაწილაკის ერთგანზომილებიანი მოძრაობის ფაზური ტრაექტორია და აჩვენეთ, რომ ლიუვილის თეორემა ამ მოძრაობისათვის დამაკმაყოფილებელია.

ამოხსნა

ამოცანა # 2.4

გამოსახეთ ფაზური ტრაექტორიები: 1) თავისუფლად მოძრავი ნაწილაკისათვის ხახუნის არსებობის გათვალისწინებით; 2) წრფივი ოსცილატორისათვის მცირე ხახუნის გათვალისწინებით ($\mu << \omega_0$, $\mu -$ხახუნის კოეფიციენტი, $\omega_0 -$ საკუთარი სიხშირე).

ამოხსნა

ამოცანა # 2.5

ერთი წრფის გასწვრივ მოძრავი m_1 და m_2 მასების მქონე ნაწილაკებისათვის, რომლებიც ერთმანეთს დრეკადად და ცენტრალურად ეჯახებიან, შეამოწმეთ ლიუვილის თეორემა.

ამოხსნა

ამოცანა # 2.6

შეამოწმეთ ლიუვილის თეორემის სამართლიანობა ბურთულების აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახებისას, თუ ისინი ერთი წრფის გასწვრივ მოძრაობენ.

ამოხსნა

ამოცანა # 2.7

შეამოწმეთ ლიუვილის თეორემის სამართლიანობა მაშინ, როცა სამი ნაწილაკი მოძრაობს მუდმივ სიმძიმის ველში. ნაწილაკების საწყისი მდგომარეობები განისაზღვრება ფაზური წერტილებით:

$A(p_0, z_0)$, $B(p_0, z_0 + a)$, $C(p_0 + b, z_0)$.

ამოცანა # 2.8

განსაზღვრეთ და დახაზეთ ფაზური ტრაექტორია m მასის წერტილისათვის ელექტრული მუხტით $-e$, რომელიც მოძრაობს კულონის მიმზიდავი ძალის მოქმედებით $+e_1$ მუხტის მქონე უძრავი ნაწილაკისაკენ. საწყისი დაშორება r_0, საწყისი იმპულსი $p_0 = 0$.

ამოცანა # 2.9

განსაზღვრეთ და დახაზეთ ჰარმონიული ოსცილატორის ფაზური ტრაექტორია.

ამოცანა # 2.10

გამოთვალეთ ჰარმონიული ოსცილატორის ფაზური მოცულობა.

ამოცანა # 2.11

გამოთვალეთ რელატივისტური ნაწილაკის Γ ფაზური მოცულობა, თუ ნაწილაკის მასაა m და ის მოძრაობს V მოცულობაში და აქვს ε ენერგია.

ამოცანა # 2.12

განსაზღვრეთ და დახაზეთ ფიზიკური ქანქარას ფაზური პორტრეტი, თუ მისი მასაა m, ინერციის მომენტი J და სიგრძე L. განიხილეთ შემდეგი შემთხვევები:

1) $H_0 > 2mgL$; 2) $H_0 = 2mgL$; 3) $H_0 < 2mgL$;

3. გიბსის განაწილება

თუ სისტემა იმყოფება წონასწორობაში თერმოსტატთან, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ ის იმყოფება N მდგომარეობიდან ერთ-ერთში, n მდგომარეობაში E_n ენერგიით მოიცემა გიბსის კანონიკური განაწილებით:

$$w_n = \frac{e^{-E_n/kT}\Omega(E_n)}{\sum_{n=1}^{N} e^{-E_n/kT}\Omega(E_n)},$$

$\Omega(E_n)$ სისტემის გადაგვარების ხარისხია.

$Z = \sum_{n=1}^{N} e^{-E_n/kT}\Omega(E_n)$ სიდიდეს სტატისტიკური ჯამი ეწოდება.

გიბსის მიკროკანონიკური განაწილება იწერება ასე:

$$\rho(H) = \frac{\delta(H(p_i, q_i) - E)}{\Omega(E)},$$ $\delta(x)$ დირაკის დელტა ფუნქციაა.

$$\Omega(E) = \frac{\partial\Gamma(E)}{\partial(E)}, \quad \Gamma(E) = \int \dots \int_{H(p_i, q_i)\le E} d^N p d^N q$$

გიბსის კანონიკური განაწილება კლასიკურ სტატისტიკაში იწერება ასე:

$$dw = \frac{e^{-\frac{E(p,q)}{T}} d\Gamma}{\int e^{-\frac{E(p,q)}{T}} d\Gamma}$$

ეს არის ალბათობა იმისა, რომ სისტემა მოხვდება ფაზური სივრცის მოცულობის $d\Gamma = dqdp$ ელემენტში. $Z = \int e^{-\frac{E(p,q)}{T}} d\Gamma$ სიდიდეს სტატისტიკური ინტეგრალი ეწოდება.

რაიმე L ფიზიკური სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა კვანტურ და კლასიკურ სტატისტიკაში განისაზღვრება ასე:

$$\overline{L} = \frac{\sum_{n=1}^{N} L_n e^{-E_n/kT}\Omega(E_n)}{\sum_{n=1}^{N} e^{-E_n/kT}\Omega(E_n)};$$

$$\overline{L} = \frac{\int L e^{-\frac{E(p,q)}{T}} d\Gamma}{\int e^{-\frac{E(p,q)}{T}} d\Gamma}.$$

ამოცანა # 3.1

დაწერეთ ენერგიების მიხედვით გიბსის განაწილება წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორისათვის კლასიკურ მიახლოებაში და იპოვეთ მისი საშუალო ენერგია.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.2

განსაზღვრეთ მანორმირებელი მამრავლი $\Omega(E)$ გიბსის მიკროკანონიკური განაწილებისათვის შემდეგი სისტემებისათვის:
ა) ერთატომიანი გაზისთვის, რომელიც შედგება N ნაწილაკისაგან;
ბ) N ცალი ჰარმონიული ოსცილატორისაგან.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.3

გამოიყვანეთ გიბსის კანონიკური განაწილება გიბსის მიკროკანონიკური განაწილებიდან. თერმოსტატის როლში განიხილეთ:
ა) ერთატომიანი გაზი, რომელიც შედგება N ნაწილაკისაგან;
ბ) N ცალი ჰარმონიული ოსცილატორი.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.4

განსაზღვრეთ $\overline{E^n}$ $(n>0)$ ერთატომიანი იდეალური გაზისათვის, რომელიც შედგება N ნაწილაკისაგან. გამოიყენეთ მიღებული შედეგი და იპოვეთ ენერგიის საშუალო კვადრატული $\alpha=\sqrt{\overline{\left(E-\overline{E}\right)^2}}$ საშუალო ფარდობითი $\delta=\dfrac{\alpha}{\overline{H}}$ ფლუქტუაცია.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.5

განსაზღვრეთ იდეალური გაზის წნევა და ენერგია, რომლის ერთი ნაწილაკის ენერგია შემდეგნაირადაა დამოკიდებული იმპულსზე $E=ap^l$, თუ გაზი შედგება N ნაწილაკისაგან და იმყოფება ჭურჭელში რომლის მოცულობაა V.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.6

იდეალური გაზის N ნაწილაკი მოთავსებულია V მოცულობის ჭურჭელში და ექვემდებარება გიბსის მიკროკანონიკურ განაწილებას E ენერგიით. გამოთვალეთ მისთვის ფაზური მოცულობა Γ, ენტროპია და ტემპერატურა. იპოვეთ გაზის მდგომარეობის განტოლება.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.7

ამოხსენით წინა ამოცანა, როდესაც გვაქვს N ცალი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი ჰარმონიული ოსცილატორი.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.8

გამოთვალეთ იდეალური გაზის სტატისტიკური ინტეგრალი.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.9

გამოთვალეთ სტატისტიკური ინტეგრალი, თუ გვაქვს N დამოუკიდებელი ჰარმონიული ოსცილატორი.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.10

იდეალური გაზი შედგება N ნაწილაკისაგან და იმყოფება თერმოსტატში, რომლის ტემპერატურაა T. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ გაზს აქვს ენერგია, რომელიც მოთავსებულია ინტერვალში E $E+dE$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.11

რელატივისტური გაზის ენერგია იმპულსთან შემდეგნაირადაა დაკავშირებული: $\varepsilon=c\sqrt{mc^2+p^2}$. დაწერეთ გიბსის განაწილება მოცემულ შემთხვევაში.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 3.12

განსაზღვრეთ იდეალური აირის ენერგია და წნევა, თუ ის შედგება N N ნაწილაკისაგან და იმყოფება ჭურჭელში, რომლის მოცულობაა V.

იდეალური აირის ნაწილაკის ენერგია იმპულსთან შემდეგნაირადაა და-კავშირებული:

$$\varepsilon = c\sqrt{mc^2 + p^2}\ .$$

ამოხსნა

პასუხი

ამოცანა # 3.13

გამოთვალეთ რელატივისტური გაზის მდგომარეობის ინტეგრალი. განიხილეთ ზღვრული შემთხვევები: ა) როცა გაზი არარელატივის-ტურია;
ბ) როცა გაზი ულტრა რელატივისტურია.

პასუხი

ამოცანა # 3.14

იპოვეთ მდგომარეობის რიცხვი მოცემული ენერგიით იდეალური გაზისათვის, რომელშიც ენერგია დაკავშირებულია იმპულსთან თანაფარდობით: $\varepsilon = cp$.

პასუხი

ამოცანა # 3.15

დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სისტემისათვის H ჰამილტონიანით მოლური სითბოტევადობა მუდმივი მოცულობის დროს ტოლია:

$C_V = \dfrac{\overline{\left(H - \overline{H}\right)^2}}{T^2}$. (ამ ამოცანაში ბოლცმანის მუდმივა ჩათვალეთ ერთ-ის ტოლად $k_B = 1$)

პასუხი

ამოცანა # 3.16

აჩვენეთ, რომ სისტემისათვის, რომელიც შედგება ბევრი არაურთი-ერთქმედი N ნაწილაკისაგან, უალბათესი ენერგია ემთხვევა საშუალო ენერგიას.

პასუხი

ამოცანა # 3.17

აჩვენეთ, რომ სისტემისათვის, რომელიც შედგება ბევრი ნაწილაკი-საგან, სამართლიანია ტოლობა: $\overline{E^m} = \left(\overline{E}\right)^m$.

პასუხი

ამოცანა # 3.18

სისტემა, როგორც მთელი, ბრუნავს Ω კუთხური სიჩქარით, დაწე-რეთ გიბსის განაწილება მოცემულ შემთხვევაში.

პასუხი

ამოცანა # 3.19

იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ მოლეკულას ბრუნვის კუთხური სიჩქა-რეები მთავარი ინერციის ღერძების გარშემო ω_1, ω_2, ω_3 მოთავსებულია ინტერვალებში: ω_1, $\omega_1 + d\omega_1$; ω_2, $\omega_2 + d\omega_2$; ω_3, $\omega_3 + d\omega_3$.

პასუხი

ამოცანა # 3.20

იპოვეთ მოლეკულის ბრუნვის საშუალო კვადრატული $\sqrt{\overline{\omega^2}}$ კუთხური სიჩქარე და საშუალო კვადრატული ბრუნვის მომენტი: $\sqrt{\overline{M^2}}$.

პასუხი

ამოცანა # 3.21

დავუშვათ, W_i არის ალბათობა იმისა, რომ სისტემა იმყოფება i მდგომარეობაში E_i ენერგიით. დაამტკიცეთ, რომ თუ ენტროპია განი-საზღვრება ფორმულით $S = -k_0 \sum_i W_i \ln W_i$, მაშინ W_i-ის ის მნიშვნე-ლობები, რომლებისთვისაც ენტროპია მაქსიმალურია, ექვემდებარება კანონიკურ განაწილებას.

პასუხი

ამოცანა # 3.22

მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის ენერგია დაკავშირებულია ტემპერატურასთან შემდეგნაირად $E = aT^n$ თანაფარდობით $(n >> 1)$. იპოვეთ მოცემული ენერგიით სისტემის მდგომარეობების რიცხვი.

პასუხი

4. მაქსველის განაწილება

წონასწორული სისტემის მოლეკულათა რიცხვი, რომელთა სიჩქარეები მოთავსებულია v-დან $v+dv$ ინტერვალში, განისაზღვრება მაქსველის განაწილებით: $dN(v)=4\pi N\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} v^2 dv$, სადაც N ყველა მოლეკულის რიცხვია, T – აბსოლუტური ტემპერატურა, m-მოლეკულის მასა, $\alpha=\dfrac{m}{2kT}$.

სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობა გამოისახება ასე:

$$\bar{v}=\frac{1}{N}\int_0^\infty v dN(v)=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

საშუალო კვადრატული საჩქარე $\sqrt{\overline{v^2}}$ და უალბათესი სიჩქარე $v_{\max}$ აგრეთვე პროპორციულია $T^{\frac{1}{2}}$-ის:

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}},\quad v_{\max}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

ალბათობის განაწილებები სიჩქარეების კომპონენტების მიხედვით შეგვიძლია ჩავწეროთ ნამრავლის სახით:

$$dw\left(v_x,v_y,v_z\right)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}dv_x\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}}dv_y\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}dv_z,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ სიჩქარეების კომპონენტები v_x, v_y, v_z, სტატისტიკურად დამოუკიდებელია.

ამოცანა # 4.1

გიბსის განაწილების გამოყენებით მიიღეთ შემდეგი განაწილებები (მაქსველის განაწილების სხვადასხვა სახეები):

ა) ალბათობა იმისა, რომ მოცემული სისტემის ნებისმიერი ნაწილაკის სიჩქარე მოთავსებულია ინტერვალში $[v_x,v_x+dv_x]$, $[v_y,v_y+dv_y]$, $[v_z,v_z+dv_z]$.

ბ) დაწერეთ ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერი ნაწილაკის სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა მოთავსებულია ინტერვალში: $[v,v+dv]$.

გ) ალბათობა იმისა, რომ ნებისმიერი ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია მოთავსებულია $[\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon]$ ინტერვალში.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.2

გამოთვალეთ იდეალური აირის მილეკულის სიჩქარის საშუალო სიდიდე - $\left|\overline{\overline{v}}\right|$, აგრეთვე $\left|\overline{v_x}\right|$, $\left|\overline{v_y}\right|$ და $\left|\overline{v_z}\right|$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.3

ვიპოვოთ იდეალური აირის მოლეკულების სიჩქარეების მიხედვით განაწილების უალბათესი (მაქსიმალური ალბათობის მქონე) სიჩქარე.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.4

იპოვეთ სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობის n-ური ხარისხის საშუალო მნიშვნელობა მაქსველის განაწილების მიხედვით.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.5

იპოვეთ სიჩქარის საშუალო კვადრატული ფლუქტუაცია $\overline{\Delta v^2}$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.6

იპოვეთ Y იდეალური აირის მოლეკულის სიჩქარის შებრუნებულის საშუალო მნიშვნელობა $\overline{\frac{1}{v}}$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.7

ვიპოვოთ იდეალური აირის კინეტიკური ენერგიის საშუალო მნიშვნელობა, კინეტიკური ენერგიის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობა და საშუალო კვადრატული გადახრა.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.8

განვსაზღვროთ იდეალური აირის ნაწილაკების უალბათესი ენერგია. ვაჩვენოთ, რომ $\varepsilon_{\max} \neq \frac{1}{2} m v_{\max}^2$, სადაც $v_{\max}$ მოლეკულის უალბათესი სიჩქარეა.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.9

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ იდეალური აირის მოლეკულის კინეტიკური ენერგია არ აღემატება წინასწარ მოცემულ მნიშვნელობას- ε_0.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.10

იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ იდეალური აირის მოლეკულის კინეტიკური ენერგია აღემატება წინასწარ მოცემულ მნიშვნელობას- ε_0. ამასთანავე ჩათვალეთ, რომ $\varepsilon_0 >> T$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.11

იპოვეთ შეფარდება იმ ნაწილაკთა რიცხვისა, რომელთა ენერგია ნაკლებია $\varepsilon_0 = T$ მნიშვნელობაზე, იმ ნაწილაკთა რიცხვთან, რომელთა ენერგია მეტია $\varepsilon_0 = T$ მნიშვნელობაზე.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.12

გამოთვალეთ იმ ნაწილაკთა რიცხვი იდეალურ გაზში, რომელთა სიჩქარის x კომპონენტა მოთავსებულია ინტერვალში: $0 \le v_x \le v_x^0$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.13

გამოთვალეთ იმ ნაწილაკთა რიცხვი გაზში, რომელთა სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა მოთავსებულია ინტერვალში: $0 \le v \le v_{\max}$, სადაც $v_{\max} = \left(\frac{2T}{m}\right)^{1/2}$ ნაწილაკის უალბათესი სიჩქარეა გაზში.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.14

გაზის მოლეკულების რა ნაწილს აქვს გადატანითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგია მეტი, ვიდრე საშუალო კინეტიკური ენერგია $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT$.

პასუხი

ამოცანა # 4.15

განსაზღვრეთ წყალბადის, აზოტის და ჟანგბადის მოლეკულების საშუალო სიჩქარე $273\ ^0K$.

პასუხი

ამოცანა # 4.16

გამოთვალეთ წყალბადის მოლეკულების რა ნაწილს აქვს სიჩქარე, რომელიც მოთავსებულია 1800 მ/წმ-დან 1810 მ/წმ-მდე ინტერვალში $300\ ^0K$ -ზე.

პასუხი

ამოცანა # 4.17

გამოთვალეთ აზოტის მოლეკულების რა ნაწილს აქვს სიჩქარე, რომელიც მოთავსებულია 250 მ/წმ-დან 255 მ/წმ-მდე ინტერვალში $273\,^0K$ - ზე.

პასუხი

ამოცანა # 4.18

იპოვეთ იმ მოლეკულების წილი, რომელთა სიჩქარის მოდული ნაკლებია საშუალო სიჩქარის მოდულზე.

პასუხი

ამოცანა # 4.19

მოლეკულების რა ნაწილს აქვს სიჩქარე მოთავსებული $v=\frac{v_m}{2}$, $v=2v_m$ ინტერვალში, სადაც $v_m=\left(\frac{2T}{m}\right)^{1/2}$ უალბათესი სიჩქარეა.

პასუხი

ამოცანა # 4.20

განიხილეთ სუფთა აირადი ჟანგბადი $300\,^0K$ და წნევაზე 2 ატმ. იპოვეთ მოლეკულების რიცხვი 1 მმ^3, რომელთა სიჩქარეები მოთავსებულია ინტერვალში v_x 200მ/წმ-დან 202 მ/წმ-მდე, v_y 450 მ/წმ-დან 455 მ/წმ-დე, v_z 299-დან 300 მ/წმ-დე.

პასუხი

ამოცანა # 4.21

გამოთვალეთ წყალბადისათვის $0\,^0C$-ზე სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა, საშუალო ენერგია და სიჩქარის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობა. შეადარეთ მიღებული შედეგები, უალბათესი სიჩქარის მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება განაწილების ფუნქციის მაქსიმუმს.

პასუხი

ამოცანა # 4.22

განიხილეთ სუფთა აირადი ქლორი $300\,^0C$ და წნევაზე 0.01 მბარი. იპოვეთ მოლეკულების რიცხვი 1მმ^3, რომელთა სიჩქარეები მოთავსებულია ინტერვალში v_x 200მ/წმ-დან 205 მ/წმ-მდე, v_y 100 მ/წმ-დან 110 მ/წმ-დე, v_z 100-დან 105 მ/წმ-დე. ქლორის ფარდობითი ატომური მასა ტოლია 35,45.

პასუხი

ამოცანა # 4.23

განსაზღვრეთ წყალბადის ჰელიუმის და აზოტის უალბათესი სიჩქარეები, რომლებიც შეესაბამება განაწილების ფუნქციის მაქსიმუმს.

პასუხი

ამოცანა # 4.24

მაქსველის განაწილებისათვის გამოთვალეთ სიდიდე:

$\gamma=\frac{1}{\sigma^3}\int\left(v-\overline{v}\right)^3 f(v)dv$, რომელიც განსაზღვრავს განაწილების ასიმეტრიულობას. აქ $\sigma=\sqrt{\overline{(\Delta v)^2}}$, $\Delta v=v-\overline{v}$, $f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$, შეადარეთ მიღებული შედეგი შედეგს, რომელიც მიიღება ნორმალური, ანუ გაუსის განაწილებისათვის:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x}}{\sigma}\right)^2\right).$$

პასუხი

ამოცანა # 4.25

მაქსველის განაწილებისათვის გამოთვალეთ სიდიდე: $\varepsilon=\frac{1}{\sigma^4}\int\left(v-\overline{v}\right)^4 f\left(v\right)dv-3$. რისი ტოლია ეს სიდიდე ნორმალური, ანუ გაუსის განაწილებისათვის? აღნიშვნები იგივეა, რაც წინა ამოცანაში.

პასუხი

ამოცანა # 4.26

გამოთვალეთ ჭურჭლის კედლის ფართობის ერთეულზე დროის ერთეულში მოლეკულების საშუალო დაჯახების რიცხვი.

პასუხი

ამოცანა # 4.27

გამოთვალეთ ჭურჭლის კედლის ფართობის ერთეულზე დროის ერთეულში მოლეკულების დაჯახების რიცხვი, როდესაც კუთხე ჭურჭლის კედლის ნორმალსა და მოლეკულის მიმართულებას შორის მოთავსებულია ინტერვალში θ, $\theta + d\theta$.

პასუხი

ამოცანა # 4.28

გამოთვალეთ ჭურჭლის კედლის ფართობის ერთეულზე დროის ერთეულში მოლეკულების დაჯახების რიცხვი, როდესაც მოლეკულის სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა მოთავსებულია ინტერვალში: v, $v + dv$.

პასუხი

ამოცანა # 4.29

იპოვეთ გაზის იმ მოლეკულების სრული კინეტიკური ენერგია, რომლებიც დროის ერთეულში ეჯახებიან ფართობის ერთეულს.

პასუხი

ამოცანა # 4.30

დაწერეთ განაწილება სიჩქარეების მიხედვით ორგანზომილებიან შემთხვევაში და იპოვეთ $\overline{v}$, v_m, და $\sqrt{\overline{(\Delta v)^2}}$.

პასუხი

ამოცანა # 4.31

N ნაწილაკისაგან შემდგარი იდეალური აირი იმყოფება T ტემპერატურის პირობებში V მოცულობის ჭურჭელში. ჭურჭლის კედელზე არის S ფართობის მქონე მცირე ხვრელი, საიდანაც ჭურჭლიდან სიცარიელეში გამოედინება აირი. იპოვეთ დროის ერთეულში ხვრელში გამოდევნილი ნაწილაკების კუთხური განაწილება.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.32

იდეალური აირი P წნევის პირობებში იმყოფება ჭურჭელში, რომლის კედელში გაკეთებულია მცირე S-ფართობის მქონე ხვრელი, საიდანაც აირის ნაწილაკები გამოედინებიან სიცარიელეში. იპოვეთ ნაწილაკთა გამოდინების სიჩქარე (dN/dt), თუ აირის შემადგენელი ნაწილაკები ჭურჭელში სიჩქარეების მიხედვით მაქსველის განაწილების მიხედვით არის განაწილებული.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.33

აირის ყოველი ატომი ასხივებს λ_0 ტალღის სიგრძის მონოქრომატულ სინათლეს J_0 ინტენსივობით. იპოვეთ N ატომისაგან შემდგარი აირის გამოსხივების ინტენსივობის $J(\lambda)$ დამოკიდებულება λ ტალღის სიგრძეზე.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.34

იპოვეთ იდეალური აირის საშუალო $\overline{\varepsilon}$ და უალბათესი ε_0 ენერგიები. ახსენით, თუ რატომ განსხვავდება ეს ენერგიები ერთმანეთისაგან.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.35

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ იდეალური აირის ნაწილაკის ფარდობითი მოძრაობის $\vec{v}' = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ - სიჩქარის სიდიდე იმყოფება $[v', v' + dv']$ ინტერვალში. გამოთვალეთ აგრეთვე $\overline{|v'|}$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.36

იპოვეთ იდეალური აირის ერთი ნაწილაკის ყველა დანარჩენ ნაწილაკთან 1 წამში დაჯახებათა სრული რიცხვი. ნაწილაკები ჩათვალეთ აბსოლუტურად დრეკად r_0 რადიუსის მქონე მცირე ზომის სფეროებად. გამოთვალეთ აგრეთვე საშუალო თავისუფალი განარბენი λ.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.37

მოცემულია, რომ ელექტრონის პოტენციური ენერგია მეტალში ნაკლებია ელექტრონისავე ენერგიაზე მეტალის გარეთ W სიდიდით. Gგანსაზღვრეთ თერმოელექტრული ემისიის დენის სიმკვრივე. ელექტრონთა კონცენტრაცია მეტალში არის n_0, ელექტრონის მასა m.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.38

იპოვეთ იდეალური აირის იმ მოლეკულათა რიცხვი, რომლებსაც აქვთ სიჩქარის z _ ღერძის გასწვრივი მდგენელი და განივი მდგენელი $\left[v_{\parallel}, v_{\parallel}+dv_{\parallel}\right]$ და $[v_{\perp}, v_{\perp}+dv_{\perp}]$ ინტერვალებში.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.39

იდეალურ აირში u- სიჩქარით მოძრაობს R რადიუსის მქონე დისკი. მისი მოძრაობის სიჩქარე მიმართულია მისივე ზედაპირის მიმართ გავლებული ნორმალის გასწვრივ. იპოვეთ წინააღმდეგობის ძალა, რომელსაც განიცდის დისკი აირში მოძრაობისას, თუ აირი შედგება m მასის მქონე ნაწილაკებისაგან. აირის სიმკვრივე არის ρ, ხოლო ტემპერატურა T.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 4.40

აჩვენეთ, რომ 1 წმ-ში ჭურჭლის კედლის ფართობის ერთეულზე მოლეკულების დაჯახების რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\nu = \frac{1}{4} n\bar{v} .$$

ამოცანა # 4.41

მოლეკულების ნაკადი შედის ვიწრო ხვრელით ამოტუმბულ ჭურჭელში. იპოვეთ ნაკადში მოლეკულების საშუალო და საშუალო კვადრატული სიჩქარე.

პასუხი

ამოცანა # 4.42

გაზის მოლეკულების რა ნაწილს აქვს სიჩქარე, რომელიც მეტია საშუალო სიჩქარეზე**?**

პასუხი

ამოცანა # 4.43

აჩვენეთ, რომ იმ მოლეკულების რიცხვის შეფარდება, რომელთაც აქვთ უალბათესი სიჩქარე, მოლეკულების სრულ რიცხვთან არ არის დამოკიდებული ტემპერატურაზე.

ამოცანა # 4.44

იპოვეთ იმ მოლეკულების რიცხვი, რომლებიც დროის ერთეულში ეჯახებიან ჭურჭლის კედლის ფართობის ერთეულს და აქვთ სიჩქარის კომპონენტი, რომელიც პერპენდიკულარულია ჭურჭლის კედლის და მეტია რაღაც მოცემულ მნიშვნელობაზე v_0.

პასუხი

ამოცანა # 4.45

ელექტრონები, რომლებიც ამოიფრქვევიან გავარვარებული ძაფიდან და ქმნიან გაზს, რომლის სიმკვრივეა n, გადიან ორ მიმდევრობით ხვრელს, რომლებიც ქმნიან ელექტრონების მიმართულ ნაკადს ფართობით 1 სმ^2. ეს ნაკადი გადის შემაფერხებელ ელექტრონულ ველს, რომელიც ელექტრონების ნაწილს აჩერებს. იპოვეთ იმ ელექტრონების რიცხვი, რომლებიც შემაფერხებელ ველს გაივლიან.

პასუხი

ამოცანა # 4.46

გაიშვიათებული გაზი იმყოფება ჭურჭელში, P წნევის ქვეშ. იპოვეთ გაზის მოლეკულების გამოდინების სიჩქარე ვიწრო ხვრელში, რომლის კვეთის ფართობია S_0, თუ გაზის მოლეკულები ემორჩილებიან მაქსველის განაწილებას სიჩქარეების მიხედვით.

ამოცანა # 4.47

ჭურჭელში, რომელშიც იმყოფება იდეალური გაზი, გაკეთებულია მცირე ზომის ხვრელი ფართობით S. იპოვეთ ნაწილაკების რიცხვი, რომლებიც მოხვდებიან მრგვალ დისკზე რადიუსით R, რომელიც განლაგებულია h მანძილზე ხვრელიდან. დისკის სიბრტყე პარალელურია ხვრელის სიბრტყის და ხვრელის ცენტრი და დისკის ცენტრი მოთავსებულია წრფეზე, რომელიც ჭურჭლის კედლის მართობულია. გაზის მოლეკულები ექვემდებარებიან მაქსველის განაწილებას სიჩქარეების მიხედვით.

5. ბოლცმანის განაწილება

ალბათობა იმისა, რომ გარე ველში მოთავსებული T ტემპერატურის მქონე იდეალური აირის მოლეკულა იმყოფება $\left[\vec{r},\vec{r}+d\vec{r}\right]$ ინტერვალში, განისაზღვრება ბოლცმანის განაწილებით:

$dw=\frac{1}{Z}e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}dV$, სადაც $Z=\int e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}dV$,

$U(\vec{r})$ არის მოლეკულის პოტენციური ენერგია, dV – მოცულობის ელემენტი.

დედამიწის მიზიდულობის ერთგვაროვან ველში $U(z)=mgz$, ხოლო მოლეკულათა $n(z)$ კონცენტრაცია დედამიწიდან z სიმაღლეზე მოიცემა ბარომეტრული ფორმულით:

$n(z)=n_0e^{-\frac{mgz}{kT}}$, სადაც $n_0=n(z=0)$.

$\vec{p}$ ელექტრული მომენტის მქონე მოლეკულა $\vec{E}$ ელექტრულ ველში იძენს $U=-\left(\vec{p}\vec{E}\right)=-pE\cos\theta$ ენერგიას.

იდეალური აირის $\vec{P}$ პოლარიზაციის პროექცია $\vec{E}$ ველის დაძაბულობის მიმართულებაზე განისაზღვრება ფორმულით:

$P=pN\overline{\cos\theta}=pNL\left(p_0E/kT\right)$.

სადაც $L(x)=cth(x)-\frac{1}{x}$ არის ლანჟევანის ფუნქცია. Aქედან, მაღალტემპერატურულ მიახლოებაში, როცა $kT>>p_0E$ პოლარიზაციისათვის ვიღებთ კიურის კანონს $p=\frac{Np^2E}{3kT}$.

მბრუნავ ცენტრიფუგაში მყოფი იდეალური აირი ფორმალურად შეგვიძლია გავაიგივოთ აირთან, რომელიც იმყოფება $U=-\frac{m\omega^2r^2}{2}$ პოტენციურ ველში. აქ r არის მანძილი ცენტრიფუგის ღერძიდან აირის მოლეკულამდე.

ბოლცმანის განაწილების თანახმად, ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემის r, φ და z წერტილის მიდამოში მოლეკულის აღმოჩენის ალბათობა არის:

$dw(r,\varphi,z)=Ae^{-\frac{U}{kT}}dV=Ae^{\frac{m\omega^2r^2}{2kT}}rdrd\varphi dz$. ალბათობათა r-ის მიხედვით, განაწილების ფუნქცია (ნორმირებული) იქნება:

$$dw(r)=\frac{m\omega^2}{kT}\frac{e^{\frac{m\omega^2r^2}{2kT}}rdr}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}}-1}.$$

ამოცანა # 5.1

გამოთვალეთ $\vec{p}$ – დიპოლური მომენტის მქონე მოლეკულებისაგან შემდგარი იდეალური აირის სრული ელექტრული მომენტი $\vec{P}$, თუ იგი მოთავსებულია $\vec{E}$ ელექტრული დაძაბულობის მქონე ველში. აირის მოცულობის ერთეული შეიცავს N მოლეკულას და იმყოფება T ტემპერატურაზე.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.2

გამოთვალეთ ის დამატებითი ენერგია, რომელსაც შეიძენს დიპოლური აირი სუსტ ველში მოთავსებისას.

პასუხი

ამოხსნა

ამოცანა # 5.3

ვაჩვენოთ, რომ ძლიერ ელექტრულ ველში, როდესაც დიპოლური აირის დაპოლარება ახლოსაა გაჯერებულ მდგომარეობასთან, დიპოლები ასრულებენ მცირე რხევებს წონასწორული მდგომარეობის მიდამოში.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.4

აირად მდგომარეობაში მყოფი ამიაკი NH_3, რომლის მოლეკულის დიპოლური მომენტი არის $p = 4.9\cdot10^{-30}$ კულონი·მ მოთავსებულია $|\vec{E}| = 500$ ვ/მ დაძაბულობის მქონე ერთგვაროვან ელექტრულ ველში. მოლეკულათა რა ნაწილი იქნება მიმართული $\vec{E}$ -სთან $\theta_0 = 45^o$-ზე ნაკლები კუთხით, თუ აირის ტემპერატურაა $T = 273\ K$?

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.5

ბარომეტრული ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ დედამიწის ზედაპირიდან რა სიმაღლეზე შემცირდება ატმოსფერული წნევა სამჯერ, თუ ჰაერის ტემპერატურაა $273\ K$, მოლური მასა – 29, ხოლო თავისუფალი ვარდნის აჩქარება – 9,8 მ/წმ^2 .

პასუხი

ამოხსნა

ამოცანა # 5.6

ავოგადროს რიცხვის განსასაზღვრად პერენმა გამოიკვლია სითხეში შეწონილი გუმიგუტის მარცვლების დედამიწის ველში სიმაღლის მიხედვით განაწილება. მან იპოვა, რომ $293\,K$ ტემპერატურაზე 100 მკმ ზევით შეწონილ ნაწილაკთა რიცხვი ორჯერ მცირდება. გუმიგუტის ნაწილაკების დიამეტრი იყო $0.3\cdot10^{-4}$ სმ, ხოლო სიმკვრივე ნაკლები იყო სითხის 0.2 გ/მ^3 სიმკვრივეზე. ამ მონაცემების მიხედვით განსაზღვრეთ ავოგადროს რიცხვი.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.7

ვიპოვოთ დედამიწის სიმძიმის ველში H სიმაღლის ჭურჭელში მყოფი იდეალური აირის მოლეკულათა სიმაღლის მიხედვით განაწილებათა ალბათობა. აირის ტემპერატურაა T, თავისუფალი ვარდნის აჩქარება – g, მოლეკულის მასა – m.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.8

განსაზღვრეთ H სიმაღლის სვეტში მყოფი აირის ერთ მოლეკულაზე მოსული საშუალო პოტენციური ენერგია. აირის ტემპერატურაა T და იმყოფება დედამიწის ერთგვაროვან სიმძიმის ველში თავისუფალი g აჩქარებით.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.9

ზოგადად გამოთვალეთ დედამიწის მიზიდულობის ველში მყოფი აირის თერმოდინამიკური ფუნქციები: თავისუფალი ენერგია F, ენტროპია – S, შინაგანი ენერგია – E და სითბოტევადობა – C_V.

პასუხი

ამოხსნა

ამოცანა # 5.10

დაამტკიცეთ, რომ დედამიწის მიზიდულობის ცენტრალური სიმეტრიის $U(r) = -\gamma\frac{mM}{r}$ ველში მყოფი აირი არ შეიძლება იმყოფებოდეს სტატისტიკურ წონასწორობაში. აქ γ გრავიტაციული მუდმივაა, m და M – სხეულისა და დედემიწის მასები, r – მანძილი მათ შორის.

პასუხი

ამოხსნა

ამოცანა # 5.11

იპოვეთ R-რადიუსიან ცენტრიფუგაში მყოფი იდეალური აირის მოლეკულის საშუალო პოტენციური ენერგია, თუ ცენტრიფუგა ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.12

R-რადიუსიან აირის ცენტრიფუგაში, რომელიც ω კუთხური სიჩქარით ბრუნავს, იმყოფება m_1 და m_2 მასის მოლეკულებისაგან შემდგარი აირთა ნარევი. მბრუნავი ცენტრიფუგა ამ აირებს განაცალკევებს. იპოვეთ აირთა განცალკევების კოეფიციენტი $q = \dfrac{(n_1/n_2)_{r=R}}{(n_1/n_2)_{r=0}}$, სადაც n_1 და n_2 მოლეკულათა კონცენტრაციაა. ახსენით, რატომ იზრდება q ტემპერატურის შემცირებისას.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.13

მბრუნავ ცენტრიფუგაში იმყოფება ემულსია, რომელიც შედგება წყალში შეწონილი r-რადიუსიანი სფერული ფორმის, ρ სიმკვრივის მქონე "ნაწილაკებისგან". ცენტრიფუგას რადიუსია R და ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით, წყლის ტემპერატურაა T. გამოთვალეთ წყალში შეწონილი -ნაწილაკების კონცენტრაციათა შეფარდება ცენტრიდან $R/2$ და R მანძილებზე.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.14

იპოვეთ კოლოიდური ნაწილაკთა მასა თუ ცნობილია, რომ კონცენტრაციათა შეფარდება ცენტრიფუგის ღერძიდან r_2 და r_1 მანძილებზე უდრის α-ს, სითხის სიმკვრივეა – ρ_0, ნაწილაკის – ρ. ცენტრიფუგის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე არის ω, სითხის ტემპერატურა – T.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.15

იპოვეთ ცენტრიფუგაში მყოფი იდეალური აირის m მასის მქონე მოლეკულების R-რადიუსიან მბრუნავ ცენტრიფუგის ღერძიდან საშუალო კვადრატული დაშორება, თუ ცენტრიფუგას ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა ω, ხოლო აირის ტემპერატურაა T. აჩვენეთ, რომ არ არსებობს მოლეკულათა უალბათესი დაშორება ცენტრიდან.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.16

ერთატომიანი იდეალური აირი, რომელიც შეიცავს N რაოდენობის m მასის მქონე მოლეკულას იმყოფება R-რადიუსიან და ω კუთხური სიჩქარით მბრუნავ ცენტრიფუგაში. აირის ტემპერატურაა T. იპოვეთ აირის ენერგია და სითბოტევადობა.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.17

იდეალური აირი იმყოფება R რადიუსისა და H სიმაღლის მქონე ცილინდრში, რომელიც, თავის მხრივ, იმყოფება სიმძიმის ერთგვაროვან ველში და ბრუნავს ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. მიიღეთ აირის ალბათობათა განაწილების ფორმულა.

პასუხი

ამოხსნა

ამოცანა # 5.18

გამოთვალეთ იდეალური აირის თავისუფალი ენერგია, რომელიც იმყოფება მბრუნავ ცენტრიფუგაში.

პასუხი

ამოცანა # 5.19

H სიმაღლის მქონე ვერტიკალურ ცილინდრულ ჭურჭელში 1 მოლი რაოდენობის ერთატომიანი იდეალური აირი იმყოფება T ტემპერატურის პირობებში. გაითვალისწინეთ სიმძიმის ერთგვაროვანი ველის არსებობა და იპოვეთ აირის ენერგია და სითბოტევადობა.

ამოცანა # 5.20

პასუხი

განსაზღვრეთ იდეალური გაზის ნაწილაკების სიმკვრივის განაწილება, თუ გაზი შედგებაN N ნაწილაკისაგან, ხოლო ერთი ნაწილაკის მასაა m და გაზი იმყოფება R-რადიუსიან l სიგრძის ცენტრიფუგაში, რომელიც ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ აგრეთვე წნევა ცენტრიფუგას კედელზე.

პასუხი

ამოცანა # 5.21

გიბსის განაწილების გამოყენებით, იპოვეთ იდეალური აირისათვის, რომელიც იმყოფება გარე პოტენციურ ველში $U(x,y,z)$ პოტენციალით, იმის ალბათობა, რომ აირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატი მოთავსებული იქნება ინტერვალში $[x,x+dx]$, $[y,y+dy]$, $[z,z+dz]$.

პასუხი

ამოცანა # 5.22

იპოვეთ იდეალური გაზის სვეტის მასათა ცენტრი ერთგვაროვან სიმძიმის ველში, თუ თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა g, გაზის მოლეკულის მასა – m, ტემპერატურა – T.

პასუხი

ამოცანა # 5.23

l იდეალურ აირთა ნარევი, რომლებიც შედგება ერთნაირი რაოდენობის ნაწილაკებისაგან, მაგრამ სხვადასხვა მასის $m_1, m_2,...m_l$ ატომებისაგან, მოთავსებულია R რადიუსისა და h სიმაღლის ცილინდრში და დედამიწის გრავიტაციულ ველში. იპოვეთ მოცემული სისტემის მასათა ცენტრი.

პასუხი

ამოცანა # 5.24

ორი იდეალური აირის ნარევი, რომელიც შედგება N_1 და N_2 ნაწილაკისაგან m_1 და m_2 მასებით შესაბამისად მოთავსებულია h სიმაღლისა და S ფუძის ფართობის მქონე ცილინდრულ ჭურჭელში. ნარევი იმყოფება გარე სიმძიმის ველში. განსაზღვრეთ წნევა ჭურჭლის ზედა კედელზე, იპოვეთ აგრეთვე მასათა ცენტრის მდებარეობა. ზღვრულ შემთხვევაში განიხილეთ უსასრულო სიმაღლის ცილინდრი.

პასუხი

ამოცანა # 5.25

ატმოსფეროში მყოფი ჟანგბადის მოლეკულების (O_2) რა ნაწილი შეძლებს დედამიწის მიზიდულობის დაძლევას და ატმოსფეროდან გასვლას, თუ ჩავთვლით, რომ ატმოსფეროს ტემპერატურაა $300\ ^oK$?

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 5.26

ბარომეტრული ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ ჰაერის წნევა 1000 მ სიმაღლეზე $-23{,}16$ და $26.84\ ^0C$ ტემპერატურის დროს, თუ წნევა ზღვის დონეზე არის 1013 მბარი.

პასუხი

ამოცანა # 5.27

გამოთვალეთ ჟანგბადის და აზოტის მასა 1 მ^3 ჰაერში ზღვის დონეზე და 5532 მ სიმაღლეზე. ჰაერის ტემპერატურაა $0\ ^0C$ და მისი წნევა 1013 მბარი.

პასუხი

ამოცანა # 5.28

გამოთვალეთ, რა სიმაღლეზე შემცირდება აზოტის და ნახშირორჟანგის პარციალური წნევა ორჯერ, თუ ტემპერატურაა $0\ ^0C$. რა ტემპერატურები მიიღება $30\ ^0C$-ზე.

პასუხი

ამოცანა # 5.29

დედამიწის მიზიდულობის ველში აკვირდებიან ბირთვისმაგვარ ნაწილაკებს, რომელთა დიამეტრია $2\cdot 10^{-7}$ მ. ნაწილაკები იმყოფებიან ჰაერთან შეწონილ მდგომარეობაში $0\ ^0C$ ტემპერატურაზე და 1 ატმ წნევის დროს. დადგინდა, რომ მათი კონცენტრაცია მცირდება ორჯერ 10 მ სიმაღლეზე. რისი ტოლია ამ ნაწილაკების მასა?

პასუხი

ამოცანა # 5.30

დედამიწის მიზიდულობის ველში არის მტვრის ნაწილაკები, რომელთა მასაა $m = 8.5\cdot 10^{-22}$ კგ და მოცულობა – $V = 5\cdot 10^{-22}$ მ^3. განსაზღვრეთ მათი კონცენტრაციის შემცირება $z = 3$ მ სიმაღლეზე. ჰაერის წნევა და ტემპერატურა, შესაბამისად, არის 990 მბარი და $-20\ ^0C$. რა სიმაღლეზე შემცირდება კონცენტრაცია ორჯერ?

პასუხი

ამოცანა # 5.31

გამოიკვლიეთ ჰაერის წნევის შემცირება სიმაღლის ზრდასთან ერთად, თუ ტემპერატურა მუდმივია და ტოლია $0\,^0C$-ისა, ხოლო წნევა ზღვის სიმაღლეზე ტოლია $P_0 = 1013$ მბარი=1 ატმ= $1.013 \cdot 10^5$ ნ/მ (ნორმალური პირობები). გამოიყენეთ შემდეგი ცხრილი:

ნომერი	i	1	2	3	4
გაზი		N_2	O_2	Ar	CO_2
ფარდობითი შემცველობა	p_i	0.7809	0.2095	0.0093	0.0003
ფარდობითი მოლეკულური მასა	M_i	20.013	31.999	39.948	44.010

პასუხი

ამოცანა # 5.32

ცილინდრული ცენტრიფუგა ბრუნავს $\nu = 1500$ წმ$^{-1}$ სიხშირით. ცილინდრის დიამეტრი ტოლია $2r_0 = 0.2$ მ-ის, ხოლო მისი სიგრძეა $l = 0.5$ მ-ის. ცილინდრში არის წყლის და ცილის ემულსია, რომელიც შეიცავს $m = 0.25$ კგ ცილას. ცილის ფარდობითი მოლეკულური მასა და სიმკვრივე ტოლია $M_r = 380$ და $\rho = 1.08$ გრ/სმ^3. განსაზღვრეთ ცილის მოლეკულების განაწილების სიმკვრივე ცენტრიფუგას ღერძზე და მის პერიფერიებში. რისი ტოლია ცილის მასა, რომელიც არის ცილინდრის მსახველიდან 5 მმ ფენაში? ტემპერატურა ჩათვალეთ $4\,^0C$-ის ტოლად.

პასუხი

ამოცანა # 5.33

ვიპოვოთ დედამიწის ზედაპირიდან ჰაერის სვეტის საშუალო სიმაღლე.

ამოცანა # 5.34

ვიპოვოთ სიმძიმის ძალის ველში ჰაერის მოლეკულების საშუალო კვადრატული სიმაღლე.

პასუხი

ამოცანა # 5.35

გამოთვალეთ S ფუძის ფართობის უსასრულო ჰაერის სვეტში მოლეკულების რიცხვი.

პასუხი

ამოცანა # 5.36

გამოვთვალოთ H სიმაღლის ცილინდრში მოთავსებული იდეალური აირის $\bar{U}$ საშუალო პოტენციური ენერგია.

პასუხი

6. თერმოდინამიკა, თერმოდინამიკური ფუნქციები

ენერგია $dE = TdS - PdV$, $T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V$, $P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S$, მუშაობა $dA = -PdV$, სითბოს რაოდენობა შექცევადი პროცესის დროს $dQ = TdS$. ამიტომ $dE = dA + dQ$ (თერმოდინამიკის პირველი კანონი).

სითბოტევადობა მუდმივი მოცულობის დროს:

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V,$$

სითბოტევადობა მუდმივი წნევის დროს:

$$C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P,$$

სითბური ფუნქცია: $W = E + PV$, $dW = TdS + VdP$, $T = \left(\frac{\partial W}{\partial S}\right)_P$,

$$V = \left(\frac{\partial W}{\partial P}\right)_S.$$

თავისუფალი ენერგია:

$$F = E - TS, \quad dF = -SdT - PdV, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T.$$

თერმოდინამიკური პოტენციალი: $\Phi = E - TS + PV$, $d\Phi = -SdT + VdP$,

$$S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_P, \quad V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)_T.$$

თერმოდინამიკური პოტენციალების გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

ამოცანა # 6.1

$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია V და T).

ამოცანა # 6.2

$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია P და T).

ამოცანა # 6.3

$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P.$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია V და T).

ამოცანა # 6.4

$\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$. (დამოუკიდებელი ცვლადებია P და T).

ამოცანა # 6.5

$\left(\frac{\partial W}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$. (დამოუკიდებელი ცვლადებია V და T).

ამოცანა # 6.6

$\left(\frac{\partial W}{\partial P}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$. (დამოუკიდებელი ცვლადებია P და T).

ამოცანა # 6.7

$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P = C_P - P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია P და T).

ამოცანა # 6.8

$$\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_V = C_V + V\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია V და T).

ამოცანა # 6.9

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V.$$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია V და T).

ამოცანა # 6.10

$$\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P.$$

ამოცანა # 6.11

იაკობიანი ეწოდება დეტერმინანტს:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix},$$

აჩვენეთ, რომ იაკობიანს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)}, \qquad \frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y. \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}\frac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial\left(\frac{du}{dt},v\right)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial\left(u,\frac{dv}{dt}\right)}{\partial(x,y)}.$$

ამოცანა # 6.12

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობა:

$$C_p - C_V = -T\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T},$$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია V და T).

ამოცანა # 6.13

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობა:

$$C_p - C_V = -T\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial V}\right)_T},$$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია P და T).

ამოცანა # 6.14

დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობა:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{C_P}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$

ამოცანა # 6.15

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V,$$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია V და T).

ამოცანა # 6.16

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{T}{C_P}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია P და T).

ამოცანა # 6.17

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_W = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V}{C_P}.$$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია P და T).

ამოცანა # 6.18

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E = \frac{P - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{C_V}.$$ (დამოუკიდებელი ცვლადებია V და T).

ამოცანა # 6.19

დაამტკიცეთ, რომ თუ თითოეული A, B, C ცვლადებიდან წარმოადგენს დანარჩენი ორის დიფერენცირებად ფუნქციას ისე, რომ ისინი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები, მაშინ სრულდება ტოლობა:

ა) $\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B = -1,$

ბ)O $\left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)_B = \frac{1}{\left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B}.$

ამოცანა # 6.20

პასუხი

დაამყარეთ კავშირი თერმულ კოეფიციენტებს შორის:

$$\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \beta = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T, \quad \gamma = \frac{1}{P_0}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V,$$

სადაც V_0 და P_0, შესაბამისად, არის საშუალო მოცულობა და საშუალო წნევა ნებისმიერი სისტემისა.

პასუხი

ამოცანა # 6.21

თერმოდინამიკის პირველი და მეორე კანონის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S} = \frac{\beta}{\delta}, \quad C_V = \frac{TV_0\alpha^2\delta}{(\beta-\delta)}; \quad C_P = \frac{TV_0\alpha^2}{\beta-\delta},$$ სადაც α და β

განსაზღვრულია წინა ამოცანაში, ხოლო $\delta = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$.

ამოცანა # 6.22

დაამტკიცეთ ტოლობა:

$$C_P - C_V = \left[V - \left(\frac{\partial W}{\partial P}\right)_T\right]\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

ამოცანა # 6.23

იპოვეთ სხვაობა $C_P - C_V$ იდეალური გაზისათვის და გაზისათვის, რომელიც ემორჩილება ვან დერ ვაალსის განტოლებას.

ამოცანა # 6.24

სითბოს რა რაოდენობა უნდა გადავცეთ 1 მოლ რეალურ გაზს, რომ ის გაფართოვდეს მუდმივი წნევის პირობებში V_1 მოცულობიდან V_2 მოცულობამდე?

გაზის მდგომარეობის განტოლებაა:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

პასუხი

ამოცანა # 6.25

პროცესს, რომელიც ხდება სისტემაში ეწოდება პოლიტროპული, თუ მისი მიმდინარეობის დროს არ იცვლება სისტემის სითბოტევადობა: $C = \frac{dQ}{dT}$. ამ განმარტებიდან გამომდინარე, იპოვეთ ერთატომიანი იდეალური გაზის პოლიტროპის განტოლება.

პასუხი

ამოცანა # 6.26

განსაზღვრეთ იმ ნივთიერების ენტროპია, რომელიც ემორჩილება შემდეგ განტოლებას:

$$V=V_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right];\quad \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=0,\quad C_P=const.$$

პასუხი

ამოცანა # 6.27

იპოვეთ სითბური მანქანის მარგი ქმედების კოეფიციენტი, რომელიც მუშაობს კარნოს ციკლით, თუ მუშა სხეულის მდგომარეობის განტოლებას აქვს სახე:

$$V=V_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right];\quad \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=0.$$

ამოცანა # 6.28

გამოსახეთ თერმოდინამიკური პოტენციალები, ენტროპია და სითბოტევადობა, სტატისტიკური ჯამის საშუალებით.

ამოხსნა

ამოცანა # 6.29

დაამტკიცეთ, რომ ორი სხვადასხვა ტემპერატურის სხეულების შეხებისას ტემპერატურა გადადის უფრო მაღალი ტემპერატურის სხეულიდან უფრო დაბალი ტემპერატურის სხეულში.

ამოხსნა

ამოცანა # 6.30

განსაზღვრეთ მუშაობა, რომელიც სრულდება 1 მოლი წყლის აორთქლებისას $100\,^0C$-ზე ნორმალური წნევის პირობებში. გამოთვალეთ აგრეთვე სითბოს რაოდენობა, რომელიც გადაეცემა წყალს. $R=8.31$ ჯ/K, წყლის ორთქლადქცევის კუთრი სითბო $\lambda=2258$ ჯ/გრ.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 6.31

აჩვენეთ, რომ ელემენტარული მუშაობა, რომელიც სრულდება მოცულობის ერთეულის დიელექტრიკის დასაპოლარიზებლად $\delta A=-\frac{1}{4\pi}EdD$, ხოლო მუშაობა საკუთარი აზრით: $\delta A_c=-EdP$.

ამოცანა # 6.32

რაღაც ტემპერატურაზე $T=T_{kr}$ ისპობა განსხვავება სითხესა და გაზის კუთრ მოცულობებს შორის $V_A=V_L=V_{kr}$. ასეთ მდგომარეობას ეწოდება კრიტიკული, ხოლო პარამეტრებს, რომლის დროსაც ის დგება, კრიტიკული T_{kr}, P_{kr}, V_{kr}. გამოსახეთ კრიტიკული პარამეტრები ვან დერ ვაალსის გაზისთვის a და b ვან დერ ვაალსის პარამეტრების საშუალებით, აგრეთვე იპოვეთ კრიტიკული კოეფიციენტი $s=RT_{kr}/P_{kr}V_{kr}$ ამ გაზისთვის.

პასუხი

ამოცანა # 6.33

გამოთვალეთ კრიტიკული პარამეტრები T_{kr}, P_{kr}, V_{kr} და კრიტიკული კოეფიციენტი $s=RT_{kr}/P_{kr}V_{kr}$ დიტერიჩის განტოლებიდან $P(V-b)=RTe^{-a/(RTV)}$. შეადარეთ მიღებული შედეგები ვან დერ ვაალსის განტოლებიდან მიღებულ შედეგებს. აჩვენეთ, რომ დიდ მოცულობებზე დიტერიჩის განტოლება გადადის ვან დერ ვაალსის განტოლებაში.

პასუხი

ამოცანა # 6.34

გამოთვალეთ კრიტიკული პარამეტრები T_{kr}, P_{kr}, V_{kr} და კრიტიკული კოეფიციენტი $s=RT_{kr}/P_{kr}V_{kr}$ დიტერიჩის მეორე განტოლებიდან $(P+\frac{a}{V^{5/3}})(V-b)=RT$. შეადარეთ მიღებული შედეგები ვან დერ ვაალსის განტოლებიდან მიღებულ შედეგებს.

პასუხი

ამოცანა # 6.35

დაამტკიცეთ, რომ ვან დერ ვაალსის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს დაყვანილი სახით:

$$(\pi + 3/\omega^2)(3\omega - 1) = 8\tau,$$

სადაც $\pi = P/P_{kr}$, $\omega = V/V_{kr}$, $\tau = T/T_{kr}$.

ამოხსნა

ამოცანა # 6.36

ჩაწერეთ დიტერიჩის ტიპის განტოლებები დაყვანილი სახით.

1. $P(V-b) = RTe^{-a/(RTV)}$,
2. $(P + \frac{a}{V^{5/3}})(V-b) = RT$.

პასუხი

ამოცანა # 6.37

რეალური გაზების მდგომარეობის განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს N/V სიმკვრივის ხარისხების სახით: $PV = RT(1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \frac{D}{V^3} + ...)$, სადაც $B, C, D...$ წარმოადგენენ ტემპერატურის ფუნქციებს და მათ ეწოდებათ ვირიალის კოეფიციენტები (შესაბამისად მეორე, მესამე და ასე შემდეგ). ვირიალური მწკრივის პირველი წევრი შეესაბამება შემთხვევას, როცა მოლეკულებს შორის არ არის ურთიერთქმედება, მეორე შეესაბამება წყვილურ ურთიერთქმედებას, მესამე სამ მოლეკულას შორის ურთიერთქმედებას და ასე შემდეგ. ვან დერ ვაალსის განტოლებისათვის იპოვეთ ვირიალის მეორე და მესამე კოეფიციენტები.

პასუხი

ამოცანა # 6.38

დაბალ ტემპერატურებზე რეალური გაზის იზოთერმას P, PV დიაგრამაზე აქვს მინიმუმი, რომელსაც ეწოდება ბოილის წერტილი, ტემპერატურის ზრდისას ბოილის ტემპერატურა ჯერ წანაცვლებს დიდი წნევებისაკენ, ხოლო შემდეგ მცირე წნევებისაკენ. რაღაც ტემპერატურაზე, რომელსაც ეწოდება ბოილის ტემპერატურა მინიმუმი იზოთერმაზე ემთხვევა ორდინატთა ღერძს $(P=0)$. აჩვენეთ, რომ ბოილის ტემპერატურაზე მეორე ვირიალის კოეფიციენტი ტოლია ნულის.

ამოცანა # 6.39

იპოვეთ ბოილის ტემპერატურა ვან დერ ვაალსის $(P + a/V^2)(V-b) = RT$, პირველი და მეორე დიტერიჩის განტოლებებისათვის:

$$P(V-b) = RTe^{-a/(RTV)}, \quad (P + \frac{a}{V^{5/3}})(V-b) = RT,$$

და ბერტლოს განტოლებისათვის:

$$(P + \frac{a}{V^2 T})(V-b) = RT.$$

პასუხი

ამოცანა # 6.40

ვიცით რა მეორე ვირიალური კოეფიციენტის გამოსახულება:

$$B(T) = -2\pi N \int_0^\infty (e^{-\Phi(r)/(kT)} - 1) r^2 dr,$$

იპოვეთ მისი მნიშვნელობა, როცა მოლეკულები ურთიერთქმედებენ, როგორც მყარი ბირთვები σ დიამეტრით:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \infty & r < \sigma, \\ 0 & r > \sigma \end{cases}$$

და როცა გვაქვს სწორკუთხა პოტენციალური ორმოს ტიპის ურთიერთქმედება:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \infty & r > \sigma, \\ -\varepsilon & \sigma < r < R\sigma \ (R > 1), \\ 0 & r > R\sigma. \end{cases}$$

როცა ნაწილაკები ურთიერთგანიზიდებიან კანონით:

$$\Phi(r) = \frac{\alpha}{r^n} \ (n > 3),$$

პასუხი

ამოცანა # 6.41

გვაქვს ორი ერთნაირი მეტალის ბურთულა ერთნაირი ტემპერატურით, ერთი ჩამოკიდებულია უჭიმად ძაფზე, ხოლო მეორე დგას უკუმშვად ზედაპირზე. შეხების წერტილები ძაფთან და ზედაპირთან ადიაბატურად იზოლირებულია. ერთნაირია თუ არა ბურთულების სითბოტევადობები და თუ არა, რომლისაა მეტი?

პასუხი

ამოცანა # 6.42

გამოთვალეთ იდეალური გაზის სითბოტევადობა შემდეგი პრო-ცესების დროს:

а) $PV^2 = const$ б) $P^2V = Const$ в) $P/V = Const$.

პასუხი

ამოცანა # 6.43

ერთი მოლი იდეალური გაზი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ვერ-ტიკალურ ცილინდრში, რომელიც მოთავსებულია დედამიწის მიზიდულო-ბის ველში. იპოვეთ სისტემის სითბოტევადობა.

პასუხი

ამოცანა # 6.44

ჰაერი, რომელიც იმყოფება 5 მ^3 მოცულობაში $P_1 = 4.052 \cdot 10^5$ პა წნევის დროს პოლიტროპულად ფართოვდება სამჯერ $P_2 = 1.013 \cdot 10^5$ პა წნევამდე. გამოთვალეთ პოლიტროპის მაჩვენებელი, გაფართოების მუ-შაობა, სითბოს რაოდენობა და შინაგანი ენერგიის ცვლილება ამ პრო-ცესის დროს.

ამოცანა # 6.45

გამოთვალეთ ვან დერ ვაალსის გაზის ენტროპია. იპოვეთ მისი ადია-ბატის განტოლება.

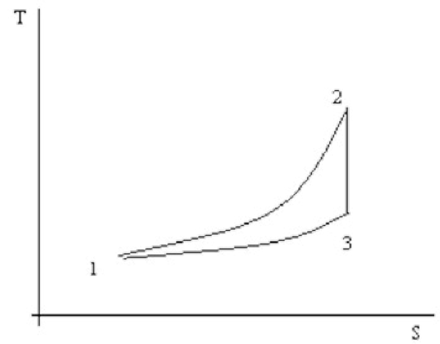
ამოცანა # 6.46

გამოთვალეთ სითბური მანქანის მქკ, რომელიც მუშაობს სტირლინ-გის ციკლით, რომელიც შედგება ორი იზოთერმასაგან $T = T_1$ $T = T_2$ და ორი იზოქორისაგან $V = V_1$ და $V = V_2$. შეადარეთ მიღებული შედეგი კარნოს ციკლზე მომუშავე მანქანას თუ ტემპერატურები T_1 და T_2 იგივეა.

პასუხი

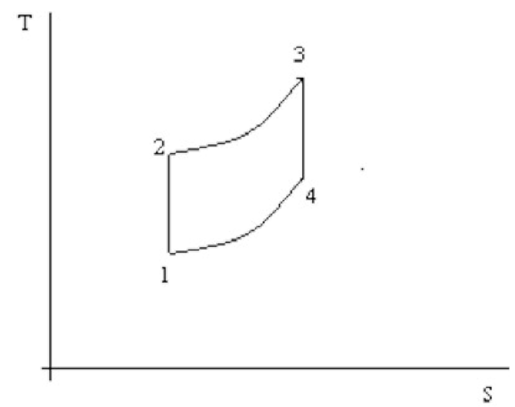
ამოცანა # 6.47

გამოთვალეთ მქკ ლენუარის ციკლისა, რომელიც შედგება იზოქორული 1-2, ადიაბატური 2-3 და იზობარული 3-1 პროცესისაგან. ციკლის პარამეტრია წნევის გაზრდის ხარისხი $\delta = P_2 / P_1$.



ამოცანა # 6.48

იპოვეთ მქკ შიგაწვის ძრავისა, რომელიც მუშაობს დიზელის ციკლით და რომლის დიაგრამა წარმოდგენილია ნახაზზე: 1-2 ჰაერის ადია-ბატური შეკუმშვა, 2-3 იზობარული გაფართოება (საწვავი ნარევის შეფრქვევა და დაწვა), 3-4 ადიაბატური გაფართოება, 4-1 იზობარული გაციება, ციკლის პარამეტრებია: შეკუმშვის ხარისხი – $\varepsilon = V_1 / V_2$ და წი-ნასწარი გაფართოების ხარისხი – $\rho = V_3 / V_2$.



პასუხი

ამოცანა # 6.49

იპოვეთ შიდაწვის ძრავის მქკ, რომელიც მუშაობს ოტოს ციკლით: გაფართოება და შეკუმშვა ხდება ადიაბატურად, ხოლო წვა ხდება მუდმივი მოცულობის პირობებში. ციკლის პარამეტრია შეკუმშვის ხარისხი: $\varepsilon = V_1 / V_2$.

ამოცანა # 6.50

ჭურჭელი იდეალური გაზით გაყოფილია ტიხრით ორ ტოლ ნაწილად, თითოეულ მათგანში V მოცულობაში იმყოფება 1 მოლი გაზი T ტემპერატურის პირობებში. გაზის ენტროპია ნებისმიერ ნაწილში ტოლია: $S = C_V \ln T + R\ln V + S_0$. ხოლო მთელი გაზის ენტროპია ტოლია ამ ენტროპიების ჯამისა:

$S_1 = 2C_V \ln T + 2R\ln V + 2S_0$.

ერთი მხრივ, თუ მოვხსნით ტიხარს, რადგან გაზები ერთნაირია და იმყოფება ერთნაირ პირობებში, ისინი შეერევიან და დაიკავებენ $2V$ მოცულობას. შერევის შედეგად გაზის ენტროპია გახდება $S_2 = 2C_V \ln T + 2R\ln 2V + 2S_0$, ენტროპიის ცვლილება $\Delta S = 2R\ln 2$. მეორე მხრივ, რადგან გაზები ერთნაირია, მათ შორის არავითარი თერმოდინამიკური პროცესი არ მიმდინარეობს და, ამიტომაც, ენტროპიის ცვლილება უნდა იყოს ნულის ტოლი. ახსენით რატომ ვიღებთ $\Delta S \neq 0$.

ამოცანა # 6.51

იპოვეთ ენტროპიის ცვლილება ΔS ორი A და B პორცია ერთი და იმავე გაზის შერევისას, რომელთაც შერევამდე ჰქონდათ ერთი და იგივე მოცულობა V და ტემპერატურა T, მაგრამ სხვადასხვა წნევა (ე.ი. სხვადასხვა ნაწილაკთა რიცხვი N_1 და N_2). იპოვეთ ΔS-ის ცვლილების არე N_1 და N_2-ის ცვლილებისას, თუ უცვლელი რჩება ნაწილაკთა სრული რიცხვი $N = N_1 + N_2$.

პასუხი

ამოცანა # 6.52

იპოვეთ ენტრიპიის ცვლილება ΔS ორი A და B გაზის შერევისას, თუ თითოეული მათგანი წარმოადგენს C და D გაზების ნარევს საერთო ნაწილაკთა N რიცხვით. ამასთან, A გაზი შეიცავს C გაზის Nx_1 ნაწილაკს და D გაზის Nx_2 ნაწილაკს, ხოლო B გაზი შეიცავს C გაზის Ny_1 და D გაზის Ny_2 ნაწილაკს. $(x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 1)$. განსაზღვრეთ ΔS-ის ცვლილების არე A და B გაზის შემადგენლობის შეცვლისას, თუ მათში ნაწილაკთა სრული რიცხვი N რჩება უცვლელი.

ამოცანა # 6.53

იპოვეთ ენტროპიის ცვლილება ΔS ორი ერთი და იმავე მასის ერთი და იმავე იდეალური გაზის შერევისას, თუ გაზები იმყოფებოდნენ თავდაპირველად: ა) ერთნაირი P წნევის, მაგრამ სხვადასხვა T_1 და T_2 ტემპერატურის პირობებში; ბ) ერთი და იმავე ტემპერატურის T, მაგრამ სხვადასხვა წნევის P_1 და P_2 პირობებში.

პასუხი

7. თერმოდინამიკური ფუნქციები და აირთა მდგომარეობის განტოლება

მოგვყავს ზოგიერთი თანაფარდობა თერმოდინამიკურ სიდიდეებს შორის:

$dE = dQ + dA$ (თერმოდინამიკის პირველი კანონი),

$dA = -pdV$, $dQ = TdS$;

$F = E - TS$ (თავისუფალი ენერგია);

$dF = -pdV - SdT$;

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V,$$

$$p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V.$$

იდეალური აირის სტატისტიკურ ჯამს – ინტეგრალს აქვს შემდეგი სახე:

$$Z = \sum_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} \Omega(\varepsilon_i)$$ კვანტურად;

$$Z = \int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\Omega$$ (კლასიკურად).

სტატისტიკური ჯამის საშუალებით შეიძლება გამოითვალოს ყველა თერმოდინამიკური სიდიდე. მოგვყავს ზოგიერთი თერმოდინამიკური სიდიდის თერმოდინამიკურ ჯამთან დამაკავშირებელი ფორმულები:

$$E = \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \ln Z, \quad F = -\theta \ln Z, \quad S = \frac{E}{\theta} + \ln Z \quad \theta = kT;$$

ერთატომიანი იდეალური აირის სტატისტიკური ჯამი არის:

$$Z = \frac{V^N}{N! h^{3N}} (2\pi mkT)^{\frac{3N}{2}};$$

თუ აირი ექვემდებარება კლასიკურ სტატისტიკას, მაშინ სრულდება თეორემა ენერგიის თავისუფლების ხარისხების მიხედვით თანაბრად განაწილების კანონი, რომლის თანახმადაც ყოველ თავისუფლების ხარისხზე მოდის $\frac{1}{2}kT$ ენერგია.

ამოცანა # 7.1

გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც სრულდება იდეალურ გაზზე იზოთერმულად მისი მოცულობის V_1-დან V_2-მდე შეცვლის დროს.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.2

იპოვეთ მუშაობა, რომელიც სრულდება იდეალურ გაზზე ადიაბატური შეკუმშვის დროს.

ამოხსნა

ამოცანა # 7.3

იპოვეთ სითბოს რაოდენობა, რომელსაც იღებს გაზი პროცესის დროს, რომელიც მიმდინარეობს მუდმივი მოცულობის პირობებში (იზოქორული პროცესი).

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.4

იპოვეთ მუშაობა და სითბოს რაოდენობა მუდმივი წნევის პირობებში (იზოქორული პროცესი).

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.5

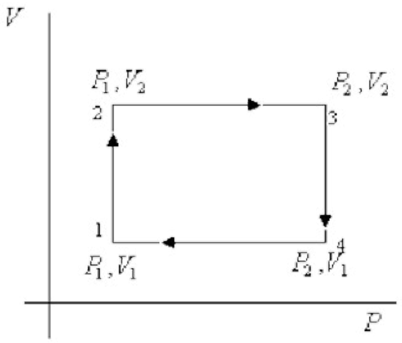
იპოვეთ მუშაობა, რომელიც სრულდება გაზზე და სითბოს რაოდენობა, რომელსაც ის იღებს, თუ იკუმშება V_1 მოცულობიდან V_2 მოცულობამდე შემდეგი განტოლების თანახმადP $pV^n = a$ (პოლიტროპული პროცესი).

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.6

იპოვეთ მუშაობა, რომელიც სრულდება იდეალურ გაზზე და სითბოს რაოდენობა, რომელსაც ის იღებს თუ გაზი ასრულებს წრიულ პროცესს (ე.ი. პროცესის შემდეგ ის უბრუნდება საწყის მდგომარეობას). წრიული პროცესი შედგება ორი იზოქორული და ორი იზობარული პროცესისაგან. გაზი გადადის მდგომარეობიდან P_1 წნევით და

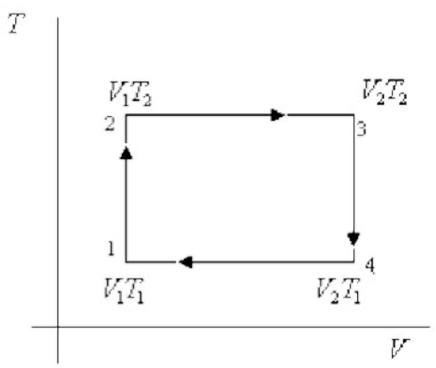
V_1 მოცულობით მდგომარეობაში P_1, V_2, შემდეგ – მდგომარეობაში P_2, V_2, შემდეგ – P_2, V_1, დაბოლოს, ისევ – P_1, V_1 (იხ. ნახაზი).



ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.7

იპოვეთ Mმუშაობა და სითბოს რაოდენობა წრიული პროცესის დროს, თუ პროცესი შედგება ორი იზოქორისაგან და ორი იზოთერმისაგან. გაზი თანმიმდევრობით გადადის მდგომარეობებში: $1)V_1T_1 \to 2)V_1T_2 \to 3)V_2T_2 \to 4)V_2T_1 \to 1)V_1T_1$ (იხ. ნახაზი)

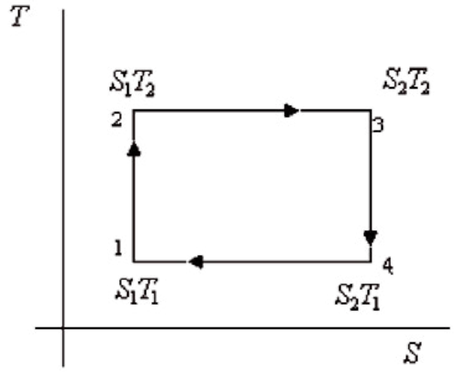


ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.8

იპოვეთ მუშაობა და სითბოს რაოდენობა ციკლური პროცესისათვის, თუ ის შედგება ორი იზოთერმული და ორი ადიაბატური პროცესისაგან. თანმიმდევრული მნიშვნელობები აქვს ენტროპიას, ტემპერატურას და წნევას:

$$1)S_1T_1P_1 \to 2)S_1T_2 \to 3)S_2T_2P_2 \to 4)S_2T_1 \to 5)S_1T_1.$$

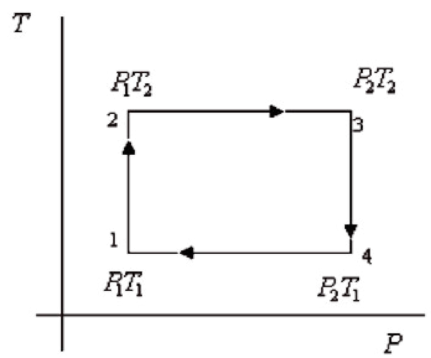


ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.9

იპოვეთ მუშაობა და სითბოს რაოდენობა ციკლისათვის, რომელიც შედგება ორი იზობარული და ორი იზოთერმული პროცესისაგან.

1) P$1)P_1T_1 \to 2)P_1T_2 \to 3)P_2T_2 \to 4)P_2T_1 \to 1)P_1T_1$.

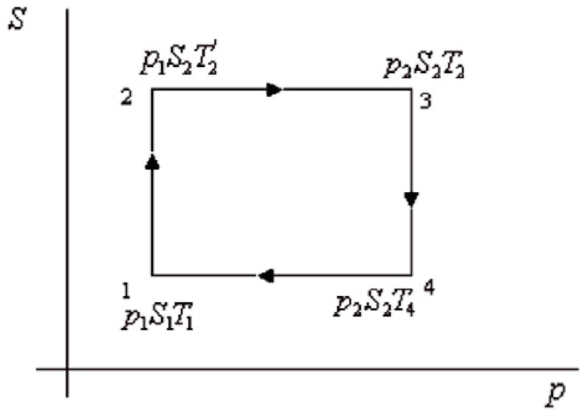


ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.10

იპოვეთ მუშაობა და სითბოს რაოდენობა ციკლისათვის, რომელიც შედგება ორი იზობარული და ორი ადიაბატური პროცესისაგან. გაზის თანმიმდევრული მდგომარეობებია:

$1)\,p_1S_1T_1 \to 2)\,p_1S_2 \to 3)\,p_2S_2T_2 \to 4)\,p_2S_1 \to 1)\,p_1S_1T_1$.



ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.11

იპოვეთ მუშაობა და სითბოს რაოდენობა ციკლისათვის, რომელიც შედგება ორი იზოქული და ორი ადიაბატური პროცესისაგან 1) V_1, S_1, T_1; 2) V_1, S_2; 3) V_2, S_2, T_2; 4) V_2, S_1; 5) V_1, S_1, T_1.

პასუხი

ამოცანა # 7.12

ორი ერთნაირი იდეალური გაზი ერთნაირი წნევით P და ნაწილაკთა რიცხვით N, მაგრამ სხვადასხვა ტემპერატურით: T_1 და T_2 იმყოფება V_1 და V_2 მოცულობებში. შემდეგ ჭურჭლები შეაერთეს. იპოვეთ ენტროპიის ცვლილება.

პასუხი

ამოცანა # 7.13

გამოვთვალოთ $V=10$ ლ მოცულობის ცილინდრში მოთავსებული აირადი ჰელიუმის თავისუფალი ენერგია და წნევა, თუ აირის ტემპერატურაა $T=300\ K$, ხოლო მასა 1გ. აირი ჩათვალეთ იდეალურად.

ამოცანა # 7.14

განვსაზღვროთ 1 ლ მოცულობის აირადი ჰელიუმის შინაგანი ენერგია და ენტროპია, თუ აირის ტემპერატურაა $T=300\ K$, ხოლო წნევა $2.76\cdot10^5$ ნ/მ^2. აირი ჩათვალეთ იდეალურად.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.15

იპოვეთ ერთატომიანი აირის ენტროპიის დამოკიდებულება შინაგან ენერგიასა და მოცულობაზე, თუ იგი შეიცავს N მოლეკულას.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.16

გამოთვალეთ იდეალური აირის ენტროპიის ცვლილება იმ შემთხვევისათვის, როცა აირის მასა და ტემპერატურა უცვლელია, ხოლო მოცულობა იცვლება V-დან $2V$-მდე.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.17

ვიპოვოთ ენტროპიის ცვლილება ორი სხვადასხვა აირის ურთიერთშერევისას, თუ მათ აქვთ ერთნაირი წნევები და ტემპერატურები, მაგრამ სხვადასხვა მოცულობები.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.18

ვიპოვოთ ენტროპიის ცვლილება ორი ერთნაირი აირის ურთიერთ-შერევისას, თუ მათ აქვთ ერთი და იგივე წნევები და ტემპერატურები, მაგრამ სხვადასხვა მოცულობები.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.19

დაამტკიცეთ, რომ იდეალური აირის მოლეკულათა რხევით თავისუფ-ლების ხარისხზე მოდის NkT ენერგია.

ამოცანა # 7.20

დაამტკიცეთ, რომ იდეალური აირის მოლეკულათა ბრუნვით თავი-სუფლების ხარისხზე მოდის $\frac{1}{2}NkT$ ენერგია.

ამოცანა # 7.21

გამოთვალეთ ორატომიანი იდეალური აირის სტატისტიკური ინტეგ-რალი იმ შემთხვევისათვის, როდესაც მოლეკულაში რხევითი მოძრაობა

არ არის აღძრული. განსაზღვრეთ თავისუფალი ენერგიის შინაგანი ენერგიის და ენტროპიის ბრუნვითი ნაწილები.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.22

მიიღეთ ორატომიანი იდეალური აირის სითბოტევადობის ფორმულა იმ შემთხვევისათვის, როცა მოლეკულაში რხევითი მოძრაობა არა არის აღძრული.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.23

იპოვეთ, რას უდრის ორატომიანი მოლეკულის საშუალო ზომა თუ მოლეკულაში აღძრულია რხევითი მოძრაობა. ატომთა ცენტრებს შორის წონასწორული მანძილი არის r_0.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.24

გამოთვალეთ ერთი მოლი ჟანგბადის (O_2) ბრუნვითი მოძრაობის, თავისუფალი ენერგიის და ენტროპიის ცვლილებები, გამოწვეული აირის $T_1 = 350\,K$-დან $T_2 = 400\,K$-მდე გაცხელებით. O_2-ის ინერციის მომენტი არის $I = 1.9 \cdot 10^{-46}$ კგ · მ

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.25

$\nu = 2$ კმოლი რაოდენობის ქლორწყალბადის (Hcl) იდეალურ აირს აცხელებენ $T_1 = 300\ K$-დან $T_2 = 400\ K$-მდე. იპოვეთ შინაგანი ენერგიის და ენტროპიის ცვლილება, თუ მოლეკულათა შინაგანი რხევითი მოძრაობა არ არის აღძრული, ხოლო მოცულობა აირის გაცხელებისას არ იცვლება.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.26

გამოთვალეთ ვან დერ ვაალსის განტოლების a-კოეფიციენტი, როცა მოლეკულებს შორის ურთიერთქმედებას აქვს სახე:

$$U(r) = \begin{cases} \infty & 0 \le r \le r_0, \\ -U_0\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^n & 2r_0 < r < \infty \end{cases}$$

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.27

გამოთვალეთ აირთა მდგომარეობის განტოლების შესწორება, გამოწვეული მოლეკულათა შორის ურთიერთქმედებით:

$$U(r) = \begin{cases} \infty, \ 0 \le r < d \\ -\dfrac{\alpha}{r^n}, \ r \ge d, \ \alpha > 0, \ n > 3. \end{cases}$$

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.28

გამოთვალეთ ენტროპიის ცვლილება ორი იდეალური აირის დიფუზიის შემთხვევაში, როდესაც აირები ერთმანეთზე ქიმიურად არ მოქმედებენ. დავუშვათ, რომ შერევამდე აირებს ეკავათ ტოლი მოცულობები.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.29

იპოვეთ ორატომიანი მოლეკულის ბრუნვითი მოძრაობის შესაბამისი სპექტრალური ხაზების (შთანთქმისა და გამოსხივების) ინტენსივობათა განაწილება. ჩათვალეთ, რომ ხაზების ინტენსივობა განისაზღვრება ბრუნვითი მოძრაობის ენერგეტიკული დონეების "დასახლებათა" რიცხვით.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.30

გამოთვალეთ ჟანგბადის მოლეკულის (O_2) ბრუნვითი მოძრაობის წვლილი შინაგან ენერგიას, თავისუფალ ენერგიასა და ენტროპიაში. როგორ შეიცვლება ჟანგბადის აირის ზემოთ ჩამოთვლილი თერმოდინამიკური ფუნქციები, თუ აირს გავათბობთ $300\,^0K$-დან $350\,^0K$-მდე, აირის მოლური მასაა 1 კმოლი, O_2-ის ინერციის მომენტი – $I_{O_2} \approx 1.9 \cdot 10^{-46}$ კგ · მ^2.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 7.31

გამოთვალეთ წყალბადის მოლეკულის (H_2) რხევითი მოძრაობის წვლილი შინაგან ენერგიასა, სითბოტევადობასა, თავისუფალ ენერგიასა და ენტროპიაში. როგორ შეიცვლება წყალბადის აირის ზემოთ აღნიშნული თერმოდინამიკური ფუნქციები, თუ აირის ტემპერატურა შეიცვლება $300\ ^0K$-დან $350\ ^0K$-მდე, აირის მოლური მასაა 1 კმოლი, მოლეკულის რხევის კუთხური სიხშირე – $\omega_0 \approx 8.3\cdot 10^{14}$ წმ$^{-1}$.

ამოხსნა

ამოცანა # 7.32

ექსპერიმენტი გვიჩვენებს, რომ ნორმალური წნევის პირობებში წყალბადის (H_2) აირის ტემპერატურის შემცირებისას მოლეკულის ბრუნვითი მოძრაობის წვლილი სითბოტევადობაში "ქრება". იგივე მოვლენა არ დაიმზირება აზოტისა (N_2) და ჟანგბადისათვის (O_2). ახსენით ეს მოვლენა.

ამოხსნა

ამოცანა # 7.33

გამოთვალეთ თავისუფალი ენერგია და მდგომარეობის განტოლება ერთატომიანი ულტრარელატივისტური გაზისთვის, რომლის ნაწილაკებისათვის სამართლიანია ტოლობა $\varepsilon = cp$.

პასუხი

ამოცანა # 7.34

იპოვეთ, როგორ არის დამოკიდებული ენერგიაზე E და V მოცულობაზე ერთატომიანი იდეალური გაზის ენტროპია S, თუ გაზი შედგება N ნაწილაკისგან.

პასუხი

ამოცანა # 7.35

იპოვეთ იდეალური ერთატომიანი გაზის სვეტის თავისუფალი ენერგია, თუკი მისი სიმაღლეა H, ხოლო ფუძის ფართობი – S და ის იმყოფება ერთგვაროვან სიმძიმის ველში g აჩქარებით, T ტემპერატურით, თუ ცნობილია გაზის ნაწილაკთა რიცხვი N და ნაწილაკთა მასა m.

პასუხი

ამოცანა # 7.36

ჭურჭელში, რომელსაც აქვს კუბის ფორმა L წიბოს სიგრძით, იმყოფება იდეალური გაზი, რომლის ტემპერატურაა T და ნაწილაკთა რიცხვი $-N$, ჭურჭელი მოთავსებულია გარე სიმძიმის ველში g აჩქარებით, იპოვეთ წნევა ჭურჭლის ზედა წახნაგზე.

პასუხი

ამოცანა # 7.37

გამოთვალეთ მრავალატომიანი იდეალური გაზის სტატისტიკური ინტეგრალის ბრუნვითი ნაწილი და იპოვეთ გამოსახულება თავისუფალი ენერგიის $F_{ბრ}$, $E_{ბრ}$ შინაგანი ენერგიის და $S_{ბრ}$ ენტროპიის გამოსახულება.

პასუხი

ამოცანა # 7.38

იპოვეთ ვან დერ ვაალსის გაზის თავისუფალი ენერგიის გამოსახულება. მიღებული ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ 1 გრ ჰელიუმის თავისუფალი ენერგია თუ ის იკავებს 5 ლ მოცულობას 400 კელვინ ტემპერატურაზე.

$$(a = 3.5\cdot 10^3 \frac{n\cdot m^2}{kmol^2},\ b = 0.024\frac{m^3}{kmol})$$

პასუხი

ამოცანა # 7.39

დათვალეთ 1 გრ ჰელიუმის ენტროპია, თუ ის იმყოფება ჭურჭელში, რომლის მოცულობაა 10 ლ და ტემპერატურა 300 კელვინი. a და b კოეფიციენტები აიღეთ წინა ამოცანიდან.

პასუხი

ამოხსნა

ამოცანა # 7.40

იპოვეთ ერთი მოლი ულტრარელატივისტური იდეალური გაზის სითბოტევადობა C_V. $(\varepsilon = cp)$.

პასუხი

ამოცანა # 7.41

გამოთვალეთ მყარი სხეულის სითბოტევადობა. ჩათვალეთ, რომ ატომების რხევები ანჰარმონიულია. ანჰარმონიული ოსცილატორის ჰამილტონის ფუნქცია:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \alpha q^2 - \beta q^4, \quad \text{სადაც} \quad \beta << \frac{\alpha^2}{k_0 T}.$$

პასუხი

ამოცანა # 7.42

გამოთვალეთ წრფივი ოსცილატორის საშუალო ენერგია, რომლის ჰამილტონის ფუნქციას აქვს სახე:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + aq^4.$$

პასუხი

ამოცანა # 7.43

იპოვეთ ორატომიანი მოლეკულის დამატებითი სითბოტევადობა, გამოწვეული მისი მოლეკულების ანჰარმონიულობით, თუ მოლეკულის პოტენციურ ენერგიას აქვს სახე: $U = \frac{\alpha}{2} q^2 + \beta q^3 + \gamma q^4$, სადაც α, β, γ მუდმივი კოეფიციენტებია.

პასუხი

ამოცანა # 7.44

განსაზღვრეთ მაქსიმალური მუშაობა, რომელიც შეგვიძლია მივიღოთ, ორი ერთნაირი იდეალური გაზის ჭურჭლის შეერთებისას, გაზებს აქვთ ერთნაირი ტემპერატურები T_0 და ნაწილაკთა რიცხვი N, მაგრამ სხვადასხვა მოცულობები: V_1 და V_2.

პასუხი

ამოცანა # 7.45

იგივე რაც წინა ამოცანაში, თუ შეერთებამდე გაზებს გააჩნდათ ერთნაირი წნევა P_0 და სხვადასხვა ტემპერატურები: T_1 და T_2.

პასუხი

ამოცანა # 7.46

იპოვეთ მინიმალური მუშაობა, რომელიც უნდა შევასრულოთ იდეალურ გაზზე იმისათვის, რომ ის შევკუმშოთ P_1 წნევიდან P_2 წნევამდე მუდმივი ტემპერატურის პირობებში, რომელიც გარემოს ტემპერატურის ტოლია $(T = T_0)$.

პასუხი

ამოცანა # 7.47

განსაზღვრეთ მაქსიმალური მუშაობა, რომელიც შეგვიძლია მივიღოთ იდეალური გაზის დახმარებით მისი გაცივებისას T ტემპერატურიდან T_0 გარემოს ტემპერატურამდე T_0 მუდმივი მოცულობის პირობებში.

პასუხი

ამოცანა # 7.48

იგივე გაზისათვის მისი გაცივებისას T ტემპერატურიდან T_0 გარემოს ტემპერატურამდე და ამავე დროს გაზი ფართოვდება ისე, რომ მისი წნევა იცვლება P-დან გარემოს წნევამდე P_0.

პასუხი

ამოცანა # 7.49

იპოვეთ იდეალური და ვან დერ ვაალსის ტემპერატურების ცვლილება, მათი ცარიელ სივრცეში გაფართოებისას V_1 მოცულობიდან V_2 მოცულობამდე.

პასუხი

ამოცანა # 7.50

გაზი იმყოფება ერთგვაროვან სიმძიმის ველში უსასრულო კონუსში წვეროთი მიმართული დედამიწის ზედაპირზე, კუთხით – 2α წვეროში და ღერძით მიმართული ვერტიკალურად ზევით. იპოვეთ გაზის სიმკვრივე კონუსის წვეროში (ნაწილაკთა სრული რიცხვი N და გაზის ტემპერატურა მოცემულია).

8. გიბსის კვანტური განაწილება

კვანტური სისტემებისთვის დისკრეტული ენერგეტიკული სპექტრით ε_n, როდესაც არის g_n რიგის გადაგვარება, გიბსის კანონიკურ განაწილებას აქვს სახე:

$$W_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}},$$

სადაც სტატისტიკური ჯამი Z ტოლია:

$$Z = \sum_n g_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}};$$

სტატისტიკური ჯამი და საშუალო ენერგია კვანტური ჰარმონიული ოსცილატორის ν სიხშირით გაოისახება ფორმულით:

$$Z = \frac{e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}; \quad \overline{\varepsilon} = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{2kT}}-1},$$

მყარი როტატორის ენერგია ტოლია:

$\varepsilon_e = \frac{h^2}{8\pi^2 I} l(l+1)$, სადაც I როტატორის ინერციის მომენტია, l კვანტური რიცხვი იღებს მნიშვნელობებს $l = 0, 1, 2$. ამასთან, თითოეული დონე $(2l+1)$-ჯერ არის გადაგვარებული.

ამოცანა # 8.1

გამოთვალეთ N ერთმანეთზე დამოუკიდებელი წრფივი კვანტური ოსცილატორის ენერგიისა და სითბოტევადობის ტემპერატურაზე დამოკიდებულება.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 8.2

აზოტის მოლეკულების ω საკუთარი სიხშირე ტოლია $\omega = 4.45\cdot 10^{14}\, c^{-1}$. გამოთვალეთ მოლური სითბოტევადობის რხევითი ნაწილი, როცა $T = 500\, K$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 8.3

გამოთვალეთ a_ν ფაზური უჯრედის მოცულობა რხევითი მოძრაობისათვის. მხედველობაში მიიღეთ, რომ როცა $T >> T_C$, მაშინ ერთგანზომილებიანი ჰარმონიული ოსცილატორის სტატისტიკური ჯამი ემთხვევა მდგომარეობათა ინტეგრალს.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 8.4

იპოვეთ N ერთმანეთზე დამოუკიდებელი წრფივი ოსცილატორის თავისუფალი ენერგია და ენტროპია.

ამოხსნა

ამოცანა # 8.5

ორგანზომილებიან ჰარმონიულ ოსცილატორს აქვს $(n+1)$-ჯერ გადაგვარებული ენერგეტიკული სპექტრი $\varepsilon_n = \hbar\omega(n+1)$.

გამოთვალეთ იმ სისტემის საშუალო ენერგია და სითბოტევადობა, რომელიც შედგება N ერთმანეთზე დამოუკიდებელი ჰარმონიული ოსცილატორისგან.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 8.6

იდეალური აირის შემადგენელი ნაწილაკების შინაგანი მოძრაობა ხასიათდება გადაუგვარებელი სასრული ენერგეტიკული სპექტრით:

$\varepsilon_l = \Delta l,\ l = 1,2...n.\ (n > 1)$, ამასთანავე, უმაღლესი დონის ენერგია $\varepsilon_n = n\Delta$ ბევრად ნაკლებია სითბური მოძრაობის ენერგიაზე $n\Delta << kT$. იპოვეთ აირის თავისუფალი ენერგია და სითბოტევადობა.

პასუხი

ამოცანა # 8.7

მოცემულია სისტემა N დამოუკიდებელი ერთგანზომილებიანი ოს-ცილატორი. იპოვეთ ოსცილატორების რიცხვი სისტემაში, რომელთაც აქვთ ენერგია ტოლი ან მეტი ენერგიაზე: $\varepsilon_1 = \left(n_1 + 1/2\right)\hbar\omega$.

პასუხი

ამოცანა # 8.8

იპოვეთ საშუალო ენერგია და სითბოტევადობა N არა-ურთიერთქმედი ნაწილაკის, რომელთაც შეუძლიათ ყოფნა ორ გადაუგვარებელ კვანტურ მდგომარეობაში ენერგიებით: ε_0 და ε_2.

პასუხი

ამოცანა # 8.9

სისტემას შეუძლია იმყოფებოდეს ორ კვანტურ მდგომარეობაში ენე-რგიებით 0 და ε, რომლებიც გადაგვარებულია g_1 და g_2-ჯერ. იპოვეთ S-ის E-ზე დამოკიდებულება.

პასუხი

ამოცანა # 8.10

სისტემას აქვს გადაუგვარებელი ენერგეტიკული სპექტრი $\varepsilon_l = l\varepsilon$, $l = 0,1,2...n-1$. იპოვეთ ასეთი სისტემის საშუალო ენერგია.

პასუხი

ამოცანა # 8.11

გამოთვალეთ ფაზური სივრცის უჯრედის მოცულობა a_r ბრუნვითი მოძრაობისათვის, მხედველობაში მიიღეთ, რომ როცა $T >> T_C^{<H}$, მყარი როტატორის სტატისტიკური ჯამი ტოლია მდგომარეობის ინტეგრალის:

$$Z = \frac{1}{a_r}\int \exp\left(-\varepsilon_{<H} / T\right) d\Gamma .$$

პასუხი

ამოცანა # 8.12

გამოთვალეთ მაღალი და დაბალი ტემპერატურების დროს საშუალო ენერგია და სითბოტევადობა C_V სისტემისათვის, რომელიც შედგება N ცალი ორატომიანი მოლეკულისაგან, თუ ჩავთვლით, რომ მოლე-კულები წარმოადგენენ მყარ კვანტურ როტატორებს.

პასუხი

ამოცანა # 8.13

ა) გამოთვალეთ N კვანტური როტატორის თავისუფალი ენერგია და ენტროპია: ა) მაღალ ტემპერატურებზე $T >> T_C$; ბ) დაბალ ტემპერატურებზე $T << T_C$.

პასუხი

ამოცანა # 8.14

გამოთვალეთ ბრუნვითი თავისუფლების ხარისხის მახასიათებელი ტემპერატურები მოლეკულებისა, რომელთა ინერციის მომენტები მოყვა-ნილია ცხრილში:

მოლეკულა	H_2	N_2	O_2	Cl_2	HCl	NO
ინერციის მომენტი $\times 10^{-40}$ გრ სმ^2	0.46	13.84	19.13	113.5	2.67	16.43

პასუხი

ამოცანა # 8.15

განსაზღვრეთ ბრუნვითი კრიტიკული ტემპერატურების შეფარდება წყალბადის H_2, დაიტერიუმისა D_2 და HD შენაერთისა. ჩათვალეთ ამ მოლეკულების რადიუსები ერთნაირია.

პასუხი

ამოცანა # 8.16

განსაზღვრეთ CO მოლეკულის რხევითი მოძრაობის მახასიათებელი ტემპერატურა, თუ მისი რხევის საკუთარი სიხშირეა: $\nu = 0.65 \times 10^{14}$ ჰც.

პასუხი

ამოცანა # 8.17

იპოვეთ H_2, D_2, HD მოლეკულების რხევითი მოძრაობის მახასიათებელი ტემპერატურების შეფარდება, ჩათვალეთ ეს მოლეკულები ოსცილატორებად ერთი და იმავე კვაზიდრეკადი დამაბრუნებელი ძალით.

პასუხი

9. ფერმი-დირაკისა და ბოზე-აინშტაინის განაწილება

ნაწილაკთა საშუალო რიცხვი ნახევრის ტოლი სპინით ერთ კვანტურ მდგომარეობაში ε ენერგიით განისაზღვრება ფერმი-დირაკის განაწილებით:

$$f_0(\varepsilon) = \frac{1}{1+e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}},$$

აქ μ – ფერმის ენერგია, ანუ ქიმიური პოტენციალი;

აბსოლუტური ნული ტემპერატურის დროს ქიმიური პოტენციალი μ_0 გამოისახება ნაწილაკთა რიცხვით n და მასით m ფორმულით:

$$\mu_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}$$

ზოგად შემთხვევაში (ნებისმიერ ტემპერატურებზე), კონცენტრაცია და ფერმი გაზის ენერგია E განისაზღვრება ინტეგრალებით:

$$n = \frac{1}{V} g\int_0^\infty f_0(\varepsilon)\cdot D(\varepsilon)d\varepsilon;$$

$$E = g\int_0^\infty \varepsilon f_0(\varepsilon)\cdot D(\varepsilon)d\varepsilon,$$

სადაც $D(\varepsilon)d\varepsilon$ კვანტურ მდგომარეობათა რიცხვია სპინის განსაზღვრული პროექციით s_z ენერგიათა ინტერვალში $\varepsilon - \varepsilon + d\varepsilon$, V გაზის მოცულობაა $g = 2s+1$ სტატისტიკური წონა, $s -$ ნაწილაკთა სპინი. არარელატივისტურ შემთხვევაში მდგომარეობათა სიმკვრივე $D(\varepsilon)$ გამოისახება ფორმულით:

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} V\sqrt{\varepsilon},$$

ნაწილაკთა საშუალო რიცხვი მთელი სპინებით (ბოზონები), რომლებიც იმყოფებიან ერთ კვანტურ მდგომარეობაში ε ენერგიით განისაზღვრება ბოზე-აინშტაინის განაწილებით; $f_0(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1}$ ბოზე გაზისთვის არსებობს ისეთი ზღვრული ტემპერატურა $T_0^{'}$, რომ ქიმიური პოტენციალი μ ხდება ნულის ტოლი, როცა $T \le T_0^{'}$, ბოზონების გადასვლას, როცა $T < T_0^{'}$ ენერგიის ნულოვან დონეზე, ეწოდება ბოზე კონდენსაცია, ხოლო $T_0^{'}$ ტემპერატურას – ბოზე კონდენსაციის ტემპერატურა.

ამოცანა # 9.1

იპოვეთ S ენტროპიის $\bar{n}_j$-ზე დამოკიდებულება იდეალური აირებისათვის, რომლებიც ემორჩილებიან ბოზე-აინშტაინისა და ფერმი-დირაკის სტატისტიკებს და ენტროპიის მაქსიმუმის პრინციპის გამოყენებით გამოიყვანეთ ფერმი-დირაკის და ბოზე-აინშტაინის განაწილებები.

ამოხსნა

ამოიცანა #9.2

დაწერეთ განაწილების ფუნქცია სიჩქარეების მიხედვით არარელატივისტური ფერმიონებისათვის ნახევარი სპინით, თუ ცნობილია მათი განაწილებები ენერგიების მიხედვით.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.3

წინა ამოცანის შედეგების გამოყენებით, გამოთვალეთ საშუალო და საშუალო კვადრატული სიჩქარეები, $\bar{v}$, $\overline{v^2}$, აგრეთვე $\overline{\frac{1}{v}}$, როცა $T = 0\ {}^0K$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.4

გამოთვალეთ არარელატივისტური გადაგვარებული ფერმი გაზის სითბოტევადობა და ენტროპია, როცა $T \neq 0\ {}^0K$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.5

იპოვეთ ელექტრონების დაჯახებათა რიცხვი კედელთან არარელატივისტურ ელექტრონულ გაზში აბსოლუტურ ნულზე ტემპერატურის დროს.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.6

იპოვეთ ელექტრონების დაჯახებათა რიცხვი კედელთან ულტრარელატივისტურ სრულიად გადაგვარებულ ელექტრონულ გაზში.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.7

სრულიად გადაგვარებული ულტრარელატივისტური გაზისათვის იპოვეთ: ა) სრული და ერთი ნაწილაკის საშუალო ენერგია, როცა $T = 0K$. ბ) იპოვეთ კავშირი წნევასა და ენერგიას შორის.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.8

გამოთვალეთ ულტრარელატივისტური გადაგვარებული ელექტრონული გაზის სითბოტევადობა.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.9

გამოთვალეთ ძლიერად გადაგვარებული ელექტრული გაზის ქიმიური პოტენციალი ტემპერატურაზე, რომელიც ნულისაგან არის განსხვავებული. გამოთვალეთ რამდენი პროცენტითაა განსხვავებული ნატრიუმის ფერმის ენერგია $T = 300\,K$ ფერმის ენერგიისაგან, როცა $T = 0\,K$, თუ თავისუფალი ელექტრონების კონცენტრაცია ნატრიუმში ტოლია $n = 2.5 \cdot 10^{28}\ m^{-3}$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.10

დაწერეთ ნაწილაკთა განაწილება მდგომარეობების მიხედვით სუსტად გადაგვარებულ ფერმი გაზში.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.11

იპოვეთ ფერმი გაზის მდგომარეობის განტოლება დაბალ ტემპერატურებზე.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.12

სისტემა, რომელიც შედგება N ნაწილაკისაგან და რომლის კინეტიკური ენერგია დაკავშირებულია იმპულსთან $\varepsilon = \alpha p^l$, თანაფარდობით ქმნის იდეალურ გაზს, რომელიც ხასიათდება განაწილების ფუნქციით: $dw = 4\pi V f(p) p^2 dp$.

იპოვეთ ზოგადი გამოსახულება, რომელიც აკავშირებს აირის წნევას ერთეულ მოცულობაში მოთავსებული ნაწილაკთა ენერგიასთან.

ჩათვალეთ, რომ წნევა წარმოიქმნება აირის მოლეკულების ჭურჭლის კედლებთან დაჯახების შედეგად.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.13

განსაზღვრეთ წნევა ელექტრონულ გაზში, როცა $T=0$, ფერმი განაწილების გამოყენებით.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.14

გამოთვალეთ გადაგვარებული ელექტრონული გაზის წნევა შემდეგი პირობით: $\frac{T}{\mu} << 1$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.15

განსაზღვრეთ მდგომარეობების რიცხვი $D(\varepsilon)$, p_F, ε_F ფერმის ენერგია სრულიად გადაგვარებული ელექტრონული გაზისათვის, რომელიც შედგება N ნაწილაკისაგან V მოცულობაში. ნაწილაკის ენერგია დაკავშირებულია იმპულსთან თანაფარდობით $\varepsilon = cp$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.16

მიიღეთ ენერგიის და წნევის გამოსახულება სუსტად გადაგვარებულ ფერმი გაზში.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.17

განიხილეთ ნაწილაკების დაჯახება და გამოიყვანეთ Fფერმი-დირაკის განაწილება პაულის აკრძალვის პრინციპის გამოყენებით.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 9.18

იპოვეთ მდგომარეობის განტოლება რელატივისტური სრულიად გადაგვარებული ელექტრონული გაზისთვის. ენერგია დაკავშირებულია იმპულსთან თანაფარდობით: $\varepsilon^2 = c^2p^2 + m^2c^4$.

ამოცანა # 9.19

იდეალური გაზის მდგომარეობის განტოლებაში გამოითვალეთ პირველი შესწორება გამოწვეული კვანტური სტატისტიკით.

პასუხი

ამოცანა # 9.20

აჩვენეთ, რომ გადაგვარებული ფერმი გაზისათვის, წნევას P, ენერგიასა E და მოცულობას V შორის არსებობს თანაფარდობა:

$$PV = \frac{2}{3}E .$$

ამოცანა # 9.21

იპოვეთ თერმოდინამიკური პოტენციალი, თავისუფალი ენერგია და ენტალპია გადაგვარებული ფერმი გაზის, როცა $T \neq 0$.

პასუხი

ამოცანა # 9.22

იპოვეთ კავშირი წნევას, მოცულობას და ენერგიას შორის იდეალური გაზისათვის, რომელიც ემორჩილება ბოზე-აინშტაინის სტატისტიკას.

პასუხი

ამოცანა # 9.23

ბოზე გაზის ქიმიური პოტენციალი μ განისაზღვრება ტოლობით:

$$\frac{N}{V} = 2\pi(2s+1)(2mkT)^{3/2}h^{-3}\int_0^\infty \frac{\sqrt{z}d}{e^{z-(\mu/kT)}-1},$$ სადაც s ნაწილაკის სპინია და $z = \frac{\varepsilon}{kT}$. განსაზღვრეთ ბოზე კონდენსაციის ენერგია.

პასუხი

ამოცანა # 9.24

მხედველობაში მიიღეთ, რომ როცა $T < T_0$, სადაც T_0 ბოზე კონენსაციის ტემპერატურაა, ბოზონების რიცხვი დადებითი ენერგიებით $(\varepsilon > 0)$ განისაზღვრება განაწილების ფუნქციით:

$$dN(\varepsilon)=\frac{(2S+1)Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}.$$

იპოვეთ ნაწილაკთა რიცხვი, რომელთა ენერგია ნულის ტოლია. ნაწილაკთა სრული რიცხვი ტოლია N-ის.

პასუხი

ამოცანა # 9.25

განსაზღვრეთ სრული ენერგია E და სითბოტევადობა ბოზე გაზის ტემპერატურაზე, რომელიც ნაკლებია მისი ბოზე კონდენსაციის ტენპერატურაზე.

პასუხი

ამოცანა # 9.26

განსაზღვრეთ ტემპერატურაზე დამოკიდებულება ენტროპიის S, წნევის P, თავისუფალი ენერგიის F და თერმოდინამიკული პოტენციალის Φ ბოზე გაზისათვის, ტემპერატურაზე $T<T_0$.

პასუხი

ამოცანა # 9.27

გამოთვალეთ ფოტონური გაზის სითბოტევადობა C_V.

ამოცანა # 9.28

იპოვეთ ფოტონების სრული რიცხვი V მოცულობაში.

პასუხი

ამოცანა # 9.29

პლანკის ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ ფოტონების რიცხვი მოცულობის ერთეულში, რომელთა ტალღის სიგრძე მოთავსებულია ინტერვალში: λ, $\lambda+d\lambda$.

პასუხი

ამოცანა # 9.30

იპოვეთ ფოტონების სრული რიცხვი სიცარიელის მოცულობის ერთეულში, რომელიც გავსებულია წონასწორული სითბური გამოსხივებით $T=300\,K$ ტემპერატურაზე.

პასუხი

ამოცანა # 9.31

იპოვეთ წონასწორული გამოსხივების ფოტონების რიცხვის დამოკიდებულება სრულ ენერგიასა და მოცულობაზე.

პასუხი

10. ფლუქტუაციები

x პარამეტრის ფარდობითი ფლუქტუაცია δ_x განისაზღვრება ტოლობით:

$$\delta_x = \frac{1}{\bar{x}}\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} = \frac{1}{\bar{x}}\sqrt{\overline{(x-\bar{x})^2}}\ ;$$

მაკროსკოპული სისტემის მცირე ფლუქტუაციების ალბათობები აღიწერება გაუსის განაწილებით:

$$dW(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Delta_1|}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta_1}} d(\Delta x),$$

სადაც $\Delta_1 = \dfrac{kT}{\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=x_0}}$,

სადაც x_0 x პარამეტრის წონასწორული მნიშვნელობაა, $u(x)$ – პოტენციური ენერგია, რომლის ცვლილებითაც გამოისახება მუშაობა, როცა სისტემა გადადის წონასწორულ მდგომარეობაში.

ერთგვაროვანი სისტემის მცირე ფლუქტუაციების ალბათობები შეგვიძლია გამოვსახოთ თერმოდინამიკური პარამეტრების ცვლილებით:

$$W \sim \exp\left(\frac{\Delta V\cdot\Delta p - \Delta T\Delta S}{2kT}\right)$$

ამოცანა # 10.1

აჩვენეთ, რომ ადიტიური სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა წონასწორული მდგომარეობიდან ტოლია მისი შემადგენელი ნაწილების წონასწორობის მდგომარეობიდან საშუალო კვადრატული გადახრების ჯამისა.

ამოხსნა

ამოცანა # 10.2

აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ადიტიური სიდიდის ფარდობითი ფლუქტუაცია უკუპროპორციულია კვადრატული ფესვისა სისტემის შემადგენელი ნაწილების რიცხვიდან.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 10.3

გამოსახეთ სისტემის ენერგიის ფარდობითი ფლუქტუაცია, რომელიც ემორჩილება კანონიკურ განაწილებას საშუალო ენერგიითა და ტემპერატურით.

ამოხსნა

ამოცანა # 10.4

გიბსის განაწილების გამოყენებით ნაწილაკთა ცვლადი რიცხვისთვის დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$\overline{(\Delta N)^2} = T\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}.$$

ამოხსნა

ამოცანა # 10.5

იპოვეთ ნაწილაკთა რიცხვის ფლუქტუაცია იდეალური გაზებისათვის: ა) ბოლცმანის; ბ) ფერმი-დირაკის; 3) ბოზე-აინშტაინის.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 10.6

განიხილეთ იდეალური გაზი, როგორც მთელი და ჩათვალეთ, რომ სამართლიანია ენერგიის თანაბრად განაწილების კანონი თავისუფლების ხარისხებზე. აჩვენეთ, რომ გაზის ენერგიის ფარდობითი

ფლუქტუაცია უკუპროპორციულია $\sqrt{N}$, სადაც N ნაწილაკთა რიცხვია.

ამოხსნა

ამოცანა # 10.7

იპოვეთ ენერგიის ფლუქტუაცია ორდონიან სისტემაში.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 10.8

იპოვეთ ენერგიის ფარდობითი ფლუქტუაცია იდეალური გაზისათვის ულტრარელატივისტურ შემთხვევაში, როცა ერთი ნაწილაკის ენერგია დაკავშირებულია იმპულსთან თანაფარდობით: $\varepsilon = cp$.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 10.9

განსაზღვრეთ ენტროპიის კლება, რომელიც აღიძვრება მათემატიკური ქანქარას ფლუქტუაციური რხევების დროს.

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 10.10

იპოვეთ იდეალური გაზის ნაწილაკთა სიმკვრივის კორელაცია: $\overline{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}$

ამოხსნა პასუხი

ამოცანა # 10.11

გამოთვალეთ იდეალური გაზის მასათა ცენტრის ფლუქტუაცია.

ამოცანა # 10.12

გამოთვალეთ მასათა ცენტრის ფლუქტუაცია ერთგვაროვანი იდეალური გაზისა, რომელიც მოთავსებულია R რადიუსის სფერულ ჭურჭელში.

პასუხი

ამოცანა # 10.13

გამოთვალეთ იდეალური გაზის მასათა ცენტრის z კოორდინატის ფლუქტუაცია, თუ გაზი იმყოფება ცილინდრში, რომლის სიმაღლეა h და ფუძის ფართობი S და გაზი იმყოფება მიზიდულობის ველში, რომელიც მიმართულია z ღერძის გასწვრივ.

პასუხი

ამოცანა # 10.14

აჩვენეთ, რომ დიდი კანონიკური ანსამბლისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\overline{\Delta H^2} = k\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{\overline{N}} + \overline{\Delta N^2}\left(\frac{\partial E}{\partial \overline{N}}\right)_T^2 .$$

ამოცანა # 10.15

იპოვეთ სარკული გალვანომეტრის მგრძნობიარობის ზღვარი, როდესაც გალვანომეტრის ძაფის დრეკადობის მოდულია α.

პასუხი

ამოცანა # 10.16

იპოვეთ ზამბარიანი სასწორის მგრძნობიარობის ზღვარი, ანუ ის უმცირესი მასა, რომელიც შეგვიძლია ავწონოთ ასეთი სასწორით.

ამოცანა # 10.17

განსაზღვრეთ იზობარული გაზის თერმომეტრის მგრძნობიარობის ზღვარი, რომელიც გამოწვეულია ფლუქტუაციებით. გაზი ჩათვალეთ იდეალურად. ნაწილაკთა რიცხვი მიიღეთ ტოლად: $N = 10^{22}$.

პასუხი

ამოცანა # 10.18

იპოვეთ ვერტიკალურად ჩამოკიდებული მათემატიკური ქანქარას საშუალო კვადრატული ფლუქტუაციური გადახრა. ქანქარას სიგრძეა l, მასა – m, თავისუფალი ვარდნის აჩქარება – g.

ამოცანა # 10.19

წვრილ კვარცის ძაფზე ჩამოკიდებულია მსუბუქი სარკე. ძაფის გრეხის მოდულია $K = 10^{-6}$ ერგ/ რად^2. იპოვეთ მგრძნობიარობის

ზღვარი მობრუნების φ კუთხის მიმართ, თუ გარემოს ტემპერატურაა $300\,K$.

ამოცანა # 10.20

იპოვეთ დაჭიმული სიმის წერტილების საშუალო კვადრატული ფლუქტუაციური გადახრა.

პასუხი

ამოცანა # 10.21

განსაზღვრეთ სიმის სხვადასხვა წერტილების ფლუქტუაციური გადახრების ნამრავლის საშუალო მნიშვნელობა.

ამოცანა # 10.22

იპოვეთ ენერგიის საშუალო კვადრატული ფლუქტუაცია. დამოუკიდებელ ცვლადებად აიღეთ V და T.

პასუხი

ამოცანა # 10.23

იპოვეთ $\overline{\Delta T \Delta P}$. დამოუკიდებელ ცვლადებად აიღეთ V და T.

პასუხი

ამოცანა # 10.24

იპოვეთ $\overline{\Delta V \Delta P}$. დამოუკიდებელ ცვლადებად აიღეთ V და T.

პასუხი

ამოცანა # 10.25

იპოვეთ $\overline{\Delta S \Delta V}$. დამოუკიდებელ ცვლადებად აიღეთ V და T.

პასუხი

ამოცანა # 10.26

იპოვეთ $\overline{\Delta S \Delta T}$. დამოუკიდებელ ცვლადებად აიღეთ V და T.

პასუხი

ამოცანა # 10.27

აჩვენეთ, რომ $\overline{\Delta S^2} = kC_p$, $\overline{\Delta S \Delta P} = 0$. იპოვეთ $\overline{\Delta P^2}$.

პასუხი

ამოცანა # 10.28

იპოვეთ იდეალური ბოზე გაზის ფარდობითი ფლუქტუაცია, როცა $\mu \neq 0$.

პასუხი

ამოცანა # 10.29

იპოვეთ $\overline{\Delta N^2}$ ელექტრონული გაზისათვის ტემპერატურებზე, რომელიც მცირეა გადაგვარების ტემპერატურასთან შედარებით.

პასუხი

11. ამოხსნები

ამოცანა # 1.1

პოტენციური ორმოს პოტენციური ენერგია ასე შეიძლება წარმოვად-გინოთ:

$U(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a,\\ \infty, & x<0,\ x>a\end{cases}$, ვინაიდან ორმოს შიგნით ძალები არ მოქმე-დებენ, ნაწილაკი მოძრაობს თანაბრად. თუ ნაწილაკის სიჩქარეა v, მა-შინ dx შუალედს ის გაივლის $dt=\frac{dx}{v}$ დროში. ორმოს ერთი კიდიდან მეორემდე გავლას ის მოანდომებს $\tau=\frac{a}{v}$ დროს. ამიტომ ალბათობის განაწილებისათვის შეგვიძლია დავწეროთ: $dw=\frac{dt}{\tau}=\frac{dx}{a}$.

ალბათობათა განაწილების ფუნქცია უკვე არის ნორმირებული:

$$\int_0^a dw=\int_0^a\frac{dx}{a}=1.$$

ამოცანა # 1.2

ერთგანზომილებიან პარაბოლურ პოტენციალს აქვს სახე:

$$U(x)=\frac{kx^2}{2},$$

სადაც x არის გადახრა წონასწორობის მდებარეობიდან, ხოლო k – სი-ხისტე. როგორც ვიცით, შესაბამისი მოძრაობის განტოლება არის $\ddot{x}+v_0^2x=0,\ v_0=(k/m)^{1/2}$ არის საკუთარი სიხშირე, m – მასა, იგი წარ-მოადგენს ჰარმონიული რხევის განტოლებას. თუ საწყის პირობად ავი-ღებთ $x(0)=-a,\ \dot{x}(0)=0,$ მაშინ ადვილად შევამოწმებთ, რომ ამოხსნას ექნება სახე:

$$x=-a\cos v_0 t,$$

$[x,x+dx]$ შუალედში მოხვედრის ალბათობა იქნება $dw=\frac{dt}{T}$, სადაც $T=2\pi/v_0$ - არის ქანქარის რხევის პერიოდი. კავშირი dt-სა და dx-ს შორის არის $dt=\frac{2dx}{v}$. მამრავლი 2 შემოღებულია იმის გამო, რომ პერიოდის განმავლობაში ნაწილაკი ორჯერ გაივლის dx შუალედს. v-სიჩქარისთვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$v=\dot{x}=v_0a\sin v_0t=v_0\sqrt{a^2-a^2\cos v_0t}=v_0\sqrt{a^2-x^2}$$

ალბათობისათვის მივიღებთ: $dw=\frac{2dx}{Tv_0\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{dx}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$. ადვი-ლად შევამოწმებთ, რომ იგი ნორმირებულია: $\int_0^a dw=1$.

ამოცანა # 1.3

აღვნიშნოთ ნორმირების კოეფიციენტი C-თი. მაშინ გვექნება:

$$\int_0^a\int_0^b dw(x,y)=\int_0^a\int_0^b Cxydxdy=C\int_0^a xdx\int_0^b ydy=C\frac{a^2b^2}{4}=1.$$

აქედან, $C=\dfrac{4}{a^2b^2}$.

საბოლოოდ, ალბათობისათვის მივიღებთ: $dw=\dfrac{4}{a^2b^2}xydxdy$.

ამოცანა # 1.8

მოვახდინოთ x-ით განაწილების ნორმირება:

$$1=\int_0^\infty dw(x)=c\int_0^\infty \exp(-\alpha x)dx=\frac{c}{\alpha},\quad c=\alpha,\quad dw(x)=\alpha e^{-\alpha x}dx.$$

განაწილების ფუნქცია $dw(y)$ იქნება:

$dw(y)=2\alpha e^{-\alpha y^2}ydy$. შევამოწმოთ ნორმირების პირობა: $\int w(y)dy=1$.

$$1=2\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}ydy=\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy^2=\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=1$$

ამოცანა # 1.9

ალბათობა იმისა, რომ x ცვლადი ღებულობს მნიშვნელობებს $[x, x+dx]$ ინტერვალში, პროპორციული იქნება dx-ის. $dw = cdx$ პროპორციულობის კოეფიციენტი განისაზღვრება ნორმირების პირობიდან: $1 = \int dw = c\int_a^b dx = c(b-a)$. საიდანაც $c = (b-a)^{-1}$, ხოლო ალბათობისათვის $dw(x) = \dfrac{dx}{b-a}$. გამოვთვალოთ საშუალო სიდიდეები $\overline{x}$ და $\overline{x^2}$:

$$\overline{x} = \int_a^b dw(x)x = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$\overline{x^2} = \int_a^b dw(x)x^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

აქედან საშუალო კვადრატული გადახრა:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x-\overline{x})^2} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

ამოცანა # 1.11

ერთი ხუთიანის მოსვლის ალბათობაა $w(5) = 1/6$. იმის ალბათობა, რომ ორივეჯერ მოვა ხუთი ქულა ალბათობების გამრავლების წესის თანახმად არის: $w(5)\cdot w(5) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$.

ამოცანა # 1.12

ორივე კამათელზე ქულათა მოსვლის ყველა შესაძლო რიცხვი არის 36. Aაქედან ათი ქულის მოსვლას ხელს უწყობს სამი შემთხვევა: როცა პირველზე მოვა - 4 ქულა, მეორეზე – 6; პირველზე - 5, მეორეზე – 5; პირველზე - 6, მეორეზე - 4. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

ამოცანა # 1.15

რადგანაც $ax^2+2bxy+cy^2=a\left(x+\frac{by}{a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)y^2$. ამიტომ ჯერ ვაინტეგროთ x-ით, შემდეგ y-ით:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dxdye^{-(ax^2+2bxy+y^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dxdye^{-\left(a\left(x+\frac{by}{a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)y^2\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(c-\frac{b^2}{a}\right)y^2}dy=\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}.$$ ამ ინტეგრალის კრებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $ac>b^2$.

ამრიგად, გაუსის განაწილება ორი ცვლადისათვის დაიწერება შემდეგნაირად:

$$dW(x,y)=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy.$$

$$\overline{x^2}=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy=$$

$$=-\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy=$$

$$=-\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}=\frac{c}{2\left(ac-b^2\right)}.$$

ანალოგიურად:

$$\overline{y^2}=\frac{a}{2\left(ac-b^2\right)},\quad \overline{xy}=-\frac{b}{2\left(ac-b^2\right)}.$$

ამოცანა # 1.16

ალბათობა იმისა, რომ v მოცულობაში იმყოფება ერთი მოლეკულა, ტოლია: $p=\dfrac{v}{V}$. ალბათობა იმისა, რომ ამ მოცულობაში იმყოფება n მოლეკულა, ხოლო დანარჩენი $N-n$ იმყოფება ჭურჭლის დარჩენილ $V-v$ მოცულობაში, ტოლია: $p^n(1-p)^{N-n}$. შესაძლებლობათა რიცხვი, რომ n ნებისმიერი მოლეკულა შეიძლება იყოს ამორჩეული მოლეკულათა სრული რიცხვიდან, ტოლია: $\dfrac{N!}{n!(N-n)!}$, ამიტომ ალბათობა იმისა, რომ v მოცულობაში იმყოფება n ნებისმიერად არჩეული მოლეკულა ტოლია:

$$W_N(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{v}{V}\right)^n\left(1-\frac{v}{V}\right)^{N-n}.$$

ზღვრულ შემთხვევაში, როცა $N>>n$ ხარისხის მაჩვენებელში, შეგვიძლია უგულებელვყოთ n N-თან შედარებით, გარდა ამისა, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$W_N(n)=\frac{N(N-1)(N-2)...(N-n+1)}{n!}(p)^n(1-p)^N\cong\frac{N^n}{n!}(p)^n(1-p)^N.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\bar{n}=pN$, მაშინ მივიღებთ:

$$W_N(n)\cong\frac{(\bar{n})^n}{n!}\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^N,$$ ზღვარში მივიღებთ:

$$W(n)=\lim_{N\to\infty}W_N(n)=\frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!}$$ (პუასონის განაწილება).

ამოცანა # 1.18

ავღნიშნოთ $P_n(t)$-თი იმის ალბათობა, რომ t დროში ამოიტყორცნება n ელექტრონი. მაშინ ალბათობა იმისა, რომ $t+dt$ დროში ამოიტყორცნება n ელექტრონი იმის გათვალისწინებით, რომ ელექტრონების ამოტყორცნა სტატისტიკურად დამოუკიდებელი მოვლენაა ტოლია:

$$P_n(t+dt)=P_n(t)(1-P_1)+P_{n-1}(t)P_1,$$

$P_n(t)(1-P_1)$ იმის ალბათობაა, რომ t დროში ამოიტყორცნა n ელექტრონი და dt დროში არცერთი ელეტრონი.

$P_{n-1}(t)P_1$ იმის ალბათობა, რომ t დროში გამოიტყორცნა $n-1$ ელექტრონი და dt დროში კიდევ ერთი ერთი ელექტრონი.

P_1 არის dt დროში ერთი ელექტრონის ამოტყორცნის ალბათობა, $P_1=\lambda dt$.

გარდა ამისა, $P_0(t+dt)=P_0(t)(1-P_1)$. ამრიგად, მივიღებთ:

$$\begin{cases}P_n(t+dt)=P_n(t)(1-P_1)+P_{n-1}(t)P_1,\\ P_0(t+dt)=P_0(t)(1-P_1).\end{cases}$$

ჩავსვათ $P_1=\lambda dt$ გამოსახულება:

$$\begin{cases}P_n(t+dt)=P_n(t)(1-\lambda dt)+P_{n-1}(t)\lambda dt,\\ P_0(t+dt)=P_0(t)(1-\lambda dt).\end{cases}$$

აქედან,

$$\begin{cases}\dfrac{P_n(t+dt)-P_n(t)}{dt}=\lambda\left(P_{n-1}(t)-P_n(t)\right),\\ \dfrac{P_0(t+dt)-P_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t).\end{cases}$$

შედეგად, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases}\dfrac{dP_n(t)}{dt}=\lambda\left(P_{n-1}(t)-P_n(t)\right),\\ \dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t).\end{cases}$$

ამას უნდა დავუმატოთ სასაზღვრო პირობები:

$$P_n(0)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

მაშინ $P_0(t)=e^{-\lambda t}$.

როცა $n=1$, მაშინ $\frac{dP_1(t)}{dt}+\lambda P_1(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, რომლის ამონახსნია $P_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$,

როცა $n=2$, მაშინ $\frac{dP_2(t)}{dt}+\lambda P_2(t)=\lambda^2 t e^{-\lambda t}$, რომლის ამონახსნია $P_2(t)=\frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}$.

საზოგადოდ, $P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$ (პუასონის განაწილება).

ვიპოვოთ ელექტრონთა საშუალო რიცხვი, რომელიც გამოიტყორცნება t დროში:

$$\bar{n}=\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}(\lambda t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=e^{-\lambda t}(\lambda t)e^{\lambda t}=\lambda t.$$

შედეგად, პუასონის განაწილება შემდეგნაირად დაიწერება:

$$P_n(t)=\frac{(\bar{n})^n}{n!}e^{-\bar{n}}.$$

ამოცანა # 1.19

რადგან $\overline{\Delta n^2}=\overline{n^2}-\bar{n}^2$, წინა ამოცანის თანახმად $\bar{n}=\lambda t$.

$$\overline{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}e^{-\lambda t}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1+1)\frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}\right)=$$

$$=e^{-\lambda t}\left((\lambda t)^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}+(\lambda t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)=$$

$$=e^{-\lambda t}\left((\lambda t)^2 e^{\lambda t}+(\lambda t)e^{\lambda t}\right)=(\lambda t)^2+(\lambda t).$$

აქედან $\overline{\Delta n^2}=\overline{n^2}-\bar{n}^2=(\lambda t)^2+(\lambda t)-(\lambda t)^2=\lambda t$.

რადგანაც $\bar{n}=\lambda t$, ამიტომ $\lambda=n_0$.

აქედან $\overline{\Delta n^2}=n_0 t$.

ამოცანა # 1.21

მითითება: თუ ხდება n ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი მოვლენა და ამ მოვლენიდან A მოვლენის მოხდენის ალბათობა არის p, მაშინ იმის ალბათობა, რომ n მოვლენიდან k-ჯერ მოხდება A მოვლენა, განისაზღვრება ბინომიალური, ანუ ბერნულის განაწილებით:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^k$$

ამოცანა # 2.1

მოძრაობის განტოლება $p = mv_0 = const$.

ამოცანა # 2.2

მოძრაობის განტოლებებია $x = x_0 + \dfrac{p_0}{m}t, \quad p = p_0$.

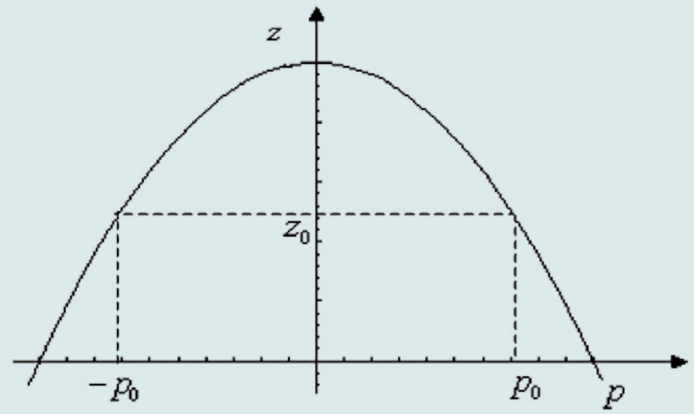
შევამოწმოთ გარდასახვის იაკობიანი:

$$D(t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial p_0} & \dfrac{\partial p}{\partial x_0} \\ \dfrac{\partial x}{\partial p_0} & \dfrac{\partial x}{\partial x_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t/m & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

რადგან იაკობიანი $D(t) = 1$ არ არის დროზე დამოკიდებული და ავტომატურად უდრის ერთს, ლიუვილის თეორემა დაცულია.

ამოცანა # 2.3

ენერგიის მუდმივობის კანონის გამოყენებით მივიღებთ განტოლებას ფაზური ტრაექტორიისათვის: $\dfrac{p_0^2}{2m} + mgz_0 = \dfrac{p^2}{2m} + mgz$, რომლის შესაბამისი მრუდი წარმოადგენს პარაბოლას (იხ. ნახ. 2).



ნახ2

ამოცანა # 2.4

1) მოძრაობის განტოლების $\Rightarrow \dot{p} = -\mu\dot{q} \Rightarrow p - p_0 = -\mu(q - q_0)$, ფაზური ტრაექტორია წარმოადგენს წრფეს, რომელიც გადის (p_0, q_0) წერტილში და მისი დახრის კუთხის ტანგენსია $-\dfrac{1}{\mu}(tg\alpha = -\mu)$. ვნახოთ, სრულდება თუ არა ლიუვილის თეორემა

$$m\frac{dq}{dt} = -\mu q, \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{\mu}{m}dt, \Rightarrow \ln q = -\frac{\mu}{m}t + C, \Rightarrow q = q_0 e^{-\frac{\mu}{m}t},\ p = -\frac{\mu}{m}q_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} = p_0 e^{-\frac{\mu}{m}t}.$$

$$D(t) = \begin{vmatrix} \partial q/\partial q_0 & \partial q/\partial p_0 \\ \partial p/\partial q_0 & \partial p/\partial p_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^{-\frac{\mu}{m}t} \Rightarrow$$ იაკობიანი დროზეა დამოკიდებული $D(t \to \infty) \to 0$, ლიუვილის თეორემა არ სრულდება. არც უნდა სრულდებოდეს, რადგან სისტემა არ არის კონსერვატული, იგი დისიპაციურია.

2) $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $(\gamma << \omega_0)$ ამოხსნა $\Rightarrow x(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)e^{-\frac{\gamma t}{2}}$

$$mv = p \,\Box\, (-Am\omega_0 \sin\omega_0 t + m\omega_0 B\cos\omega_0 t)e^{-\frac{\gamma t}{2}},$$

$$x = -(x_0\cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega}\sin\omega t)e^{-\frac{\gamma t}{2}}, \quad p = -(x_0 m\omega_0 \sin\omega t + p_0\cos\omega t)e^{-\frac{\gamma t}{2}},$$

იმიტომ, რომ $A = x_0 = x(t=0)$, $p(t=0) = p_0 = m\omega_0 B$,

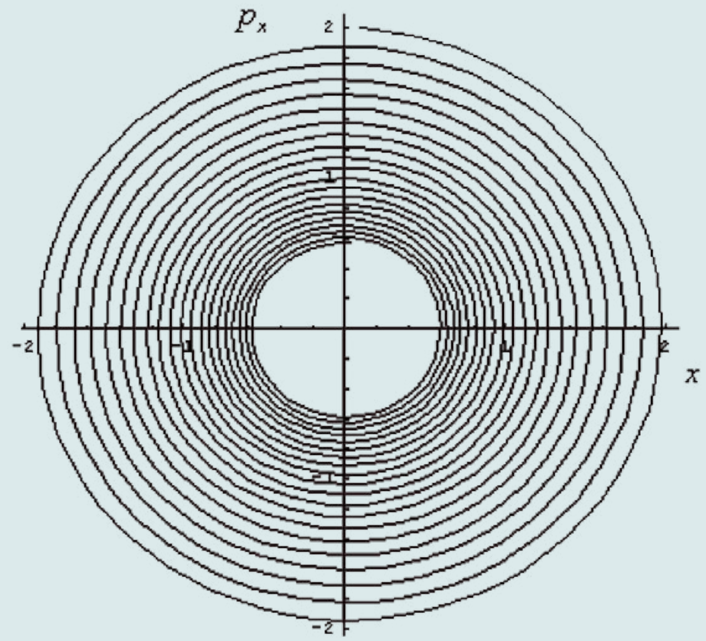
$$D(t) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial x_0 & \partial x/\partial p_0 \\ \partial p/\partial x_0 & \partial p/\partial p_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\omega_0 t & \dfrac{\sin\omega_0 t}{m\omega_0} \\ -m\omega_0\sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t \end{vmatrix} e^{-\frac{\gamma t}{2}} = e^{-\frac{\gamma t}{2}}.$$

ლიუვილის თეორემა არ სრულდება, ფაზური მოცულობის ელემენტი $\to 0$.

$\Gamma(t) = e^{-\gamma t}\Gamma(0)$, $\Gamma(\infty) \to 0$.

შეიძლება შევამოწმოთ ტოლობა

$\left(\dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}\right) = \left(\dfrac{p_0^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 x_0^2}{2}\right)e^{-\gamma t}$. მივიღეთ ელიფსური სპირალის განტოლება (იხ. **ნახ. 3**)



ნახ. 3

ამოცანა # 2.5

გამოვიყენოთ იმპულსისა და ენერგიის შენახვის კანონები:

$$\begin{cases} p_1' + p_2' = p_1 + p_2, \\ \dfrac{p_1'^2}{2m_1} + \dfrac{p_2'^2}{2m_2} = \dfrac{p_1^2}{2m_1} + \dfrac{p_2^2}{2m_2} \end{cases}$$

ჩავატაროთ გარდაქმნები:

$$\begin{cases} p_1' - p_1 = -(p_2' - p_2), \\ m_2(p_1'^2 - p_1^2) = -m_1(p_2'^2 - p_2^2), \end{cases} \qquad (*)$$

მეორე განტოლება გავყოთ პირველზე, მივიღებთ:

$$m_2(p_1' + p_1) = m_1(p_2' + p_2)\,. \qquad (**)$$

(*)-ის პირველი განტოლება გავამრავლოთ m_2-ზე და მივუმატოთ და გამოვაკლოთ (**) განტოლებას, შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{cases} 2m_2 p_1' = (m_1 - m_2)p_2' + (m_1 + m_2)p_2 \\ 2m_2 p_1 = (m_1 + m_2)p_2' + (m_1 - m_2)p_2 \end{cases}, \quad (1)$$

აქედან მივიღებთ:

$$p_2' = \frac{2m_2 p_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_2\,,$$

$$p_1' = \frac{m_1 - m_2}{2m_2} p_2' + \frac{m_1 + m_2}{2m_2} p_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{2(m_1 + m_2)m_2} p_2 + \frac{m_1 + m_2}{2m_2} p_2 =$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 - \frac{(m_1 - m_2)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2(m_1 + m_2)} p_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 - \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} p_2\,.$$

აქედან:

$$D = \frac{\partial(q_1', q_2', p_1', p_2')}{\partial(q_1, q_2, p_1, p_2)} = (\partial q_i' / \partial q_j = \delta_{ij},\ \partial p_i' / \partial q_j = 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial p_1'/\partial p_1 & \partial p_1'/\partial p_2 \\ 0 & 0 & \partial p_2'/\partial p_1 & \partial p_2'/\partial p_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} & \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} \\ \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} & -\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{vmatrix} = -\frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = -\frac{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 + 4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = -1.$$

$$|D| = 1.$$

ამოცანა # 2.6

აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახების შემდეგ ბურთულები მოძრაობენ ერთად. ამიტომ ფაზური სივრცის მოცულობა ორჯერ მცირდება:

$$D = \begin{vmatrix} \partial q_1'/\partial q_1 & \partial q_1'/\partial q_2 & \partial q_1'/\partial p_1 & \partial q_1'/\partial p_2 \\ \partial q_2'/\partial q_1 & \partial q_2'/\partial q_2 & \partial q_2'/\partial p_1 & \partial q_2'/\partial p_2 \\ \partial p_1'/\partial q_1 & \partial p_1'/\partial q_2 & \partial p_1'/\partial p_1 & \partial p_1'/\partial p_2 \\ \partial p_2'/\partial q_1 & \partial p_2'/\partial q_2 & \partial p_2'/\partial p_1 & \partial p_2'/\partial p_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$ რადგან დაჯახების შემდეგ $q_1' = q_2'$ და $p_1' = p_2'$, დეტერმინანტში წარმოიქმნება ორი ერთნაირი სტრიქონი, რის გამოც $D = 0$, ე.ი. ფაზური მოცულობა არ ინახება. ლიუვილის თეორემა არ სრულდება.

ამოცანა # 3.1

$$dw=\frac{1}{Z}\frac{2\pi}{\omega}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}d\varepsilon\,,\quad Z=\frac{2\pi}{\omega}\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}d\varepsilon=\frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{kT},\quad dw=\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{kT}.$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\int_0^\infty \varepsilon\cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}d\varepsilon}{kT}=-\int_0^\infty \varepsilon\cdot de^{-\frac{\varepsilon}{kT}}=-\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}d\varepsilon=-kTe^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\Big|_0^\infty=kT.$$

ამოცანა # 3.2

ა) გიბსის მიკროკანონიკური განაწილება განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\rho(H)=\dfrac{\delta\left(H(p_i,q_i)-E\right)}{\Omega(E)}$, სადაც $H(p_i,q_i)$ სისტემის ჰამილტონიანია, E სისტემის ენერგია, $\Omega(E)=\dfrac{\partial\Gamma(E)}{\partial E}$, სადაც $\Gamma(E)=\int\limits_{H(p_i,q_i)\le E}\ldots\int d^N p d^N q$ ფაზური მოცულობაა, რომელიც სისტემას უკავია, აქ $H(p_i,q_i)=E$, ზედაპირია, რომელიც ფაზურ სივრცეში ჩვენი სისტემის ფაზურ მოცულობას შემოსაზღვრავს.

ინტეგრირება კოორდინატებით შეგვიძლია პირდაპირ მოვახდინოთ. მაშინ მივიღებთ:

$\Gamma(E)=\int\limits_{H(p_i,q_i)\le E}\ldots\int d^N p d^N q=V^N\int\limits_{H(p_i)\le E}d^N p$, რადგან ჩვენი სისტემა წარმოადგენს გაზს, რომელიც შედგება N ნაწილაკისაგან, ამიტომ მისი ჰამილტონიანი $H(p_i,q_i)=\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{p_i^2}{2m}=E$, აქედან $\sum\limits_{i=1}^{N}p_i^2=2mE$, რადგანაც სისტემის თითოეულ ნაწილაკს აქვს იმპულსის სამი მდგენელი და სულ გვაქვს N ნაწილაკი, ამიტომ ამოცანა დადის $3N$ განზომილების სფეროს მოცულობის გამოთვლაზე, რომლის რადიუსი $R=\sqrt{2mE}$.

n-აგნზომილებაინი სფეროს განტოლებაა: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=R^2$, ჩვენი მიზანია გამოვთვალოთ ამ სფეროს მოცულობა.ცხადია, რომ $V_n\sim R^n$, ანუ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ $V_n=C_nR^n$. სადაც C_n მუდმივია.

C_n მუდმივის განსასაზღვრად მოვიქცეთ შემდეგნაირად. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int\limits_0^\infty e^{-r^2}dV_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2\right)}dx_1dx_2\ldots dx_n$, ორნაირად.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2\right)}dx_1dx_2\ldots dx_n=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^n=\pi^{n/2},$$ რადგან

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\,.$$

რაც შეეხება მარცხენა მხარეს:

$$\int_0^\infty e^{-r^2}dV_n = nC_n\int_0^\infty e^{-r^2}r^{n-1}dr = \left[r^2=y\right] = \frac{nC_n}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^{(n-1)/2}\cdot y^{-1/2}dy = \frac{nC_n}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{n}{2}-1}dy = \frac{nC_n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

აქედან $\frac{nC_n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\pi^{n/2}$, $C_n=\frac{2\cdot\pi^{n/2}}{n\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

საბოლოოდ მივიღებთ: $V_n=\frac{\pi^{n/2}\cdot R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

როცა $n=1$, მაშინ $V_1=\frac{\sqrt{\pi}R}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{\pi}R}{\sqrt{\pi}}=2R$,

როცა $n=2$ $V_2=\frac{2\pi R^2}{2\Gamma(1)}=\pi R^2$,

$n=3$, $V_3=\frac{2\pi^{3/2}R^3}{3\Gamma(3/2)}=\frac{2\pi^{3/2}R^3}{3\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}=\frac{4}{3}\pi R^3$ და ასე შემდეგ.

თუ გამოვიყენებთ მიღებულ ფორმულას, მაშინ ფაზური მოცულობისთვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$\Gamma(E)=\frac{(2mE)^{3N/2}\pi^{3N/2}V^N}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)},$$ საიდანაც

$$\Omega(E)=\frac{\partial\Gamma(E)}{\partial E}=\frac{(2m)^{3N/2}E^{3N/2-1}\frac{3N}{2}\cdot\pi^{3N/2}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}.$$

აქედანGგიბსის მიკროკანონიკური განაწილება N-ატომიანი იდეალური გაზისთვის ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\rho(H)=\delta(H-E)\cdot\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)\cdot E^{1-\frac{3N}{2}}\cdot\frac{2}{3N}\cdot\frac{V^N}{(2m)^{3N/2}\cdot\pi^{3N/2}}.$$

ბ) N ცალი ჰარმონიული ოსცილატორისაგან:

N ცალი ჰარმონიული ოსცილატორის ენერგია ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$E=\frac{P_1^2+\omega^2m^2q_1^2}{2m}+\frac{P_2^2+\omega^2m^2q_2^2}{2m}+\ldots+\frac{P_N^2+\omega^2m^2q_N^2}{2m},$$

გამოვთვალოთ მისი ფაზური მოცულობა

$\Gamma(E)=\int\ldots\int dq^N dP^N$, სადაც ინტეგრირება ხდება $\frac{P_1^2+\omega^2m^2q_1^2}{2m}+\frac{P_2^2+\omega^2m^2q_2^2}{2m}+\ldots+\frac{P_N^2+\omega^2m^2q_N^2}{2m}\le E$ არით, თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს:

$x_i=\omega m q_i$ $i=1,2,\ldots N$ მაშინ მივიღებთ, რომ:

$E=\frac{P_1^2+x_1^2}{2m}+\frac{P_2^2+x_2^2}{2m}+\ldots+\frac{P_N^2+x_N^2}{2m}$, ეს კი განსაზრვრავს $2N$-გან-ზომილებიან სფეროს, რომლის რადიუსი $R=\sqrt{2mE}$, ამიტომ ფაზური მოცულობისათვის მივიღებთ:

$$\Gamma(E)=\frac{1}{(\omega m)^N}\cdot V_{2N}\left(\sqrt{2mE}\right)=\frac{1}{(\omega m)^N}\cdot\frac{(2mE)^N\cdot\pi^N}{\Gamma(N+1)}=E^N\cdot\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\frac{1}{N!},$$

საიდანაც $\Omega(E)=\frac{\partial\Gamma(E)}{\partial E}=NE^{N-1}\cdot\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\frac{1}{N!}=E^{N-1}\cdot\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\frac{1}{(N-1)!}$,

აქედან გიბსის კანონიკური განაწილებისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$\rho(H)=\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^N(N-1)!\,\delta(H-E)\cdot E^{1-N}.$$

ამოცანა # 3.4

$$\overline{E^n}=\frac{\int E^n\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)d\Gamma}{\int\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)d\Gamma}=\frac{\int E^n\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial E}dE}{\int\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial E}dE}=\frac{\int E^n\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\Omega(E)dE}{\int\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\Omega(E)dE}$$

$\Omega(E)$ ერთატომიანი იდეალური გაზისათვის წინა ამოცანაში ნა-პოვნი გვაქვს: $\Omega(E)=\frac{\partial\Gamma(E)}{\partial E}=\frac{(2m)^{3N/2}E^{3N/2-1}\frac{3N}{2}\cdot\pi^{3N/2}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}$.

თუ ამას ჩავსვავთ $\overline{E^n}$ გამოსახულებაში, მაშინ მივიღებთ:

$$\overline{E^n}=\frac{\int_0^\infty E^{\frac{3N}{2}+n-1}e^{-\frac{E}{kT}}dE}{\int_0^\infty E^{\frac{3N}{2}-1}e^{-\frac{E}{kT}}dE}=\frac{(kT)^n\cdot\Gamma\left(\frac{3N}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)},$$

აქ გამოყენებულია $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx,\ \alpha>0$, ფუნქციის განმარტება.

დავთვალოთ ახლა $\alpha=\sqrt{\overline{\left(E-\overline{E}\right)^2}}$.

$$\overline{\left(E-\overline{E}\right)^2}=\overline{E^2}-\left(\overline{E}\right)^2,$$

$$\overline{E^2}=\frac{(kT)^2\cdot\Gamma\left(\frac{3N}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}=\frac{(kT)^2\cdot\left(\frac{3N}{2}+1\right)\cdot\frac{3N}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}=(kT)^2\cdot\left(\frac{3N}{2}+1\right)\cdot\frac{3N}{2},$$

$$\overline{E}=\frac{(kT)^2\cdot\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}=\frac{(kT)^2\cdot\frac{3N}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}=(kT)^2\cdot\frac{3N}{2}.$$

Aაქედან:

$$\overline{\left(E-\overline{E}\right)^2}=\overline{E^2}-\left(\overline{E}\right)^2=(kT)^2\cdot\left(\frac{3N}{2}+1\right)\cdot\frac{3N}{2}-(kT)^2\cdot\left(\frac{3N}{2}\right)^2=(kT)^2\cdot\frac{3N}{2}.$$

ამიტომ:

$$\alpha=\sqrt{\overline{\left(E-\overline{E}\right)^2}}=kT\sqrt{\frac{3N}{2}}.$$

$$\delta=\frac{\alpha}{\overline{H}}=\frac{kT\sqrt{\frac{3N}{2}}}{kT\cdot\frac{3N}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3N}}.$$

ამოცანა # 3.5

იდეალური გაზისათვის მისი სრული ენერგია შემადგენელი ნაწილაკების ენერგიების ჯამის ტოლია, $E=\sum_{i=1}^{N}E_i$ ამიტომ იდეალური გაზის თავისუფალი ენერგია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$F=-T\ln Z(T)$, სადაც

$$Z\left(T\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left[-\frac{E\left(p_i,q_i\right)}{kT}\right]d^N pd^N q=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N}E\left(p_i,q_i\right)}{kT}\right]d^N pd^N q=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{E_1\left(p_1,q_1\right)}{kT}\right]dp_1dq_1\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{E_N\left(p_N,q_N\right)}{kT}\right]dp_Ndq_N=$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{E_1\left(p_i,q_i\right)}{kT}\right]dp_idq_i\right)^N=V^N\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{E_1\left(p_i\right)}{kT}\right]dp_i\right)^N=V^N\cdot\left(Z_i\left(T\right)\right)^N$$

რადგანაც ენერგია არ არის დამოკიდებული კოორდინატზე და დამოკიდებულია მხოლოდ იმპულსზე.

$$Z_i\left(T\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{E_i\left(p_i\right)}{kT}\right]dp_i=f(T),$$ აქედან

$$F\left(T\right)=-T\ln\left(Z\left(T\right)\right)=-T\ln V^N\cdot\left(f\left(T\right)\right)^N=-TN\ln V-TN\ln f(T),$$

აქედან წნევისათვის მივიღებთ:

$p=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T=\frac{TN}{V}$, რადგანაც გაზი იდეალურია.

გამოვთვალოთ ახლა $f(T)$.

$f\left(T\right)=4\pi\int_0^{\infty}e^{-\frac{E(P)}{T}}\cdot p^2dp=4\pi\int_0^{\infty}e^{-\frac{ap^l}{T}}\cdot p^2dp$, აქ აღებულია $k=1$.

გავაკეთოთ ჩასმა: $x=p^l$, $p=x^{1/l}$, $dp=\frac{1}{l}x^{\frac{1}{l}-1}dx$, მაშინ მივიღებთ:

$$f(T)=\frac{4\pi}{l}\int_0^{\infty}e^{-\frac{ax}{T}}\cdot x^{\frac{3}{l}-1}dx=\left(y=\frac{ax}{T},x=\frac{Ty}{a}\right)=$$

$$=\frac{4\pi}{l}\left(\frac{T}{a}\right)^{3/l}\cdot\int_0^{\infty}e^{-y}y^{\frac{3}{l}-1}dy=\frac{4\pi}{l}\left(\frac{T}{a}\right)^{3/l}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{l}\right).$$

$$F\left(T\right)=-T\ln\left(Z\left(T\right)\right)=-TN\ln V-TN\ln f(T)=$$

$$=-TN\ln V-TN\ln\frac{4\pi}{l}\left(\frac{T}{a}\right)^{3/l}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{l}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial T}=-N\ln V-N\ln\frac{4\pi}{l}\Gamma\left(\frac{3}{l}\right)-\frac{3N}{l}\ln\frac{T}{a}-\frac{3N}{l}.$$

აქედან ენერგიისათვის მივიღებთ:

$$E(T)=F\left(T\right)-T\frac{\partial F}{\partial T}=\frac{3NT}{l}.$$

აქედან, რადგანაც $NT=PV$, მივიღებთ, რომ იდეალური გაზის წნევა, მოცულობა და ენერგია შემდეგნაირადაა დაკავშირებული ერთმანეთთან: $PV=\frac{l}{3}E.$

ამოცანა # 3.6

იდეალური გაზის ფაზური მოცულობა ნაპოვნი გვქონდა ამოცანაში #3.2.

$$\Gamma(E)=\frac{(2mE)^{3N/2}\pi^{3N/2}V^{N}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)},$$

აქედან ენტროპისათვის მივიღებთ:

$$S=\ln\Gamma(E)=N\ln V+\frac{3N}{2}\ln E+\ln\frac{(2m\pi)^{2N/2}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}.$$

აქედან ტემპერატურისათვის მივიღებთ:

$$T^{-1}=\frac{dS}{dE}=\frac{3N}{2}\cdot\frac{1}{E},\quad E=\frac{3}{2}NT,\ T=\frac{2E}{3N}.$$

$$\Gamma(E)=\frac{(2mE)^{3N/2}\pi^{3N/2}V^{N}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}e^{S},$$

აქედან: $E=\dfrac{e^{\frac{2S}{3N}}\left(\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)\right)^{2/3N}}{V^{2/3}(2m\pi)}.$

აქედან წნევისათვის მივიღებთ:

$$p=-\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S=\frac{2}{3}\cdot\frac{e^{\frac{2S}{3N}}\left(\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)\right)^{2/3N}}{V\cdot V^{2/3}(2m\pi)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{E}{V}.$$

აქედან: $pV=NT$.

ამოცანა # 3.7

N ცალი ჰარმონიული ოსცილატორების ფაზური მოცულობისთვის ამოცანა # 3.2-ში მივიღეთ გამოსახულება:

$$\Gamma(E)=E^{N}\cdot\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{N}\cdot\frac{1}{N!},$$

საიდანაც ენტროპიისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$S=\ln\Gamma(E)=N\ln E+\ln\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\cdot\frac{1}{N!}.$$

ამოცანა # 3.8

$$Z(T)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{E(p_i,q_i)}{kT}\right]d\Gamma.$$

სადაც $d\Gamma=d^Npd^Nq$ ფაზური მოცულობის ელემენტია. რადგანაც იდეალური გაზის ენერგია არ არის დამოკიდებული კოორდინატებზე, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$Z(T)=V^N\int\limits_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}\frac{\partial\Gamma(E)}{\partial E}dE=V^N\int\limits_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}\Omega(E)dE.$$

$\Omega(E)$- გამოსახულება დათვლილი გვქონდა ამოცანაში #3.2.

$$\Omega(E)=\frac{\partial\Gamma(E)}{\partial E}=\frac{(2m\pi)^{3N/2}E^{3N/2-1}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}.$$

თუ ამას ჩავსვამთ $Z(T)$-ს გამოსახულებაში, მაშინ მივიღებთ:

$$Z(T)=\frac{(2m\pi)^{3N/2}V^N}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}E^{\frac{3N}{2}-1}dE=$$

$$=\frac{(2m\pi)^{3N/2}V^N}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)(kT)^{3N/2-1+1}=(2m\pi kT)^{3N/2}V^N$$

$$Z(T)=(2m\pi kT)^{3N/2}V^N.$$

ამოცანა # 3.9

ისევე, როგორც წინა ამოცანაში, N ცალი ჰარმონიული ოსცილატორისთვის:

$$\Omega(E)=E^{N-1}\cdot\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\frac{1}{(N-1)!},$$

აქედან: $Z(T)=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\frac{1}{(N-1)!}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}dE=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\frac{kT}{(N-1)!},$

$$Z(T)=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\frac{kT}{(N-1)!}.$$

ამოცანა # 3.10

ალბათობა იმისა, რომ გაზს აქვს ენერგია მოთავსებული $E,\, E+dE$ ინტერვალში, მოიცემა გიბსის განაწილებით:

$$dW(E)=\frac{e^{-\frac{E}{kT}}\Omega(E)dE}{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}\Omega(E)dE}.$$ იდეალური გაზისთვის:

$$\Omega(E)=\frac{(2m\pi)^{3N/2}E^{3N/2-1}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}.$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}\Omega(E)dE=(2m\pi T)^{3N/2}$$

(იხ. ამოცანა # 3.8).

აქედან: $dW(E)=\dfrac{e^{-E/T}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}\cdot\left(\dfrac{E}{T}\right)^{\frac{3N}{2}}\cdot\dfrac{dE}{E}.$

ამოცანა # 3.11

$$dw(p)=\frac{e^{-\frac{c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}}dp_xdp_ydp_z}{\int e^{-\frac{c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}}dp_xdp_ydp_z},$$

$$\int e^{-\frac{c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}}dp_xdp_ydp_z=4\pi\int\limits_0^\infty e^{-\frac{c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}}p^2dp=4\pi\int\limits_0^\infty e^{-\frac{mc^2}{kT}\sqrt{\left(\frac{p}{mc}\right)^2+1}}p^2dp$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\frac{mc^2}{kT}=\alpha,\quad \frac{p}{mc}=u\,.$$

მაშინ მოცემული ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$4\pi(mc)^3\int\limits_1^\infty e^{-\alpha z}\sqrt{z^2-1}zdz=4\pi(mc)^3\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty e^{-\alpha z}\sqrt{z^2-1}dz^2=$$

$$4\pi(mc)^3\frac{1}{3}\int\limits_1^\infty e^{-\alpha z}d\left(z^2-1\right)^{3/2}=4\pi(mc)^3\frac{1}{3}e^{-\alpha z}\left(z^2-1\right)^{3/2}\Big|_1^\infty-$$

$$-4\pi(mc)^3\frac{1}{3}\int\limits_1^\infty\left(z^2-1\right)^{3/2}de^{-\alpha z}=4\pi(mc)^3\frac{\alpha}{3}\int\limits_1^\infty\left(z^2-1\right)^{3/2}e^{-\alpha z}dz.$$

მოცემული ინტეგრალი დაკავშირებულია მაკდონალდსის ფუნქციას-თან, რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება:

$$K_\nu(z)=\frac{\pi^{1/2}(z/2)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\int\limits_1^\infty e^{-zt}\left(t^2-1\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt,\quad \int\limits_1^\infty e^{-zt}\left(t^2-1\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt=\frac{K_2(\alpha)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2},$$

$$4\pi(mc)^3\frac{\alpha}{3}\int_1^\infty\left(z^2-1\right)^{3/2}e^{-\alpha z}dz=$$

$$=4\pi(mc)^3\frac{\alpha}{3}\frac{K_2(\alpha)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=4\pi(mc)^3\frac{1}{\alpha}K_2(\alpha).$$

$$4\pi(mc)^3\frac{\alpha}{3}\int_1^\infty\left(z^2-1\right)^{3/2}e^{-\alpha z}dz=$$

$$=4\pi(mc)^3\frac{\alpha}{3}\frac{K_2(\alpha)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=4\pi(mc)^3\frac{1}{\alpha}K_2(\alpha).$$

აქ გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$. გამოვიყენოთ მაკდონალდსის ფუნქციის შემდეგი თვისება:

$$K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)=-\frac{2\nu}{z}K_\nu(z),\quad K_0(z)-K_2(z)=-\frac{2}{z}K_1(z),$$

აქედან: $K_2(z)=K_0(z)+\frac{2}{z}K_1(z)$,

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\int e^{-\frac{c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}}dp_xdp_ydp=4\pi(mc)^3\frac{1}{\alpha}K_2(\alpha)=$$

$$=4\pi(mc)^3\frac{1}{\alpha}\left(K_0(\alpha)+\frac{2}{\alpha}K_1(\alpha)\right)$$

$$\int e^{-\frac{c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}}dp_xdp_ydp=4\pi(mc)^3\frac{1}{\alpha}K_2(\alpha)=$$

$$=4\pi(mc)^3\frac{1}{\alpha}\left(K_0(\alpha)+\frac{2}{\alpha}K_1(\alpha)\right)=$$

$$=4\pi(mc)^3\left(\frac{2}{\alpha^2}K_1(\alpha)+\frac{1}{\alpha}K_0(\alpha)\right)=$$

$$=4\pi(mc)^3\left(2\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2K_1\left(\frac{mc^2}{kT}\right)+\left(\frac{kT}{mc^2}\right)K_0\left(\frac{mc^2}{kT}\right)\right).$$

$$dw(p)=\frac{e^{-\frac{c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}}dp_xdp_ydp_z}{4\pi(mc)^3\left(2\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2K_1\left(\frac{mc^2}{kT}\right)+\left(\frac{kT}{mc^2}\right)K_0\left(\frac{mc^2}{kT}\right)\right)}.$$

ამოცანა # 3.12

$$F=-T\ln Z(T),\quad Z(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{E(p_i,q_i)}{kT}\right]d\Gamma.$$

$$d\Gamma=d^N p d^N q\,,$$

$$Z(T)=V^N\left(4\pi\int_0^{\infty}e^{-\frac{c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}}p^2dp\right)^N=V^N\left(f(T)\right)^N.$$

$$f(T)=4\pi(mc)^3\left(2\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2K_1\left(\frac{mc^2}{kT}\right)+\left(\frac{kT}{mc^2}\right)K_0\left(\frac{mc^2}{kT}\right)\right).$$

(იხ. წინა ამოცანა).

აქედან $F=-TN\ln V-TN\ln f(T)$.

$$P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T=\frac{TN}{V}.\quad PV=NT.$$

ახლა ვიპოვოთ ენერგია:

$$E=F-T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V=T^2N\frac{f'(T)}{f(T)}.$$

$$f(T)=4\pi(mc)^3\left(\frac{2}{\alpha^2}K_1(\alpha)+\frac{1}{\alpha}K_0(\alpha)\right),$$

$$f'(T)=4\pi(mc)^3\left(\frac{2}{\alpha^2}K_1(\alpha)+\frac{1}{\alpha}K_0(\alpha)\right)'\cdot\frac{d\alpha}{dT}.$$

$$\frac{mc^2}{kT}=\alpha,$$

$$\left(\frac{2}{\alpha^2}K_1(\alpha)+\frac{1}{\alpha}K_0(\alpha)\right)'=$$

$$=-4\frac{1}{\alpha^3}K_1(\alpha)+2\frac{1}{\alpha^2}K_1'(\alpha)-\frac{1}{\alpha^2}K_0(\alpha)+\frac{1}{\alpha}K_0'(\alpha).$$

$$K_0(\alpha)=\int_1^{\infty}e^{-\alpha t}\left(t^2-1\right)^{-1/2}dt,$$

$$K_0'(\alpha)=-\int_1^{\infty}te^{-\alpha t}\left(t^2-1\right)^{-1/2}dt=-\frac{1}{2}\int_1^{\infty}e^{-\alpha t}\left(t^2-1\right)^{-1/2}d(t^2-1)=$$

$$-\int_1^{\infty}e^{-\alpha t}d(t^2-1)^{1/2}=-(t^2-1)^{1/2}e^{-\alpha t}\Big|_1^{\infty}+\int_1^{\infty}(t^2-1)^{1/2}de^{-\alpha t}=-\alpha\int_1^{\infty}(t^2-1)^{1/2}e^{-\alpha t}dt=-K_1(\alpha).$$

$$K_1(\alpha)=\alpha\int_1^{\infty}(t^2-1)^{1/2}e^{-\alpha t}dt.$$

$$K_1'(\alpha)=\int_1^{\infty}(t^2-1)^{1/2}e^{-\alpha t}dt-\alpha\int_1^{\infty}t(t^2-1)^{1/2}e^{-\alpha t}dt=$$

$$=\frac{1}{\alpha}K_1(\alpha)-\frac{\alpha}{2}\int_1^{\infty}d\left(t^2-1\right)\cdot\left(t^2-1\right)^{1/2}e^{-\alpha t}=$$

$$=\frac{1}{\alpha}K_1(\alpha)-\frac{\alpha}{2}\frac{2}{3}\int_1^{\infty}d\left(t^2-1\right)^{3/2}\cdot e^{-\alpha t}=\frac{1}{\alpha}K_1(\alpha)-\frac{\alpha}{3}\left(t^2-1\right)^{3/2}e^{-\alpha t}\Big|_1^{\infty}+$$

$$+\frac{\alpha}{3}\int_1^{\infty}\left(t^2-1\right)^{3/2}\cdot de^{-\alpha t}=\frac{1}{\alpha}K_1(\alpha)-\frac{\alpha^2}{3}\int_1^{\infty}\left(t^2-1\right)^{3/2}\cdot e^{-\alpha t}dt=\frac{1}{\alpha}K_1(\alpha)-K_2(\alpha)$$

გამოვიყენოთ შემდეგი თანაფარდობები: $K_2(z)=K_0(z)+\frac{2}{z}K_1(z)$,

მაშინ მივიღებთ:

$$K_1'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}K_1(\alpha)-K_0(\alpha)-\frac{2}{\alpha}K_1(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}K_1(\alpha)-K_0(\alpha).$$

$$\left(\frac{2}{\alpha^2}K_1(\alpha)+\frac{1}{\alpha}K_0(\alpha)\right)'=$$

$$=-4\frac{1}{\alpha^3}K_1(\alpha)-2\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}K_1(\alpha)+K_0(\alpha)\right)-\frac{1}{\alpha^2}K_0(\alpha)-\frac{1}{\alpha}K_1(\alpha)=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{6}{\alpha^2}K_1(\alpha)+\frac{3}{\alpha}K_0(\alpha)+K_1(\alpha)\right).$$

აქედან ენერგიისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$E = T^2 N \frac{f'(T)}{f(T)} = T^2 N \frac{4\pi (mc)^3 \left(\frac{2}{\alpha^2} K_1(\alpha) + \frac{1}{\alpha} K_0(\alpha)\right)'}{4\pi (mc)^3 \left(\frac{2}{\alpha^2} K_1(\alpha) + \frac{1}{\alpha} K_0(\alpha)\right)} \cdot \left(-\frac{mc^2}{T^2}\right).$$

$$E = TN \frac{\left(\frac{6}{\alpha^2} K_1(\alpha) + \frac{3}{\alpha} K_0(\alpha) + K_1(\alpha)\right)}{\left(\frac{2}{\alpha^2} K_1(\alpha) + \frac{1}{\alpha} K_0(\alpha)\right)} =$$

$$= TN \left(1 + \frac{\left(\frac{4}{\alpha^2} K_1(\alpha) + \frac{2}{\alpha} K_0(\alpha) + K_1(\alpha)\right)}{\left(\frac{2}{\alpha^2} K_1(\alpha) + \frac{1}{\alpha} K_0(\alpha)\right)}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{\frac{2}{\alpha}\left(K_0(\alpha) + \frac{2}{\alpha} K_1(\alpha) + \frac{\alpha}{2} K_1(\alpha)\right)}{\frac{2}{\alpha} \cdot \left(K_0(\alpha) + \frac{2}{\alpha} K_1(\alpha)\right)}\right) =$$

$$= \left(1 + 2 \frac{\left(K_0(\alpha) + \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\right) K_1(\alpha)\right)}{\left(K_0(\alpha) + \frac{2}{\alpha} K_1(\alpha)\right)}\right).$$

$$\alpha = \frac{mc^2}{kT}.$$

ამოცანა # 4.1

ა) გიბსის განაწილება სისტემისათვის იწერება შემდეგნაირად:

$dw(p,q) = Ae^{-\frac{E(p,q)}{T}} d\Gamma$, სადაც $E(p,q)$ სისტემის ენერგიაა, p და q-ით აღნიშნულია სისტემის შემადგენელ ნაწილაკთა იმპულსები და კოორდინატები, ხოლო $d\Gamma = dpdq$ არის ფაზური სივრცის ელემენტი, A მანორმირებელი მამრავლია, T – ტემპერატურა (k ბოლცმანის მუდმივა აღებულია ერთის ტოლად, ამიტომ T-ში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ kT). რადგანაც სისტემის ენერგია კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამია $E(p,q) = K(p) + U(q)$, სადაც $K(p)$ სისტემის კინეტიკური ენერგიაა, ხოლო $U(q)$– პოტენციური.

ამრიგად, ალბათობის განაწილება სისტემისათვის დაიწერება შემდეგნაირად:

$dw(p,q) = A\exp\left(-\frac{U(q)}{T} - \frac{K(p)}{T}\right)dpdq$, ესე იგი ალბათობის განაწილება მთელი სისტემისათვის იყოფა ორი თანამამრავლის ნამრავლად. ერთი მათგანი დამოკიდებულია მხოლოდ კოორდინატებზე, მეორე – მხოლოდ იმპულსებზე, ე.ი. ერთი წარმოადგენს ალბათობის განაწილებას კოორდინატებისთვის, მეორე – იმპულსებისათვის. ამრიგად, ალბათობის განაწილებისთვის იმპულსების მიხედვით, შეგვიძლია დავწეროთ გამოსახულება:

$dw_p = ae^{-\frac{K(p)}{T}}dp$, ხოლო ალბათობის განაწილებისათვის კოორდინატების მიხედვით გამოსახულება: $dw_q = ae^{-\frac{U(q)}{T}}dq$.

რადგანაც მთელი სისტემის კინეტიკური ენერგია ტოლია შემადგენელი ნაწილაკების კინეტიკური ენერგიების ჯამისა, ამიტომაც ალბათობის განაწილება იმპულსებისათვის კვლავ დაიშლება თანამამრავლების ნამრავლად, რომელთაგან თითოეული მათგანი დამოკიდებულია მხოლოდ ერთი ნაწილაკის იმპულსზე. ამიტომაც შეგვიძლია დავწეროთ ალბათობის განაწილება ერთი ნაწილაკის იმპულსისათვის:

$dw_p = ae^{-\frac{1}{2mT}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}dp_x dp_y dp_z$, a მუდმივი განისაზღვრება ნორმირების პირობიდან, ხოლო ინტეგრირება dp_x, dp_y, და dp_z ხდება ცალ-ცალკე შემდეგი ფორმულის გამოყენებით: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. აქედან მივიღებთ,

რომ $\alpha = \left(2\pi mT\right)^{-3/2}$ და საბოლოოდ დაიწერება ალბათობის განაწილებისათვის იმპულსების მიხედვით შემდეგი გამოსახულება:

$$dw_p = \frac{1}{\left(2\pi mT\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mT}\right) dp_x dp_y dp_z ,$$

აქედან, თუ გადავალთ იმპულსებიდან სიჩქარეებზე $p = mv$, შეგვიძლია დავწეროთ ალბათობის განაწილება სიჩქარეების მიხედვით:

$$dw_v = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2T}\right) dv_x dv_y dv_z .$$ ეს ეგრეთ წოდებული მაქსველის განაწილებაა. შევნიშნოთ, რომ ის კვლავ იყოფა სამ დამოუკიდებელ Yთანამამრავლად:

$$dw_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} e^{-\frac{mv_x^2}{2T}}, \quad dw_y = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} e^{-\frac{mv_y^2}{2T}}, \quad dw_y = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} e^{-\frac{mv_y^2}{2T}},$$ რომელთაგან თითოეული მათგანი აღწერს ალბათობის განაწილებას სიჩქარის შესაბამისი კომპონენტების მიხედვით.

ბ) გადავწეროთ მაქსველის განაწილება სფერულ კოორდინატებში:

$v_x^2+v_y^2+v_z^2 = v^2$, $dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv$, სადაც v სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობაა, θ და φ პოლარული კუთხე და აზიმუტი, რომლებიც განსაზღვრავენ ნაწილაკის მიმართულებას, მივიღებთ:

$$dw_v = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv .$$

თუ ამ გამოსახულებას ვაინტეგრებთ კუთხეებით

$0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, მაშინ მივიღებთ: $dw_v = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv$.

გ) თუ სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობების მიხედვით, განაწილებაში ჩავსვამთ კინეტიკური ენერგიის მნიშვნელობას $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$, მაშინ მივიღებთ: $dw_\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi T^3}} e^{-\frac{\varepsilon}{T}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$.

ამოცანა # 4.2

მაქსველის განაწილება სიჩქარეების მიხედვით:

$dw(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv$ (იხ. წინა ამოცანა), გამოვთვალოთ

$\left|\bar{\vec{v}}\right| = \bar{v}$: $\bar{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^3 dv$. $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{2n+1} dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}$,

აქედან მივიღებთ: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8T}{\pi m}}$.

გამოვთვალოთ სიჩქარის მდგენელის საშუალო $\overline{|v_x|}$.

$dw(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x$,

აქედან $\overline{|v_x|} = 2\sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \int_0^\infty v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} dv_x = \sqrt{\frac{2T}{\pi m}}$, $\overline{|v_x|} = \overline{|v_y|} = \overline{|v_z|} = \sqrt{\frac{2T}{\pi m}}$.

ამოცანა # 4.3

$dw(v) \sim e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv$, ვიპოვოთ ექსტრემუმის წერტილი $\frac{d}{dv}\left(e^{-\alpha v^2} v^2\right) = 0$, $\alpha = \frac{m}{2T}$.

$\frac{d}{dv}\left(e^{-\alpha v^2} v^2\right) = -2\alpha v e^{-\alpha v^2} v^2 + e^{-\alpha v^2} 2v = 0$, საიდანაც $v_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2T}{m}}$.

ამოცანა # 4.4

$\overline{v^n} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^{n+2} dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)$. როცა n ლუწი რიცხვია $n = 2r$, მაშინ:

$$\overline{v^{2r}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^r \cdot \Gamma\left(\frac{2r+3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^r \cdot \Gamma\left(\frac{2r+1}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^r \cdot \frac{2r+1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{2r+1}{2}\right) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^r \cdot \frac{2r+1}{2} \cdot \frac{2r-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{T}{m}\right)^2 (2r+1)!!,$$

სადაც $(2r+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r+1)$.

როცა n კენტი რიცხვია $n = 2r+1$, მაშინ:

$$\overline{v^{2r+1}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^{\frac{2r+1}{2}} \Gamma(r+2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^{\frac{2r+1}{2}} (r+1)!.$$

ამოცანა # 4.5

$\overline{(\Delta v)^2} = \overline{v^2} - \left(\bar{v}\right)^2$, წინა ამოცანის შედეგების მიხედვით, $\overline{v^2} = \dfrac{3T}{m}$, ხოლო $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8T}{\pi m}}$, აქედან $\overline{(\Delta v)^2} = \dfrac{T}{m}\left(3 - \dfrac{8}{\pi}\right)$

ამოცანა # 4.6

$$\overline{\frac{1}{v}} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \cdot \frac{T}{m} = \sqrt{\frac{2m}{\pi T}}.$$

ამოცანა # 4.7

$\bar{\varepsilon}=\frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\varepsilon\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon$. შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $\sqrt{\varepsilon}=x$, მაშინ $\varepsilon=x^2,\, d\varepsilon=2xdx$ და კინეტიკური ენერგიის საშუალო მნიშვნელობისთვის მივიღებთ:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{4}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{T}}x^4dx=\frac{4}{\sqrt{\pi T^3}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)T^{5/2}=\frac{3T}{2}.$$

ანალოგიურად:

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon=\frac{4}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{T}}x^6dx=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi T^3}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)T^{7/2}=\frac{15T^2}{4}.$$

$\bar{\varepsilon}=\frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\varepsilon\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon$. შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $\sqrt{\varepsilon}=x$, მაშინ $\varepsilon=x^2,\, d\varepsilon=2xdx$ და კინეტიკური ენერგიის საშუალო მნიშვნელობისთვის მივიღებთ:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{4}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{T}}x^4dx=\frac{4}{\sqrt{\pi T^3}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)T^{5/2}=\frac{3T}{2}.$$

ანალოგიურად:

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon=\frac{4}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{T}}x^6dx=\frac{4}{\sqrt{\pi T^3}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)T^{7/2}=\frac{15T^2}{4}.$$

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2}=\overline{\varepsilon^2}-(\bar{\varepsilon})^2=\frac{15}{4}T^2-\frac{9}{4}T^2=\frac{3}{2}T^2.$$

ამოცანა # 4.8

$dw(\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon$ (იხ. ამოცანა # 4.1).

$$\frac{dw(\varepsilon)}{d\varepsilon}\sim e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\left(-\frac{1}{T}\right)\sqrt{\varepsilon}+e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}=0.$$

აქედან $\frac{1}{T}\sqrt{\varepsilon}=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$, საიდანაც $\varepsilon_{max}=\frac{T}{2}$.

რადგანაც $v_{max}=\left(\frac{2T}{m}\right)^{1/2}$, ამიტომ $\frac{mv_{max}^2}{2}=T$, ე.ი. $\varepsilon_{max}\neq\frac{1}{2}mv_{max}^2$.

ამოცანა # 4.9

$$w_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_0}=\frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^{\varepsilon_0}e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon$$ (შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $\frac{\varepsilon}{T}=x$)

$$w_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_0}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varepsilon_0/T}e^{-x}\sqrt{x}dx,$$

გადავიდეთ კიდევ ახალ ცვლადზე:

$\sqrt{x}=y$,

მაშინ:

$$w_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_0}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\varepsilon_0/T}}e^{-y^2}ydy^2=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\varepsilon_0/T}}yde^{-y^2}=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}ye^{-y^2}\Big|_0^{\sqrt{\varepsilon_0/T}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\varepsilon_0/T}}e^{-y^2}dy=$$

$$=\Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{T}}\right)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{T}}e^{-\frac{\varepsilon_0}{T}},$$ ე.ი. $$w_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_0}=\Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{T}}\right)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{T}}e^{-\frac{\varepsilon_0}{T}},$$

სადაც $\Phi(x)=erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ ალბათობის ინტეგრალია.

ამოცანა # 4.10

ალბათობა იმისა, რომ იდეალური აირის მოლეკულის კინეტიკური ენერგია აღემატება წინასწარ მოცემულ მნიშვნელობას, მოიცემა გამოსახულებით:

$$w_{\varepsilon>\varepsilon_0}=\frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}\int_{\varepsilon_0}^{\infty}e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon-\frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}\int_0^{\varepsilon_0}e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon.$$

$$\int_0^{\infty}e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon=\left(\frac{\varepsilon}{T}=x\right)=T^{3/2}\int_0^{\infty}e^{-x}\sqrt{x}dx=\left(\sqrt{x}=y\right)=$$

$$=T^{3/2}\int_0^{\infty}e^{-y^2}ydy^2=-T^{3/2}\int_0^{\infty}yde^{-y^2}=$$

$$=-T^{3/2}yde^{-y^2}\Big|_0^{\infty}+T^{3/2}\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=T^{3/2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

რაც შეეხება მეორე ინტეგრალს, ის დათვლილი იყო წინა მოცანაში და, ამრიგად, ალბათობისათვის მივიღებთ:

$$w_{\varepsilon>\varepsilon_0}=1-\Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{T}}\right)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{T}}e^{-\frac{\varepsilon_0}{T}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\varepsilon_0>>T$ და იმას, რომ $\Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{T}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\varepsilon_0/T}}e^{-t^2}dt$, მაშინ ამ ინტეგრალში ზედა ზღვარი შეგვიძლია ავიღოთ Uუსასრულობა და $\Phi\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{T}}>>1\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$.

აქედან ალბათობისათვის მოვიღებთ: $w_{\varepsilon>\varepsilon_0>>T}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{T}}e^{-\frac{\varepsilon_0}{T}}$.

ამოცანა # 4.11

წინა ორი ამოცანის ამოხსნის შედეგებიდან:

$$\frac{n_{\varepsilon<\varepsilon_0}}{n_{\varepsilon>\varepsilon_0}}=\frac{\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}erf\,(1)-\dfrac{1}{e}}{1-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}erf\,(1)+\dfrac{1}{e}}.$$

ამოცანა # 4.12

$$n_{0\le v_x\le v_x^0}=n\int_0^{v_x^{(0)}}dw(v_x)=n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\int_0^{v_x^0}e^{-\frac{mv_x^2}{2T}}dv_x.$$ აქ $n=\dfrac{V}{N}$ მოლეკულათა რიცხვია მოცულობის ერთეულში, ხოლო $dw_x=\sqrt{\dfrac{m}{2\pi T}}e^{-\frac{mv_x^2}{2T}}$. იმის ალბა-თობა, რომ მოლეკულის სიჩქარის x კომპონენტა მოთავსებულია შუა-ლედში: $[v_x,\, v_x+dv_x]$. შემოვიღოთ ჩასმა $\dfrac{mv_x^2}{2T}=x^2$, მაშინ:

$$n_{0\le v_x\le v_x^0}=n\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{x_0}e^{-x^2}dx=\frac{n}{2}erf\,(x_0).$$

სადაც $x_0=\sqrt{\dfrac{m}{2T}}v_x^{(0)}$, $erf\,(x_0)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{x_0}e^{-x^2}dx.$

ამრიგად, $n_{0\le v_x\le v_x^0}=\dfrac{n}{2}erf\left(\dfrac{v_x^{(0)}\sqrt{m}}{\sqrt{2T}}\right).$

ამოცანა # 4.13

ისევე, როგორც წინა ამოცანაში:

$$n_{0\le v\le v_{\max}} = n\int_0^{v_{\max}} dw(v) = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\int_0^{v_{\max}} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv.$$ სადაც

$dw_v = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv$ არის ალბათობა იმისა, რომ ნაწილაკის სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა მოთავსებულია ინტერვალში: $[v,\ v+dv]$. გავაკეთოთ ჩასმა $\frac{mv^2}{2T} = z^2$.

მაშინ მივიღებთ: $n_{0\le v\le v_{\max}} = \frac{2n}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-z^2} z^2 dz.$

$$\int_0^1 e^{-z^2} z^2 dz = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-z^2} z dz^2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 z de^{-z^2} = -\frac{1}{2} z e^{-z^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-z^2} dz =$$

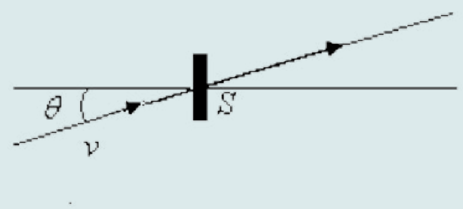
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(1) - e^{-1}\right).$$

აქედან:

$$n_{0\le v\le v_{\max}} = n\left(erf(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1}\right).$$

ამოცანა # 4.31

$dN(\theta, v)$ არის ხვრელიდან 1 წამში გამოფრენილი v სიჩქარის მქონე ნაწილაკები, რომლებიც θ კუთხეს ადგენენ S ფართობის ნორმალთან



$dN(\theta, v)$ ემთხვევა იმავე კუთხით ჭურჭლის შიგა მხრიდან იმავე დროში S ფართობზე დაცემულ ნაწილაკთა რაოდენობას. $Sv\cos\theta\cdot 1$ წმ მოცულობაში მოხვედრილი ნაწილაკების რაოდენობა გაივლის S ხვრელში. ამ მოცულობაში მოხვდება $\frac{N}{V}Sv\cos\theta$ ნაწილაკი. სიჩქარე v და დაცემის კუთხე θ სხვადასხვა ნაწილაკისათვის სხვადასხვაა. ამიტომ:

$$dN(v,\theta) = S\frac{N}{V} v\cos\theta dw(v,\theta),$$

სადაც $dw(v,\theta)$ არის ალბათობა იმისა, რომ ნაწილაკს აქვს სიჩქარე $(v, v+dv)$ ინტერვალში, ხოლო დაცემის კუთხეა $(\theta, \theta+d\theta)$ ინტერვალში:

$$dN(\theta) = \int_0^\infty dN(\theta, v) = S\frac{N}{V}\cos\theta\int_0^\infty v dw(\theta, v) =$$

$$= S\frac{N}{V} 2\pi\cos\theta\sin\theta d\theta\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv =$$

$$= S\frac{N}{V} 2\pi\cos\theta\sin\theta d\theta\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{1}{2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^2} =$$

$$= S\frac{N}{V} 2\pi\cos\theta\sin\theta d\theta\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}.$$

$$dN(\theta) = S\frac{N}{V} 2\pi\cos\theta\sin\theta d\theta\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}.$$

ამოცანა # 4.32

$$dN = dtnS\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\int_0^{\infty} v_x dv_x \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2T}} dv_y dv_z =$$

$$= dtnS\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} v_x dv_x =$$

$$= dtnS\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2}\cdot\frac{T}{m}.$$

რადგანაც $p = nT$, ამიტომ $\frac{dN}{dt} = pS\left(\frac{1}{2m\pi T}\right)^{1/2}$.

ამოცანა # 4.33

ვინაიდან აირის შემადგენელი ატომები მოძრაობენ სხვადასხვა სიჩქარით, დოპლერის ეფექტის გამო, დამკვირვებელი გამოსხივების ტალღის სიგრძეს გარკვეულ დიაპაზონში აღიქვამს. მაგალითად, იმ ატომის გამოსხივების ტალღის სიგრძე, რომელიც OZ ღერძზე მყოფ დამკვირვებელს v_z სიჩქარით შორდება, იქნება $\lambda = \lambda_0\left(1+\frac{v_z}{c}\right)$ (c სინათლის სიჩქარეა). ამიტომ დამკვირვებლის მიერ $[\lambda, \lambda+d\lambda]$ დიაპაზონში აღქმული გამოსხივების ინტენსივობა იქნება $J(\lambda)d\lambda = \alpha dn(\lambda)$, სადაც $dn(\lambda)$ იმ ატომების რაოდენობაა, რომლებიც $[\lambda, \lambda+d\lambda]$ არეში ასხივებენ, α არის მუდმივი, რომელიც $\int_0^{\infty} J(\lambda)d\lambda = NJ_0$ პირობის საშუალებით განისაზღვრება.

თუ ატომთა სიჩქარეების მიხედვით განაწილება მაქსველის განაწილების მიხედვით მოიცემა, მაშინ:

$dn(\lambda) = dn(v_z) = N\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_z^2}{2T}} dv_z$, სიჩქარეებიდან ინტეგრირებიდან გადავიდეთ ინტეგრირებაზე ტალღის სიგრძეებით:

$$\lambda = \lambda_0\left(1+\frac{v_z}{c}\right) \Rightarrow v_z \frac{c}{\lambda_0}(\lambda-\lambda_0), \quad dv_z = \frac{c}{\lambda_0}d\lambda,$$

$$dn(\lambda) = N\left(\frac{mc^2}{2\pi T\lambda_0^2}\right)^{1/2}\cdot\exp\left\{-\frac{mc^2}{2T\lambda_0^2}\left(\lambda-\lambda_0^2\right)\right\}d\lambda.$$

გამოსხივების ინტენსივობისათვის გვექნება

$$J(\lambda)d\lambda = \alpha\left(\frac{N}{\sqrt{\pi\delta^2}}\right)\cdot\exp\left\{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{\delta^2}\right\},$$

სადაც $\delta = \left(\frac{mc^2}{2\pi T\lambda_0^2}\right)^{-1/2}$ არის დოპლერის ეფექტით გამოწვეული გაგანიერება.

განვსაზღვროთ α NJ_0-ზე ნორმირების პირობიდან

$$\frac{\alpha N}{\sqrt{\pi\delta^2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda-\lambda_0}{\delta^2}}d\lambda \Rightarrow \left|\begin{matrix}\lambda-\lambda_0 = x\\ \lambda=\lambda_0+x\end{matrix}\right| = \frac{\alpha N}{\sqrt{\pi\delta^2}}\int_{-\lambda_0}^{\infty} e^{-x^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\lambda_0 >> \delta\right| \Rightarrow \frac{\alpha N}{\sqrt{\pi\delta^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \alpha N.$$

რადგან $\alpha N = NJ_0$, $\alpha = J_0$.

საბოლოოდ: $J(\lambda)d\lambda = J_0 N\frac{1}{\sqrt{\pi\delta^2}}\exp\left\{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{\delta^2}\right\}$.

შევაფასოთ დოპლერის გამოსხივების სიგანე წყალბადის აირისათვის ოთახის ტემპერატურაზე:

$T = 300^o\ C$, $m \square 3.4\cdot 10^{-27}$ კგ, $k = 1.4\cdot 10^{-23}$ ჯ/გრ, $c \square 3\cdot 10^8$ მ/წმ, $\lambda_0 = 5000\ A = 5\cdot 10^{-7}$ მ,

$$\delta = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\cdot\frac{\lambda_0}{c},\quad \delta = \sqrt{\frac{2\cdot 1.4\cdot 10^{-23}\cdot 300}{3.4\cdot 10^{-27}}}\cdot\frac{5\cdot 10^{-7}}{3\cdot 10^8} \approx 10^{-12}\ \text{მ},$$

$\delta \approx 10^{-12}$ მ$=10^{-2}\ A$.

ამოცანა # 4.34

ეს განსხვავება არსებობს იმ შემთხვევაში, თუ ქვესისტემად აღებულია იდეალური აირის ერთი რომელიმე მოლეკულა. ასეთი განხილვისას განაწილების ფუნქციას $dw(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{T}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon$ აქვს გლუვი (არამკვეთრი) მაქსიმუმი $\varepsilon = \varepsilon_{\max} = \frac{T}{2}$ მნიშვნელობისათვის (ე.წ. უალბათესი ენერგია). იგი სტატისტიკური წონის $\sim\sqrt{\varepsilon}$ სახით შეიცავს მამრავლს, რის გამოც არ არის სიმეტრიული $\varepsilon_{\max}$ მიმართ. ამიტომ $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ ენერგიის მქონე ნაწილაკები უფრო მეტი იქნება, ვიდრე ნაწილაკები, რომელთათვის $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$. ამის შედეგად მივიღებთ, რომ $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}T$ ერთ ნაწილაკზე მოსული საშუალო ენერგია არ უდრის უალბათეს ენერგიას $\bar{\varepsilon} \neq \varepsilon_{\max}$.

ამოცანა # 4.35

გიბსის განაწილების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ ალბათობა იმისა, რომ პირველ ნაწილაკს აქვს სიჩქარე $\vec{v}_1$, ხოლო მეორე ნაწილაკს – $\vec{v}_2$

$$dw(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=Ce^{-\frac{m_1v_1^2+m_2v_2^2}{2T}}d\vec{v}_1d\vec{v}_2.$$

ნორმირების პირობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$dw(v_1,v_2)=16\pi^2e^{-\frac{m_1v_1^2+m_2v_2^2}{2T}}v_1^2v_2^2dv_1dv_2.$$

ორი ნაწილაკის ფარდობითი მოძრაობის შესასწავლად, მოხერხებულია მათი მასათა ცენტრთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის გამოყენება. ამისათვის საჭიროა, გადავიდეთ მასათა ცენტრთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში შემდეგი გარდაქმნის საშუალებით:

კოორდინატებისათვის – $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2,\ \vec{r}_c=\dfrac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$,

სიჩქარეებისათვის – $\vec{v}\,'=\vec{v}_1-\vec{v}_2$, $\vec{v}_c=\dfrac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$, სადაც $\vec{v}\,'$- არის ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარე, ხოლო $\vec{v}_c$ მასათა ცენტრის სიჩქარე.

ახალ ათვლის სისტემაში გადასვლის შემდეგ v' და v_c სიჩქარეების მიხედვით, ალბათობათა განაწილების ფუნქციისთვის გვექნება:

$$dw(v',v_c)=4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi T}\right)^{3/2}e^{-\frac{\mu v'^2}{2T}}v'^2\,dv'4\pi\left(\frac{M}{2\pi T}\right)^{3/2}e^{-\frac{Mv_c^2}{2T}}v_c^2dv_c,$$

სადაც $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, $M=m_1+m_2$.

თუ მას მასათა ცენტრის სიჩქარეების მიხედვით გავაინტეგრებთ, მივიღებთ ფარდობითი სიჩქარეების მიხედვით განაწილების ფუნქციას:

$$dw(v')=4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi T}\right)^{3/2}e^{-\frac{\mu v'^2}{2T}}v'^2\,dv'. \qquad (*)$$

ამ განაწილების ფუნქციის გამოყენებით საშუალო ფარდობითი სიჩქარისათვის მივიღებთ: $\overline{v'}=\sqrt{2}\,\bar{v}$, სადაც $\bar{v}$ არის აირის ნაწილაკთა მოძრაობის საშუალო სიჩქარე.

ამოცანა # 4.36

ჩავთვალოთ, რომ აირის ყველა შემადგენელი ნაწილაკი, გარდა ერთისა, უძრავია და ქაოსურად არის განაწილებული სივრცეში. მოძრავი ნაწილაკის სიჩქარე უძრავის მიმართ არის v'. დროის ერთეულში იგი გაივლის v' ტოლ მანძილს და შეეჯახება ყველა იმ ნაწილაკს, რომელიც $\sigma v'$ მოცულობის ცილინდრში იმყოფება (σ გაფანტვის ეფექტური განივკვეთია). ასეთი დაჯახებათა რიცხვი იქნება $\sigma v'dn(v')$, სადაც $dn(v')=ndw(v')$. ($dw(v')$-ის გამოსახულება იხ. წინა ამოცანაში (*))

რადგან ნაწილაკები r_0-რადიუსიან მცირე ზომის ბირთვებად წარმოიდგინებიან, $\sigma=4\pi r_0^2$. დაჯახებათა სრული რიცხვი, რომელსაც ნაწილაკი ერთ წამში განიცდის, მიიღება $dw(v')$ ალბათობის გაინტეგრებით v'-ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობით:

$$\nu=\int_0^\infty\sigma v'dn(v')=4\pi n\sigma\left(\frac{m}{4\pi T}\right)^{3/2}\int_0^\infty e^{-\frac{mv'^2}{4T}}v'^3\,dv'=$$

$$=n\sigma\overline{v'}=n\sigma\sqrt{2}\,\bar{v}=4\pi\sigma\sqrt{\frac{T}{\pi m}}.$$

აქ გამოყენებულია, ის ფაქტი რომ ფარდობითი მოძრაობის ეფექტური მასა $\mu=\dfrac{m}{2}$.

ნაწილაკი ერთ წამში სივრცეში გადის საშუალოდ $\bar{v}$ მანძილს, ამასობაში იგი ν-ჯერ განიცდის შეჯახებას. ამიტომ დაჯახებათა შორის საშუალო მანძილი, ანუ საშუალო თავისუფალი განარბენი იქნება:

$$\lambda=\frac{\bar{v}}{\nu}=\frac{\bar{v}}{2\sigma\overline{v'}}=\frac{1}{n\sigma\sqrt{2}}.$$

ამოცანა # 4.37

გავარვარებული ლითონიდან ამოტყორცნა შეუძლია მხოლოდ იმ ელექტრონებს, რომელთა ენერგია, სულ მცირე, გამოსვლის მუშაობის ტოლი ენერგიით – W აღემატება თავისუფალი ელექტრონის ენერგიას. ამ მოვლენას თერმოელექტრული ემისია ეწოდება. ლითონის ზედაპირის პერპენდიკულარული x-ღერძის მიმართულებით ელექტრონების ნაკადისთვის გვექნება:

$$J_x = n_0 e\left(\frac{m}{2\pi mT}\right)^{1/2}\int_{v_0}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2T}}\,dv_x,$$

სადაც n_0 არის ელექტრონთა რიცხვი მოცულობის ერთეულში, e – ელექტრონის მუხტი, v_0 – სიჩქარე განისაზღვრება $\frac{mv_0^2}{2} = W$-პირობიდან. ინტეგრების შემდეგ დენის ნაკადისათვის გვექნება:

$$J_x = n_0 e\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2} e^{-\frac{W}{2T}} = \frac{1}{4} n_0 e\bar{v} e^{-\frac{W}{2T}}.$$

ამოცანა # 4.38

$$dn = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2T}}\,dv_x dv_y dv_z$$

გადავიდეთ ცილინდრულ კოორდინატებზე გარდაქმნით:

$v_z = v_\parallel,\ v_x = v_\perp \sin\theta,\ v_y = v_\perp \cos\theta$,

გარდაქმნის იაკობიანი: $\begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial v_\perp} & \frac{\partial v_x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_y}{\partial v_\perp} & \frac{\partial v_y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = -v_\perp\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = -v_\perp.$

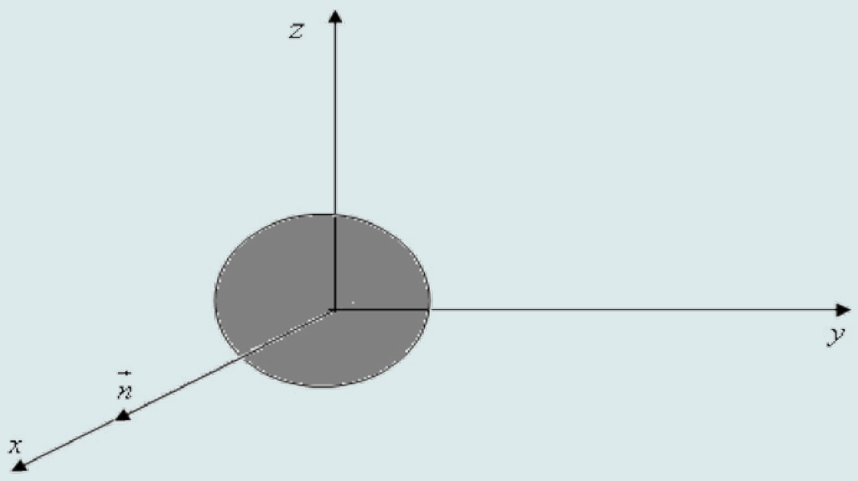
$$\left|J\left(v_\perp,\theta\right)\right| = v_\perp .$$

$$dn_\perp = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{v_\parallel^2+v_\perp^2}{2T}}\,dv_\parallel \left|J\left(v_\perp,\theta\right)\right| dv_\perp d\theta$$

$$dn_\perp = 2\pi n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{v_\parallel^2+v_\perp^2}{2T}}\,dv_\parallel v_\perp dv_\perp .$$

ამოცანა # 4.39

კოორდინატთა სისტემა დავუკავშიროთ დისკს ისე, რომ x-ღერძი მიმართული იყოს დისკის მოძრაობის გასწვრივ, ხოლო y და z-ღერძები იმყოფებოდნენ დისკის სიბრტყეში (იხ. ნახ. 1).



ნახ.1

მოლეკულათა სიჩქარის მდგენელების მიხედვით, განაწილების ალბათობა იქნება: $w_{\vec{v}} = w_{v_x-u}\cdot w_{v_y}\cdot w_{v_z}$, სადაც w_{v_i} არის მაქსველის განაწილების ფუნქცია სიჩქარეთა i-ური პროექციის მიხედვით $(i = x, y, z)$.

წინააღმდეგობის F ძალა ტოლია ერთ წამში აირის მიერ დისკზე გადაცემული იმპულსისა. თუ აირის მილეკულათა დისკთან დაჯახებას ჩავთვლით დრეკად დაჯახებად, მაშინ v_x სიჩქარის მქონე მოლეკულები დისკს ერთ წამში გადასცემენ იმპულსს: $F(v_x) = 2mv_x|v_x|\rho S$, სადაც ρ გაზის სიმკვრივეა, S – დისკის ფართობი. წინააღმდეგობის ძალას მივიღებთ, თუ ამ გამოსახულებას გავასაშუალოებთ სიჩქარეების მიხედვით:

$$\overline{F} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 2mv_x|v_x|\rho\cdot w_{v_x-u}\cdot w_{v_y}\cdot w_{v_z}\,dv_x dv_y dv_z =$$

$$= 2m\rho S\sqrt{\frac{m}{2T\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x|v_x|e^{-\frac{m(v_x-u)^2}{2T}}dv_x$$

.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x|v_x|e^{-\frac{m(v_x-u)^2}{2T}}dv_x = \left|\sqrt{\frac{m}{2T}}v_x \equiv x,\ \sqrt{\frac{m}{2T}}u \equiv \xi\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2T}{m}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{+\infty} x|x|e^{-(x-\xi)^2}dx = \left(\frac{2T}{m}\right)^{3/2} I_0.$$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x|e^{-(x-\xi)^2}dx = I_1 + I_2 = \int_0^{+\infty} x^2e^{-(x-\xi)^2}dx - \int_{-\infty}^{0} x^2e^{-(x-\xi)^2}dx\,.$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x^2e^{-(x-\xi)^2}dx = |x-\xi = y| = \int_{-\xi}^{+\infty}(y+\xi)^2e^{-y^2}dy =$$

$$= \int_{-\xi}^{+\xi}(y+\xi)^2e^{-y^2}dy + \int_{+\xi}^{+\infty}(y+\xi)^2e^{-y^2}dy =$$

$$= \int_{-\xi}^{+\xi}\left(y^2+2y\xi+\xi^2\right)e^{-y^2}dy + \int_{+\xi}^{+\infty}(y+\xi)^2e^{-y^2}dy =$$

$$= 2\int_0^{+\xi}\left(y^2+\xi^2\right)e^{-y^2}dy + \int_{+\xi}^{+\infty}(y+\xi)^2e^{-y^2}dy = J_1 + J_2,$$

$$J_1 = 2\int_0^{+\xi}\left(y^2+\xi^2\right)e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\xi)\left(1+2\xi^2\right) - \xi e^{-\xi^2},$$

$$\int_0^{\xi} y^2e^{-y^2}dy = -(\xi/2)e^{-\xi^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\Phi(\xi),$$

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-\zeta^2}d\zeta\,.$$

$$J_2 = \int_{+\xi}^{+\infty}(y+\xi)^2e^{-y^2}dy.$$

$$I_2 = -\int_{-\infty}^{0} x^2e^{-(x-\xi)^2}dx = |x \Rightarrow -x| =$$

$$= \int_{\infty}^{0} x^2e^{-(x+\xi)^2}dx = -\int_0^{\infty} x^2e^{-(x+\xi)^2}dx = |x+\xi = y| = -\int_{\xi}^{+\infty}(y-\xi)^2e^{-y^2}dy.$$

$$I_0 = I_1 + I_2 = J_1 + J_2 + I_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\xi)\left(1+2\xi^2\right) - \xi e^{-\xi^2} + \int_{\xi}^{\infty}(y+\xi)^2e^{-y^2}dy - \int_{\xi}^{\infty}(y-\xi)^2e^{-y^2}dy$$

$$J_r = \int_{\xi}^{\infty}\left[(y+\xi)^2-(y-\xi)^2\right]e^{-y^2}dy = 4\xi\int_{\xi}^{+\infty} y e^{-y^2}dy = 2\xi e^{-\xi^2}.$$

$$.I_0 = I_1 + J_r = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\xi)\left(1+2\xi^2\right) - \xi e^{\xi^2} + 2\xi e^{\xi^2}.$$

$$I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\xi)\left(1+2\xi^2\right) + \xi e^{\xi^2},$$

$$I = \left(\frac{2T}{m}\right)^{3/2} I_0 = \left(\frac{2T}{m}\right)^{3/2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\xi)\left(1+2\xi^2\right)+\xi e^{\xi^2}\right],$$

$$\overline{F} = 2m\rho\pi R^2\sqrt{\frac{m}{2T\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^{3/2}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\xi)\left(1+2\xi^2\right)+\xi e^{\xi^2}\right],$$

$$\overline{F} = 4\sqrt{\pi}\rho R^2 T\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\xi)\left(1+2\xi^2\right)+\xi e^{\xi^2}\right].$$

ამოცანა # 5.1

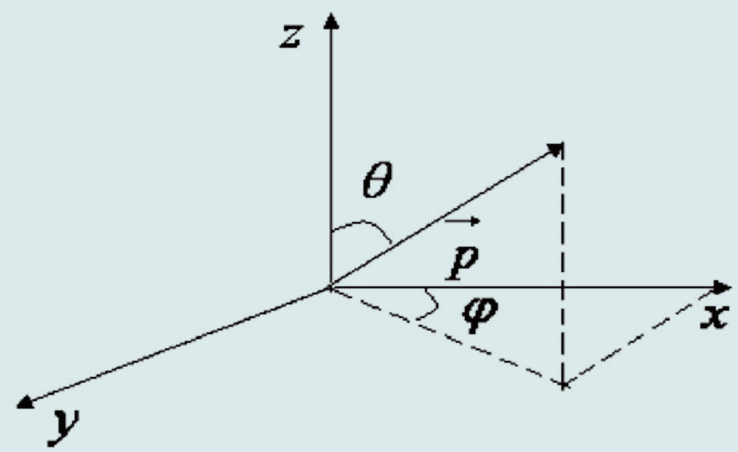
ელექტრულ ველში მყოფი მყარი დიპოლის პოტენციური ენერგია არის: $U(\theta) = -\left(\vec{p},\vec{E}\right) = -pE\cos\theta$,

შემოვიღოთ სფერული კოორდინატთა სისტემა, რომლის z-ღერძი მიმართულია $\vec{E}$-ს გასწვრივ, ხოლო პოლარული და აზიმუტალური კუთხეები აღვნიშნოთ θ-თი და φ-თი შესაბამისად. ალბათობა იმისა, რომ $\vec{p}$-ს დიპოლური მომენტი მიმართულია $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ სხეულოვან კუთხეში იქნება:

$$dw(\theta) = Z^{-1}e^{-\frac{U(\theta)}{T}}d\Omega = \frac{e^{-\frac{U(\theta)}{T}}d\Omega}{\int e^{-\frac{U(\theta)}{T}}d\Omega}.$$

სრული მომენტისათვის გვექნება: $P = Np_z = Np\overline{\cos\theta}$,

სადაც $$\overline{\cos\theta} = \frac{\int_0^{\pi} e^{\frac{pE}{T}\cos\theta}\cos\theta\sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi} e^{\frac{pE}{T}\cos\theta}\sin\theta d\theta}.$$

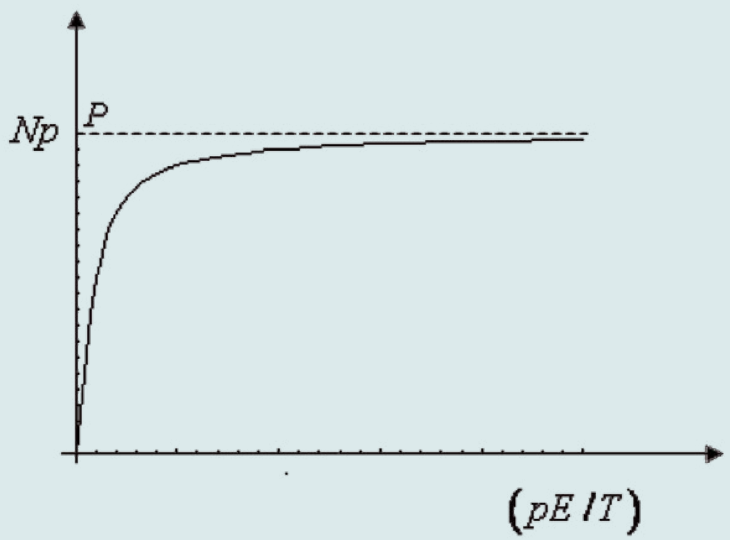


აღვნიშნოთ $\frac{pE}{T}\equiv a$, $\cos\theta=x$, მაშინ

$$\overline{\cos\theta}=\frac{\int_{-1}^{+1}e^{ax}x\,dx}{\int_{-1}^{+1}e^{ax}dx}=\frac{d}{da}\ln\int_{-1}^{+1}e^{ax}dx=\frac{d}{da}\ln\frac{e^{a}-e^{-a}}{a}=\frac{d}{da}\left\{\ln\left(e^{a}-e^{-a}\right)-\ln a\right\}=\frac{e^{a}+e^{-a}}{e^{a}-e^{-a}}-\frac{1}{a}$$

თუ შემოვიღებთ ლანჟევანის ფუნქციას, გვექნება:

$\overline{\cos\theta}=L\left(\frac{pE}{T}\right)$, სადაც $L(a)=ctha-\frac{1}{a}$.



(იხ. ლანჟევანის ფუნქციის გრაფიკი)

განვიხილოთ ზღვრული შემთხვევები:

1. მაღალტემპერატურული მიახლოება $T>>pE$, $(a<<1)$, გამოვიყენოთ $ctha$-ს ტეილორის მწკრივად გაშლა $ctha=\frac{1}{a}+\frac{a}{3}+...$ გვექნება:

$L(pE/T)=\frac{pE}{3T}$,

$P=N\frac{p^2E}{3T}$.

თუ სრული პოლარიზაციის მაღალტემპერატურულ ფორმულას გადავწერთ ასეთი სახით: $P\approx\frac{pE}{3T}\cdot(pN)$, დავინახავთ, რომ იგი ისEშედგება ორი მამრავლისაგან, რომელთაგან თითოეულს შემდეგი ფიზიკური აზრი აქვს:

პირველი მამრავლი $\left(\frac{PE}{3T}\right)$ ახასიათებს მოლეკულური დიპოლების ორიენტაციის ხარისხს. იგი მით მეტია, რაც მეტია ელექტრული ველის დაძაბულობა და მით ნაკლები, რაც ძლიერია სითბური მოძრაობა, რომელიც, თავის მხრივ, T სიდიდით ხასიათდება. მეორე მამრავლი pN წარმოადგენს აირის N მოლეკულის სრულ დიპოლურ მომენტს.

აირის სრული პოლარიზაცია იქნებოდა pN-ის ტოლი, თუ ყველა დიპოლი იქნებოდა ორიენტირებული ველის გასწვრივ. ინტენსიური სითბური მოძრაობის პირობებში, სრული პოლარიზაცია წარმოადგენს მის მხოლოდ მცირე $pE/T<<1$ ნაწილს.

აირის მოლეკულათა უმრავლესობა მოძრაობს, უფრო სწორად კი, ბრუნავს ენერგიით, რომელიც ბევრად აღემატება დიპოლის $U\sim pE$ პოტენციურ ენერგიას ელექტრულ ველში. ამიტომ მოდებული ელექტრული ველი ვერ შეძლებს შეაჩეროს სითბური წარმოშობის მათი ეს მოძრაობა. ამ დროს დიპოლური მომენტის ეს მოძრაობა გასაშუალდება ნულამდე და სრული მომენტი აირს არცერთი მიმართულებით არ გააჩნია. მაგრამ აირში მაინც მოიპოვება მცირე რაოდენობა მოლეკულებისა, რომელთა ბრუნვის კინეტიკური ენერგია ნაკლებია pE-ზე. ასეთი მოლეკულების მოძრაობას, ძირითადად, განაგებს ელექტრული ველი და, როგორც ნაჩვენები იქნება, იწვევს გრეხით რხევებს ველის მიმართულების გარშემო. მხოლოდ ასეთ მოლეკულებს შეაქვთ წვლილი აირის სრულ P დიპოლურ მომენტში.

2. დაბალტემპერატურული მიახლოება $T<<pE,(a>>1)$, $ctha\to 1$, $L(pE/T)\to 1$, $P=Np$. ეს გახლავთ მაქსიმალური პოლარიზაცია, როცა ყველა დიპოლი ერთი მიმართულებით იყურება.

დიელექტრული შეღწევადობა არის $\varepsilon=1+4\pi P$, ამიტომ

$\varepsilon=1+\frac{4}{3}\pi NpL(pE/T)$.

მიღებული შედეგები შეგვიძლია განვაზოგადოთ პარამაგნეტულ სისტემებზე. მართლაც, ვთქვათ, გვაქვს არაურთიერთქმედი მაგნიტური $\vec{\mu}$ მომენტები (სპინები). თითოეული სპინის ენერგია მაგნიტურ ველში

იქნება $U=-\left(\vec{\mu},\vec{H}\right)$, სადაც $\vec{H}$ არის მაგნიტური ველის დაძაბულობა. საბოლოოდ, მაგნიტური პოლარიზაცისათვის მივიღებთ:

$$M\left(\mu H/T\right)=\mu NL\left(\mu H/T\right).$$

მაღალტემპერატურულ მაიხლოებაში $\left(\mu H<<T\right)$: $M \approx N\frac{\mu^2 H}{3T}$. მაგნიტური პოლარიზაციის პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას $\left(H/T\right)$-ზე ეწოდება კიურის კანონი.

ამოცანა # 5.2

ვთქვათ, დიპოლური აირი შედგება ისეთი მოლეკულებისაგან, რომელთა ელექტრულ-დიპოლური მომენტი არის p. სუსტ ელექტრულ ველს ვუწოდებთ ველს, რომლის E დაძაბულობა აკმაყოფილებს პირობას $pE<<T$ (მაღალტემპერატურული მიახლოება). ამ მიახლოებაში გარემოს დაპოლარება მოიცემა ფორმულით $P=Np\frac{pE}{3T}$ (იხ. წინა ამოცანა). ამ მიახლოებაში დიპოლური ენერგია იქნება $U=-N\left(p^2E^2/3T\right)$, ხოლო შესაბამისი სითბოტევადობა, რომელიც გამოითვლება ფორმულით $C_d=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)$, იქნება: $C_d=\frac{Np^2E^2}{3T^2}=\frac{N}{3}\left(\frac{pE}{T}\right)^2$

.

ამოცანა # 5.3

ძლიერი ელექტრული ველი შეესაბამება დაბალტემპერატურულ $T << pE$ მაიხლოებას. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით #5.1 ამოცანიდან, მიიღწევა პოლარიზაციის გაჯერებითი მნიშვნელობა $P = Np$, რაც ყველა დიპოლის ერთმხრივ მიმართვას აღნიშნავს. ამ დროს $\overline{\cos\theta} \approx 1$. ვინაიდან მცირე გადახრებისათვის $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots$, დიპოლის პოტენციური ენერგიისათვის მივიღებთ $U \cong -pE\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$, რაც $\theta = 0$-ის მიდამოში შესრულებულ მცირე რხევებს შეესაბამება.

ამოცანა # 5.4

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\int_0^{\theta_0} \exp(-a\cos\theta) d\cos\theta}{\int_0^{\pi} \exp(-a\cos\theta) d\cos\theta} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \cos\theta = x \\ \cos\theta_0 = x_0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{pE}{kT} = \frac{\int_1^{x_0} e^{-ax} dx}{\int_1^{-1} e^{-ax} dx} = \frac{e^{-ax_0} - e^{-a}}{e^{a} - e^{-a}}$$

$$a = \frac{4.9 \cdot 10^{-30} \cdot 500}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} \cong \frac{25 \cdot 10^{-28}}{3.8 \cdot 10^{-21}} = \frac{25}{3.8} \cdot 10^{-7} \approx 7 \cdot 10^{-7} << 1.$$

$$\frac{\Delta N}{N} \cong \frac{1 - ax_0 - 1 + a}{2a} = \frac{1 - x_0}{2}, \quad x_0 = \arccos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \approx \frac{1 - 0.7}{2} = \frac{0.3}{2} = 0.15.$$

ამოცანა # 5.5

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \quad p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \quad \frac{\mu}{N_A} = m, \quad \mu \text{ მოლური მასა,}$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{mgh}{kT} = -\frac{\mu gh}{RT}, \quad h = \frac{RT\ln\left(p_0/p\right)}{\mu g} = \frac{8.31\cdot 273\cdot \ln(3)}{29\cdot 9.8} \approx 8.76 \text{ კმ.}$$

ამოცანა # 5.6

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{g(\rho_U - \rho_C)V\Delta h}{kT}}, \quad N_A k = R, \quad N_A = \frac{RT\ln\frac{n_2}{n_1}}{Vg\Delta\rho\Delta h}.$$

ამოცანა # 5.7

$$dw(z) = \frac{e^{-\frac{mgz}{kT}}}{\int\limits_0^H \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)dz} = \frac{mg}{kT}\frac{e^{-\frac{mgz}{kT}}}{1-e^{-\frac{mgH}{kT}}}$$

ამოცანა # 5.8

$$\bar{u} = mg\bar{z}, \quad \bar{u} = mg\frac{\int\limits_0^H ze^{-\beta z}dz}{\int\limits_0^H e^{-\beta z}dz}, \quad \beta = \frac{mg}{kT},$$

$$Z = \int\limits_0^H e^{-\beta z}dz, \quad \bar{u} = -mg\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}Z = -mg\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z,$$

$$Z = \frac{1}{\beta\left(1-e^{-\beta H}\right)}, \quad \ln Z = -\ln\beta + \ln\left(1-e^{-\beta H}\right),$$

$$\bar{u} = -mg\left[-\frac{1}{\beta} + \frac{He^{-\beta H}}{1-e^{-\beta H}}\right] = kT\left(1 - \frac{mgH}{kT}\frac{1}{e^{\frac{mgH}{kT}}-1}\right).$$

ამოცანა # 5.9

დედამიწის ველში მყოფი აირის სტატისტიკური ინტეგრალი არის:

$Z=\frac{1}{N!}\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}d\Omega$, სადაც $\varepsilon=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i$ არის სრული ენერგია, $d\Omega=\prod_i d\Omega_i=\prod_i \frac{dq_i dp_i}{h^{3N}}$ – სტატისტიკური წონა. Aამ გამოსახულებათა ჩასმის შემდეგ გვექნება:

$$Z=\frac{1}{h^{3N}N!}\prod_i\int e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}dq_i dp_i\text{, რადგან } \varepsilon_i=\frac{p_i^2}{2m}+mgz_i\text{, მივიღებთ:}$$

$$Z=\frac{1}{N!}Z_{\text{ki n}}^N Z_{\text{pot}}^N\text{, სადაც } Z_{\text{ki n}}=\frac{1}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{p^2}{2m}}dp_x dp_y dp_z,\quad Z_{\text{pot}}=\int_0^H e^{-\frac{mgz}{kT}}dxdydz.$$

მარტივი ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ:

$$Z_{\text{ki n}}=\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2},\quad Z_{\text{pot}}=S\frac{kT}{mg}\cdot\left(1-e^{-\frac{mgH}{kT}}\right),$$

სადაც $S=\iint dxdy$ არის ჰაერის სვეტის განივკვეთის ფართობი.

აირის თავისუფალი ენერგია გამოითვლება ფორმულით:

$F=-kT\ln Z$, ამიტომ თავისუფალი ენერგიისათვის გვექნება:

$F=-kT\left[N\ln Z_{\text{ki n}}\cdot Z_{\text{pot}}-\ln N!\right]$. გამოვიყენოთ სტირლინგის ფორმულა:

$$\ln N!\approx N\ln N-N=N\ln\frac{N}{e}\quad (e \text{ ნეპერის რიცხვია}).$$

ამიტომ $F=-kNT\left[\ln\frac{e}{N}Z_{\text{ki n}}\cdot Z_{\text{pot}}\right]$.

განვიხილოთ ზღვრული შემთხვევები:

1. აირის სვეტი უსასრულოდ მაღალია $H\to\infty$ $(mgh>>kT)$. მაშინ $Z_{\text{pot}}=S\cdot\frac{kT}{mg}$, ხოლო თავისუფალი ენერგია იქნება:

$$F=-kNT\ln\left[\frac{e}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\cdot S\cdot\frac{kT}{mg}\right]\equiv-kNT\ln C(kT)^{5/2},$$

სადაც $C=\frac{eS}{Nmg}\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}$.

$S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ ფორმულის საშუალებით გამოვთვალოთ ენტროპია.

მივიღებთ: $S=kN\left(\ln C(kT)^{3/2}+5/2\right)$.

შინაგანი ენერგია გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულით:

$E=F+TS=F-T\frac{\partial F}{\partial T}$. მივიღებთ: $E=\frac{5}{2}NkT$.

სითბოტევადობისათვის გვექნება: $C_V=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V=\frac{5}{2}kN$.

ვინაიდან იდეალური აირის სითბოტევადობა დედამიწის მიზიდულობის გაუთვალისწინებლად არის $\frac{3}{2}kN$, ამ უკანასკნელის გათვალისწინება kN-ით ზრდის სითბოტევადობას.

2. აირის სვეტი არის დაბალი $mgH<<kT$.

მაშინ $e^{-\frac{mgH}{kT}}\approx 1-\frac{mgH}{kT}$ და $Z_{\text{gj n}}\approx V$ $(V=SH)$, ხოლო თავისუფალი ენერგიისათვის მივიღებთ ნაცნობ გამოსახულებას:

$$F=-NkT\ln\left(\frac{Ve}{N}\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}.$$

მაშასადამე, ამ მიახლოებაში დედამიწის მიზიდულობას არ შეაქვს წვლილი თავისუფალ ენერგიაში. ამიტომ იგი არც ენტროპიასა და სითბოტევადობაში შეიტანს წვლილს.

ამოცანა # 5.10

ამ შემთხვევაში, ბოლცმანის განაწილებას უნდა ჰქონდეს სახე $n(r) = c\exp\left\{\gamma \frac{mM}{rkT}\right\}$, სადაც c მანორმირებელი კონსტანტაა და განისაზღვრება შემდეგი ინტეგრალით:

$$4\pi\int_R^\infty n(r)r^2 dr = 4\pi c\int_R^\infty e^{a/r} r^2 dr = N.$$

რადგან $a \equiv \gamma Mm/kT > 0$ ინტეგრალი ზედა საზღვარზე განშლადია, ეს იმის მაუწყებელია, რომ დედამიწის მიზუდულობას არ შესწევს უნარი განახორციელოს აირის სტატისტიკური წონასწორობა.

ამ გარემოებით არის გამოწვეული პლანეტათა ატმოსფეროს თანდათანობით კარგვა. შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ მთვარეზე ეს პროცესი უკვე დასრულებულია.

ამოცანა # 5.11

ცენტრიფუგაში მყოფი აირის m მასის მქონე მოლეკულის პოტენციური ენერგიაა $U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$, ალბათობათა განაწილების ფუნქცია –

$$dw = Z^{-1} e^{\frac{mr^2\omega^2}{2kT}} rdr.$$

ნორმირების პირობიდან $\left(\int_0^R dw = 1\right)$ გამოვთვალოთ Z:

$$Z = 2\pi\int_0^R e^{\frac{mr^2\omega^2}{2kT}} rdr = 2\pi\frac{kT}{m\omega^2}\left(e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}} - 1\right).$$

ალბათობათა განაწილებისათვის გვექნება: $dw = \frac{m\omega^2}{kT}\frac{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}}}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}} - 1} rdr$.

გამოვთვალოთ საშუალო პოტენციური ენერგია:

$$\overline{U} = -\frac{m\omega^2\overline{r^2}}{2}, \quad \overline{r^2} \sim \int_0^R e^{\frac{m\omega^2r^2}{2kT}} r^3 dr = \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m\omega^2}\right)^2\left[1 + e^{\frac{m\omega^2R^2}{kT}}\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT} - 1\right)\right],$$

$$\overline{U} = -\frac{1 + e^{\frac{m\omega^2R^2}{kT}}\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT} - 1\right)}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{kT}} - 1}\cdot kT.$$

ამოცანა # 5.12

ალბათობა იმისა, რომ მოლეკულა ცენტრიდან r მანძილზე იმყოფება, ბოლცმანის განაწილების თანახმად, არის:

$$dw(r) = n(r)dr = \frac{m\omega^2}{kT}\frac{e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}}{e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}}-1}rdr\,,$$

სადაც $n(r)$ არის ალბათობათა სიმკვრივე. ამიტომ m_1 მასის მქონე ნაწილაკთა სიმკვრივის შეფარდება m_2 მასის მქონე ნაწილაკის სიმკვრივესთან ცილინდრის შიდა ზედაპირის მახლობლად იქნება:

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_{r=R} = \frac{m_1}{m_2}\frac{e^{\frac{m_2\omega^2 R^2}{2kT}}-1}{e^{\frac{m_1\omega^2 R^2}{2kT}}-1}\cdot e^{\frac{(m_1-m_2)\omega^2 R^2}{2kT}}\,,$$

ხოლო ცილინდრის ღერძზე:

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_{r=0} = \frac{m_1}{m_2}\frac{e^{\frac{m_2\omega^2 R^2}{2kT}}-1}{e^{\frac{m_1\omega^2 R^2}{2kT}}-1},$$ მაშასადამე, აირთა განცალების კოეფიციენტისათვის მივიღებთ: $q = \frac{(n_1/n_2)_{r=R}}{(n_1/n_2)_{r=0}} = e^{\frac{(m_1-m_2)\omega^2 R^2}{2kT}}$.

ამოცანა # 5.13

როგორც ვიცით, $n(r) = n_0 e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}}$. ამიტომ $\frac{n\left(r=\frac{1}{2}R\right)}{n(r=R)} = e^{-\frac{3m\omega^2 R^2}{8kT}}$,

სადაც $m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$.

ამოცანა # 5.14

მხედველობაში მისაღებია "არქიმედეს" ტიპის ძალა, რომელიც მიმართული იქნება ღერძისაკენ და ამიტომ გამოიწვევს კოლოიდური ნაწილაკის "შემსუბუქებას". წინწკლებში მოქცეული ტერმინების შერჩევისას, ჩვენ ვისარგებლეთ იმ ანალოგიით, რომელიც არსებობს მბრუნავ ცენტრიფუგაში ნაწილაკზე მოქმედ ცენტრიდანულ ძალასა და სიმძიმის ძალას შორის. ამის გათვალისწინება გამოიწვევს იმას, რომ ეფექტური ცენტრიდანული ძალა იქნება $V\left(\rho-\rho_0\right)\omega^2 r$, ხოლო პოტენციური ენერგია – $U(r)=-\dfrac{V\left(\rho-\rho_0\right)\omega^2 r^2}{2}$. ამიტომ $\alpha=\dfrac{n(r_2)}{n(r_1)}=\exp\left\{\dfrac{V\left(\rho-\rho_0\right)\omega^2\left(r^2-r_0^2\right)}{2kT}\right\}$,

$m=\rho V$, აქედან კი – $m=\dfrac{2kT\rho\ln\alpha}{\left(\rho-\rho_0\right)\left(r^2-r_0^2\right)\omega^2}$.

ამოცანა # 5.15

$$\overline{r^2}=\frac{2kT}{m\omega^2}\cdot\frac{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}}\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}-1\right)+1}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}}-1}.$$

ამოცანა # 5.16

მბრუნავ ცენტრიფუგაში მყოფი აირის ენერგია შედგება ორი ჯამისგან:
$E = E_{tr} + E_{int}$. E_{tr} არის აირის მოლეკულათა გადატანითი მოძრაობის საშუალო კინეტიკური ენერგია, როცა $\omega = 0$. ის ჩვენ უკვე გამოვთვალეთ: $E_{tr} = N\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}NkT$, ხოლო E_{int} საშუალო ენერგიაა, რომელსაც აირი იძენს მბრუნავ ცენტრიფუგაში: $E_{int} = N\frac{m\omega^2\overline{r^2}}{2}$, ესეც გამოთვლილი გვაქვს: $E_{int} = NkT\frac{1-\exp\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)\left(1-\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)}{1-\exp\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)}$, სითბოტევადობა გამოითვლება ფორმულით: $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$, ჯამური ენერგიის გამოსახულების გაწარმოებით მივიღებთ:

$$C_V = \frac{3}{2}Nk + Nk\left[1-\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)}{\left(1-\exp\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)\right)^2}\right].$$

ამოცანა # 5.17

წონასწორობა სიმძიმის ველში და ცენტრიფუგაში წარმოქმნილ ველში ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მყარდება. ამიტომ ალბათობათა გამრავლების კანონის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ: $dw = w(z)dzw(r)rdr$. აქ $w(z)dz$ ასახავს დედამიწის მიზიდულობის ველში სიმაღლის მიხედვით ალბათობათა განაწილებას, ხოლო $w(r)rdr$-მბრუნავ ცენტრიფუგაში მოლეკულათა ალბათობის რადიალურ განაწილებას. ორივე მათგანი წინა ამოცანებში უკვე გამოთვლილი გვაქვს. მათი გაერთიანება გვაძლევს:

$$dw(z,r) = \frac{mg}{kT}\cdot\frac{e^{-\frac{mgz}{kT}}}{1-e^{-\frac{mgz}{kT}}}\cdot\frac{m\omega^2}{kT}\cdot\frac{e^{\frac{m\omega^2r^2}{2kT}}}{e^{\frac{m\omega^2r^2}{2kT}}-1}dzdrdr\ .$$

ამოცანა # 5.25

დედამიწის მიზიდულობის ველში მყოფი m მასის მქონე ჟანგბადის მოლეკულის პოტენციური ენერგია არის: $U(r)=\gamma mM\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)$, სადაც γ არის გრავიტაციული მუდმივა, $M-$ დედამიწის მასა, $r_0\approx 6.4\cdot 10^6$ მ დედამიწის რადიუსი, r – მანძილი დედამიწის ცენტრიდან მოლეკულამდე. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\gamma\frac{mM}{r_0}=mgr_0$, პოტენციური ენერგიისათვის გვექნება: $U(r)=mgr_0^2\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)$.

ბოლცმანის განაწილების მიხედვით დავწეროთ ერთეულოვან სხეულოვან კუთხეში მყოფი მოლეკულათა რიცხვის სიმაღლის მიხედვით განაწილების ფუნქცია: $n(r)=n_0\exp\left\{-\frac{mgr_0^2}{kT}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)\right\}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ უსასრულობაში მოლეკულათა რიცხვი ერთეულოვან სხეულოვან კუთხეში არ უდრის ნულს: $n(\infty)=n_0\exp\left\{-\frac{mgr_0}{kT}\right\}$. თუ გავითვალისწინებთ მოცემულობათა რიცხვით მნიშვნელობებს: $\frac{mgr_0}{kT}\approx 800$. მივიღეთ, რომ დედამიწის მიზიდულობას დაძლევს ჟანგბადის მოლეკულათა $\left(n(\infty)/n_0\right)\approx 10^{-344}$ ნაწილი.

ამოცანა # 7.1

იზოთერმული პროცესის დროს $T=const$, $dA=-pdV$, აქედან $A=-\int_{V_1}^{V_2}pdV$. გამოვიყენოთ იდეალური აირის მდგომარეობის განტოლება $pV=NT$, აქედან $p=\frac{NT}{V}$, ჩავსვათ ეს მუშაობის ფორმულაში და მივიღებთ: $A=-\int_{V_1}^{V_2}pdV=-NT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=-NT\ln V\Big|_{V_1}^{V_2}=NT\ln\frac{V_1}{V_2}$, ანდა რადგანაც მდგომარეობის განტოლებიდან $\frac{V_1}{V_2}=\frac{P_2}{P_1}$, მივიღებთ, რომ $A=-\int_{V_1}^{V_2}pdV=NT\ln\frac{p_2}{p_1}$.

ამოცანა # 7.2

ადიაბატური პროცესის დროს $Q=0$, ამიტომ თერმოდინამიკის პირველი კანონის თანახმად – $A=E_2-E_1$, ე.ი. მუშაობა უდრის პროცესის დროს ენერგიის ცვლილებას. იდეალური გაზისთვის მუდმივი სითბოტევადობით $E=E_0+C_V T$, აქედან $E_2-E_1=C_V\left(T_2-T_1\right)$, ადიაბატური პროცესის დროს $TV^{\gamma-1}=const$, ანუ $T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_2^{\gamma-1}$, აქედან $E_2-E_1=C_VT_2\left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}-1\right)=C_VT_1\left(1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)$.

ამოცანა # 7.3

იზოქორული პროცესის დროს $V=const$, ამიტომ $A=0$, აქედან $Q=E_2-E_1=C_V\left(T_2-T_1\right)$.

ამოცანა # 7.4

იზობარული პროცესის დროს $p = const$, ამიტომ

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV = -p\left(V_2 - V_1\right).$$

სითბოს რაოდენობა $Q = C_p\left(T_2 - T_1\right)$.

ამოცანა # 7.5

შესრულებული მუშაობა:

$$A = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV = -a\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = -a\int_{V_1}^{V_2} V^{-n}dV = \frac{a}{n-1}V^{1-n}\Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{a}{n-1}\left(V_2^{1-n} - V_1^{1-n}\right).$$

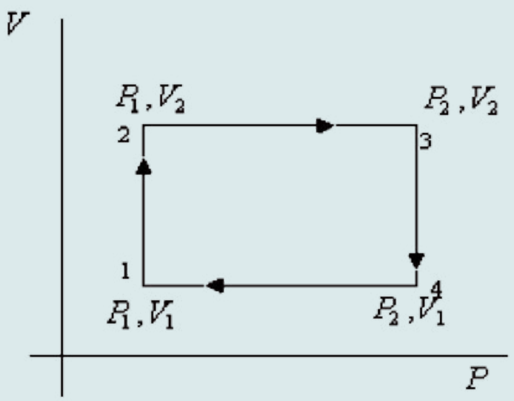
რადგანაც, თერმოდინამიკის პირველი კანონის თანახმად, $E_2 - E_1 = A + Q$, ამიტომ $Q = \left(E_2 - E_1\right) - A$, $E_2 - E_1 = C_V\left(T_2 - T_1\right)$.

$T = \frac{pV}{N} = \frac{a}{N}V^{1-N}$, აქედან $E_2 - E_1 = C_V\frac{a}{N}\left(V_2^{1-N} - V_1^{1-N}\right)$.

$$Q = \left(E_2 - E_1\right) - A = C_V\frac{a}{N}\left(V_2^{1-N} - V_1^{1-N}\right) + \frac{a}{1-n}\left(V_2^{1-n} - V_1^{1-n}\right) =$$

$$= \left(C_V\frac{a}{N} + \frac{a}{1-n}\right)\left(V_2^{1-n} - V_1^{1-n}\right).$$

ამოცანა # 7.6



წრიული პროცესის დროს გაზის შინაგანი ენერგია არ იცვლება, რადგანაც სისტემა ისევ უბრუნდება პირვანდელ მდგომარეობას. ამიტომ $Q = -A$. ხოლო მუშაობა ცალკეულ უბნებზე შესრულებულ მუშაობათა ჯამის ტოლია:

$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$,

$A_{12} = -P_1(V_2 - V_1)$, $A_{23} = A_{41} = 0$, რადგან ამ უბნებზე გაზის მოცულობა არ იცვლება, $A_{34} = -P_2(V_1 - V_2)$.

აქედან $A = (V_2 - V_1)(P_2 - P_1)$.

ამოცანა # 7.7

$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$,

$A_{12} = 0$, რადგან ამ დროს აირის მოცულობა არ იცვლება.

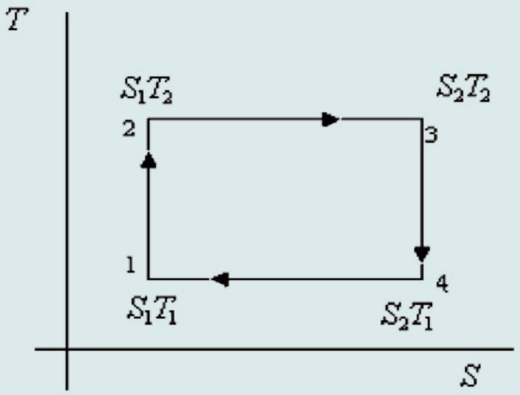
$$A_{23} = -\int_2^2 pdV = \left(p = \frac{NT}{V}\right) = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{NT_2}{V} dV = -NT_2 \ln\Big|_{V_1}^{V_2} = -NT_2 \ln\frac{V_2}{V_1},$$

$A_{34} = 0$,

A $$A_{41} = -\int_4^1 pdV = -NT_1 \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = -NT_1 \ln V\Big|_{V_2}^{V_1} = -NT_1 \ln\frac{V_1}{V_2}.$$

A $$A = N(T_2 - T_1)\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

ამოცანა # 7.8



ამ შემთხვევაში, სითბოს რაოდენობა, რომელსაც იღებს სისტემა, ტოლია ცალკეულ უბნებზე მიღებული სითბოს რაოდენობების ჯამისა:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}.$$

$Q_{12} = \int_1^2 TdS = 0,$ რადგანაც პროცესი ადიაბატურია,

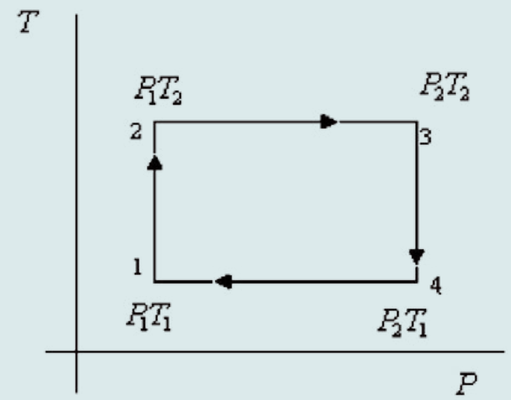
$$Q_{23} = \int_2^3 TdS = T_2 \int_{S_1}^{S_2} dS = T_2\left(S_2 - S_1\right),$$

$$Q_{34} = \int_3^4 TdS = 0,$$

$$Q_{41} = \int_4^1 TdS = T_1 \int_{S_2}^{S_1} dS = T_2\left(S_1 - S_2\right),$$

$$Q = \left(T_2 - T_1\right)\left(S_2 - S_1\right).$$

ამოცანა # 7.9



$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41},$$

$$A_{12} = -p_1 \int_1^2 dV = -p_1\left(V_2 - V_1\right) = -\left(p_1V_2 - p_1V_1\right) =$$

$$= -\left(NT_2 - NT_1\right) = N\left(T_1 - T_2\right).$$

$$A_{23} = -\int_2^3 pdV = -NT_2 \int_2^3 \frac{dV}{V} = -NT_2 \ln\frac{V_3}{V_2}.$$

იდეალური აირის მდგომარეობის განტოლების თანახმად:

$$V_3 = \frac{NT_2}{p_2}, \quad V_2 = \frac{NT_2}{p_1}.$$

ამიტომ

$$A_{23} = -NT_2 \ln\frac{p_1}{p_2} = NT_2 \ln\frac{p_2}{p_1}.$$

$$A_{34} = -p_2 \int_3^4 dV = -p_2\left(V_4 - V_3\right) = -\left(p_2V_4 - p_2V_1\right) = -\left(NT_1 - NT_2\right) = N\left(T_2 - T_1\right).$$

$$A_{41} = -\int_4^1 pdV = -NT_1 \int_4^1 \frac{dV}{V} = -NT_1 \ln\frac{V_1}{V_2} = -NT_1 \ln\frac{p_2}{p_1} = NT_1 \ln\frac{p_1}{p_2}.$$

$$p_2V_4 = NT_1, \; p_1V_1 = NT_1, \; \frac{V_4}{V_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = N\left(T_1 - T_2\right) + NT_2 \ln\frac{p_2}{p_1} + N\left(T_2 - T_1\right) + NT_1 \ln\frac{p_1}{p_2}.$$

$$A = N\left(T_2 - T_1\right)\ln\frac{p_2}{p_1}.$$

ამოცანა # 7.14

$$F = -kT\ln Z,\quad Z = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2},\quad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T,$$

$$\ln Z = N\left\{\ln V + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right) - \ln N!\right\},\quad \ln N! \approx N\ln N - N,$$

$$\ln Z = N\left\{\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right) + 1\right\},\ p = -kT\frac{\partial}{\partial V}\ln z = \frac{NkT}{V},\quad N = N_A/\mu,$$

μ -ჰელიუმის ატომის მოლური მასა $\mu = 4$ გრ, $N = \dfrac{6\cdot 10^{23}}{4} \approx 1.5\cdot 10^{23}$.

$$F = NkT\left\{\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right) + 1\right\} =$$

$$= 1.5\cdot 10^{23}\cdot 1.4\cdot 10^{-23}\cdot 300\cdot$$

$$\cdot\left\{\ln\left(\frac{10^{-2}}{1.5\cdot 10^{-23}}\right) + \frac{3}{2}\ln\frac{2\cdot 3.14\cdot 10^{-3}\cdot 1.4\cdot 10^{-23}\cdot 300}{10^{-68}} + 1\right\} =$$

$$= 630\cdot\left\{\ln\left(\frac{2}{3}\cdot 10^{-21}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(6\cdot 3.14\cdot 1.4\cdot 10^{44}\right) + 1\right\} = 6.87\cdot 10^{4}\ \text{ჯ}.$$

ამოცანა # 7.15

$$E = kT^2 \frac{\partial}{\partial T}\ln Z, \qquad S = \frac{E}{T} + k\ln Z, \qquad \frac{\partial}{\partial T}\ln Z = \frac{3}{2}\frac{N}{T},$$

$$E = kT^2 \cdot \frac{3}{2}\frac{N}{T} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}pV.$$

$$E = \frac{3}{2}\cdot 2.76\cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 414 \text{ ჯ}.$$

$$S = \frac{(3/2)NkT}{T} + Nk\left\{\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi mkT}{h^2} + 1\right\} =$$

$$= Nk\left\{\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi mkT}{h^2} + \frac{5}{2}\right\}.$$

ამოცანა # 7.16

$S = Nk\left[\ln V + \frac{3}{2}\ln E\right] + const.$ ფორმულაში გავითვალისწინოთ, რომ $N = \frac{M}{\mu}N_A$, (N_A ავოგადროს რიცხვი). $Nk = \frac{M}{\mu}R$, $(R = N_A \cdot k)$, μ- მოლური მასა. ენტროპიისათვის მივიღებთ:

$S = \frac{M}{\mu}R\left\{\ln V + \frac{3}{2}\ln T\right\} + const$, ენტროპიის ცვლილებისათვის:

$$S_2 - S_1 = \frac{M}{\mu}R\{\ln 2V - \ln V\} = \frac{M}{\mu}R\ln 2.$$

ამ ამოცანის გადაწყვეტა შეიძლება თერმოდინამიკის პირველი კანონის გამოყენებით, სტატისტიკური ინტეგრალის გარეშე. მართლაც, თერმოდინამიკის პირველი კანონის თანახმად:

$dE = -pdV + TdS$, მაგრამ რადგან $T = const$ შინაგანი ენერგია არ იცვლება $dE = 0$, აქედან ენტროპიისთვის მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dS}{dV} = \frac{p}{T}.$$

თუ გამოვიყენებთ კლაპეირონის განტოლებას $pV = \frac{M}{\mu}RT$, გვექნება

$$\frac{dS}{dV} = \frac{M}{\mu}R\frac{1}{V}.$$

ამ განტოლების გაინტეგრება მოგვცემს: $S_2 - S_1 = \frac{M}{\mu}R\ln 2.$

ამოცანა # 7.17

$$S=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_V=Nk\ln\left[\frac{eV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right]+\frac{3}{2}Nk=Nk\ln\frac{V}{N}+C_V\ln kT+\frac{5}{2}Nk+Nkj$$

$$j=\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}.$$

$$S_1^{(0)}=N_1k\ln\frac{V_1}{N_1}+N_1f(T),\ S_2^{(0)}=N_2k\ln\frac{V_2}{N_2}+N_2f(T),$$

$$S_1=N_1k\ln\frac{V_1+V_2}{N_1}+N_1f(T),$$

$$S_2=N_2k\ln\frac{V_1+V_2}{N_2}+N_2f(T),$$

$$\Delta S=S-S^{(0)}=N_1k\ln\frac{V_1+V_2}{N_1}+N_2k\ln\frac{V_1+V_2}{N_2}-N_1k\ln\frac{V_1}{N_1}-N_2k\ln\frac{V_2}{N_2}=$$

$$=N_1k\ln\frac{V_1+V_2}{V_1}+N_2k\ln\frac{V_1+V_2}{V_2}.$$

თუ გამოვყენებთ იდეალური აირის მდგომარეობის განტოლებას $pV=NkT$,

მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{V_1+V_2}{V_1}=\frac{(N_1+N_2)kT}{p}:\frac{N_1kT}{p}=\frac{(N_1+N_2)}{N_1}.$$

$$\frac{V_1+V_2}{V_2}=\frac{N_1+N_2}{N_2}.$$

$$\Delta S=N_1k\ln\frac{N_1+N_2}{N_1}+N_2k\ln\frac{N_1+N_2}{N_2}.$$

ამოცანა # 7.18

ენტროპია ორი აირისა შერევამდე იქნება:

$$S^{(0)}=N_1k\ln\frac{V_1}{N_1}+N_2k\ln\frac{V_2}{N_2}+(N_1+N_2)f(T).$$

შერევის შემდეგ:

$$S=(N_1+N_2)k\ln\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2}+(N_1+N_2)f(T).$$

ენტროპიის ცვლილებისათვის გვექნება:

$$\Delta S=S-S^{(0)}=(N_1+N_2)k\ln\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2}-N_1k\ln\frac{V_1}{N_1}-N_2k\ln\frac{V_2}{N_2}.$$

$$\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2}=\frac{V_1}{N_1}=\frac{V_2}{N_2}=\frac{kT}{p}.$$

ამიტომ

$$\Delta S=(N_1+N_2)k\ln\frac{kT}{p}-N_1k\ln\frac{kT}{p}-N_2k\ln\frac{kT}{p}.$$

$$\Delta S\equiv 0.$$

ამოცანა # 7. 21

$$Z = Z_{\mathrm{kin}} \cdot Z_{\mathrm{rot}}, \quad Z_{\mathrm{rot}} = \left[\frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{M_1^2 + M_2^2}{2IkT}} dM_1 dM_2 \right]^N = \left[\frac{4\pi IkT}{h^2} \right]^N .$$

$$F_{\mathrm{rot}} = -kT \ln Z_{\mathrm{rot}} = -NkT \ln \frac{4\pi IkT}{h^2} .$$

E $$E_{\mathrm{rot}} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_{\mathrm{rot}} = NkT.$$

$$S_{<\mathrm{H}} = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = Nk \left(1 + \ln \frac{4\pi IkT}{h^2} \right).$$

ამოცანა # 7.22

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = Nk.$$ (იხ. წინა ამოცანა).

ამოცანა # 7.23

$$l = r_0 + \overline{q} = r_0 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q e^{-\frac{\mu\omega^2 q^2}{2kT}} dq = r_0 \,.$$

ამოცანა # 7.24

1 მოლი ორატომიანი აირის ბრუნვითი მოძრაობის თავისუფალი ენერგია არის:

$$F_{\mathrm{rot}} = -RT \ln \frac{4\pi IkT}{h^2},$$

აქედან, თავისუფალი ენერგიის ცვლილებისთვის მივიღებთ:

$$\Delta F_{\mathrm{rot}} = -R\left\{T_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \Delta T \ln \frac{8\pi^2 IkT}{h^2}\right\} \approx 2.3\cdot 10^3 \text{ ჯ.}$$

1 მოლი ორატომიანი აირის ბრუნვითი მოძრაობის ენტროპია არის:

$$S_{\mathrm{rot}} = R\left(1 + \ln \frac{4\pi IkT}{h^2}\right),$$

ამიტომ ენტროპიის ცვლილებისათვის მივიღებთ:

$$\Delta S_{\mathrm{rot}} = R \ln \frac{T_2}{T_1} \approx 12 \text{ ჯოული/გრად.}$$

ამოცანა # 7.25

$\Delta E = \frac{5}{2}\nu RT = 4.2\cdot 10^6$ ჯოული, $\Delta S = \frac{5}{2}\nu R \ln\frac{T_2}{T_1} = 1.2\cdot 10^4$ ჯოული/გრად.

ამოცანა # 7.26

როგორც ვიცით, $a = 2\pi \int_{2r_0}^{\infty} |U(r)| r^2 dr = 2\pi U_0 r_0^n \int_{2r_0}^{\infty} r^{2-n} dr = 2\pi U_0 \frac{2^{3-n}}{3-n} r_0^3$.

ამოცანა # 7.27

$$a = 2\pi\alpha\int_a^\infty r^{2-n}dr = -2\pi\alpha\frac{d^{3-n}}{3-n}, \qquad b = 4v_0 = \frac{2\pi d^3}{3},$$

$$P = \left(\frac{N}{V}\right)^2 kTb - \left(\frac{N}{V}\right)^2 a = \left(\frac{N}{V}\right)^2 v_0\left(4kT - \frac{3\alpha}{d^n(3-n)}\right).$$

ამოცანა # 7.28

შერევის შემდეგ თითოეული აირი დაიკავებს $2V$ მოცულობას ისე, თითქოს მეორე აირი არ არსებობდეს. ამ დროს თითოეული აირი გაფართოვდება V-დან $2V$-მდე ისე, რომ მუშაობას არ შეასრულებს $A=0$. ენტროპიის ცვლილება იქნება $\Delta S_1 = \frac{M_1}{\mu_1}R\ln 2$ (I აირისათვის), $\Delta S_2 = \frac{M_2}{\mu_2}R\ln 2$ (II აირისათვის).

ამრიგად, დიფუზიის შედეგად ენტროპიის ცვლილება იქნება:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2}\right)R\ln 2 > 0.$$

ამოცანა # 7.29

ბრუნვითი მოძრაობის j-ურ ენერგეტიკულ დონეზე მყოფი მოლეკულათა რიცხვი (ანუ j-ური დონის "დასახლება") განისაზღვრება ფორმულით $n_j = \dfrac{N}{Z_h}(2j+1)e^{-\frac{T_C}{T}j(j+1)}$, სადაც $T_C = \dfrac{h^2}{8\pi^2 Ik}$ არის ბრუნვითი მოძრაობის მახასიათებელი ტემპერატურა, I – ინერციის მომენტი. ორატომიანი მოლეკულათა უმრავლესობისათვის ეს იმდენად მცირე სიდიდეა, რომ ჩვეულებრივ ტემპერატურებზე სრულდება მაღალტემპერატურული მიახლოების პირობა $T_C << T$. ამ მიახლოებაში სტატისტიკური ჯამისთვის გვაქვს $Z_h \approx T/T_C$. ამიტომ $n_j = N\dfrac{T_C}{T}(2j+1)e^{-\frac{T_C}{T}j(j+1)}$, "დასახლებათა" j-ის მიხედვით განაწილებას უკეთ წარმოვიდგენთ, თუ ვიპოვით j-ს იმ მნიშვნელობას $j = j_{\max}$, რომლისთვისაც ამ განაწილებას მაქსიმუმი აქვს: $\left.\dfrac{dn_j}{dj}\right|_{j=j_{\max}} = 0.$

$$\frac{dn_j}{dj} = N\frac{T_C}{T}e^{-\frac{j(j+1)T_C}{T}}\left[2 - \frac{T_C}{T}(2j+1)^2\right] = 0,$$

საიდანაც $j_{\max} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2\dfrac{T}{T_C}} - 1\right).$

მაშასადამე, მაქსიმალური ინტენსივობა ექნება იმ სპექტრალურ ხაზებს, რომლებიც $j = j_{\max}$-ის მიდამოში მყოფ დონეებს შორის გადასვლებთან იქნება დაკავშირებული.

ამოცანა # 7.30

ჯერ გამოვთვალოთ O_2-ის ბრუნვითი მოძრაობის მახასიათებელი ტემპერატურა:

$$T_C = \frac{h^2}{8\pi^2 kI_{O_2}} = \frac{\hbar^2}{2kI_{O_2}} = \frac{10^{-2\cdot 34}}{2\cdot 1.4\cdot 10^{-23}\cdot 1.9\cdot 10^{-46}} \approx 2\ {}^0K$$

ვინაიდან O_2-ის მახასიათებელი ტემპერატურა $T_C \approx 2\ {}^0K$ ძალზე მცირეა, რეალურ ვითარებაში ყოველთვის განხორციელდება მაღალტემპერატურული მიახლოება $T >> T_C$. გავითვალისწინოთ აგრეთვე O_2-ის სიმეტრიულობა ჟანგბადის ცალკეულ ატომთა გადასმის მიმართ. ასეთი გადასმა არ წარმოქმნის ახალ ფიზიკურ მდგომარეობას. ეს ფაქტი გათვალისწინებული იქნება, თუ შესაბამის სტატისტიკურ ჯამს გავყოფთ 2-ზე. ეს კი საბოლოო ფორმულებში შეიძლება გავითვალისწინოთ $T_C = 2T_C$ შეცვლით. ამიტომ გვექნება:

$$E = NkT, \quad F = -NkT\ln\frac{T}{2T_C}, \quad S = Nk\left(1 + \ln\frac{T}{2T_C}\right).$$

თერმოდინამიკულ ფუნქციათა იმ ცვლილებათათვის, რომლებიც T ტემპერატურის $T + \Delta T$-მდე გაზრდით არის გამოწვეული, გვექნება:

$$\Delta E = Nk\Delta T, \qquad \Delta F = -Nk\left\{\Delta T\ln\frac{T+\Delta T}{2T_C} + T\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)\right\},$$

$$\Delta S = Nk\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right).$$

რიცხვითი მოცემულობის ჩასმის შემდეგ და იმის გათვალისწინებით, რომ

$N = N_A$ და $N_A k = R$ მივიღებთ:

$\Delta E = 416$ კჯ, $\Delta F = -2.2\cdot 10^3$ კჯ, $\Delta S = 1.4$ კჯ.

ამოცანა # 7.31

გამოვთვალოთ H_2-ის რხევითი მოძრაობის მახასიათებელი ტემპერატურა $T_C = \frac{\hbar\omega_0}{k} = \frac{10^{-34} \cdot 8.3 \cdot 10^{14}}{1.4 \cdot 10^{-23}}$ □ $6000\ {}^0K$.ამოცანაში განიხილება ტემპერატურული ინტერვალი $\left[300^0, 350^0\right]K$, რომელიც ბევრად ნაკლებია მახასიათებელ ტემპერატურაზე $T_C = 6000\ {}^0K$. ამიტომ ამ ამოცანის გადასაწყვეტად დაგვჭირდება თერმოდინამიკური ფუნქციები დაბალტემპერატურულ მიახლოებაში $\left(T << T_C\right)$:

$$E_{rot} \approx \frac{1}{2}NkT_C + NkT_C e^{-T_C/T}, \qquad C_{rot} \approx Nk\left(\frac{T_C}{T}\right)^2 e^{-\frac{T_C}{T}}, \qquad F_{rot} \approx \frac{1}{2}NkT_C,$$

$S_{rot} \approx 0$. სადაც $E_0 = \frac{1}{2}NkT_C = \frac{1}{2}N\hbar\omega_0$ არის ეგრეთ წოდებული ნულოვანი რხევის ენერგია.

თერმოდინამიკურ ფუნქცათა იმ ცვლილებათათვის, რომლებიც $T-$ტემპერატურის $T+\Delta T$-მდე გაზრდით არის გამოწვეული, გვექნება:

$$\Delta E = Nk\left(T_C/T\right)^2 e^{-T_C/T}, \qquad \Delta C_V = Nk\left(T_C/T\right)^4 \cdot e^{-T_C/T}\left(\Delta T/T_C\right), \quad \Delta F = 0,$$

$\Delta S = 0$.

რიცხვთა მოცემულობების ჩასმით და იმის გათვალისწინებით, რომ $N = N_A$ და $N_A k = R$, მივიღებთ:

$$\Delta E = 8.3 \cdot 20^2 \cdot 50 \cdot e^{-20} = 0.000342152$$

$$\Delta C_V = 8.30 \cdot 20^4 \cdot e^{-20} \cdot \left(50/300\right) \approx 0.00273721.$$

ამოცანა # 7.32

ამოცანაში მითითებული მოლეკულათა ინერციის მომენტები ცნობილია:

$I_{H_2} \approx 0.05 \cdot 10^{-46}$ კგ.მ^2, $I_{N_2} \approx 1.4 \cdot 10^{-46}$ კგ.მ^2, $I_{O_2} \approx 1.9 \cdot 10^{-46}$ კგ.მ^2.

ამ მონაცემთა საშუალებით შეიძლება გამოთვლილ იქნას შესაბამისი აირების მახასიათებელი ტემპერატურები:

$$\left(T_C\right)_{H_2} \approx 71\ {}^0K, \quad \left(T_C\right)_{N_2} \approx 2.6\ {}^0K, \quad \left(T_C\right)_{O_2} \approx 2\ {}^0K.$$

ბრუნვითი მოძრაობის „გაქრობის“ (ან „გაყინვის“) პირობა არის $T << T_C$.

ახლა გავიხსენოთ, რომ ნორმალური წნევის პირობებში აირთა გათხევადების ტემპერატურებია:

$$\left(T_{luquid}\right)_{H_2} \approx 20\ {}^0K, \quad \left(T_{luquid}\right)_{N_2} \approx 77\ {}^0K, \quad \left(T_{luquid}\right)_{O_2} \approx 80\ {}^0K.$$

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ აზოტი და ჟანგბადი გაციებისას უფრო ადრე იქცევა სითხედ, ვიდრე მათში "გაიყინება" ბრუნვითი მოძრაობა და გაქრება მისი წვლილი სითბოტევადობაში. წყალბადში კი, პირიქით – გაციებისას $77\ {}^0K$-დან იწყება ბრუნვითი მოძრაობის "გაყინვა", რომლის დამზერა შეიძლება $20\ {}^0K$-მდე.

ამოცანა # 8.1

ჯერ გამოვთვალოთ ერთი კვანტური ოსცილატორის სტატისტიკური ჯამი:

$z=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-E_n/T}$, სადაც E_n კვანტური ოსცილატორის ენერგიის საკუთარი მნიშვნელობებია $E_n=\hbar\omega(n+1/2)$.

აქედან $z=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-E_n/T}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\hbar\omega(n+1/2)}{T}}=e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\frac{-\hbar\omega n}{T}}=\dfrac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}}=\dfrac{1}{2sh\dfrac{\hbar\omega}{2T}}$.

აქედან თავისუფალი ენერგიისათვის გვაქვს:

$F=-T\ln z$, ხოლო ენერგიისათვის: $E=F+TS=E-T\dfrac{\partial F}{\partial T}=$

$=-T\ln z+T\ln z+T^2\dfrac{\partial\ln z}{\partial T}=T^2\dfrac{\partial\ln z}{\partial T}$.

თუ აქ ჩავსვამთ თავისუფალი ენერგის გამოსახულებას და გავაწარმოებთ, მაშინ ერთი ოსცილატორის საშუალო ენერგიისათვის მივიღებთ:

$$\bar{E}=T^2\frac{\partial\ln z}{\partial T}=T^2\frac{\partial}{\partial T}\ln\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}}=T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{\hbar\omega}{2T}-\ln\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}\right)\right)=$$

$$=T^2\left\{\frac{\hbar\omega}{2T^2}+\frac{\hbar\omega}{T^2}\cdot\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}}\right\}=\hbar\omega\left\{\frac{1}{2}+\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}}\right\}.$$

რადგან გვაქვს N ცალი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი ჰარმონიული ოსცილატორების ერთობლიობა, მათი საშუალო ენერგიისთვის გვექნება: $\bar{E}_N=N\hbar\omega\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}}\right\}$,

აქედან სითბოტევადობისათვის მივიღებთ:

$$C_V=\frac{\partial E}{\partial T}=N\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^2\frac{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1\right)^2}.$$

ამოცანის ამოხსნისას გათვალისწინებული იყო, რომ ბოლცმანის მუდმივა $k=1$, Aანუ ტემპერატურა გაზომილი იყო ენრგეტიკულ ერთეულებში. თუ ტემპერატურა იზომება კელვინებში, მაშინ სითბოტევადობაში $T\to kT$, რის შედეგადაც სითბოტევადობით ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს: $C_V=\dfrac{\partial E}{\partial T}=Nk\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\dfrac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1\right)^2}$.

ამოცანა # 8.2

წინა ამოცანის თანახმად:

$$C_V = N_A k\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1\right)^2}.$$

რადგანაც $\hbar = 1.05\cdot10^{-34}$ ჯ.წმ, $k = 1.38\cdot10^{-2}\ J\cdot K^{-1}$, ამიტომ

$$\frac{\hbar\omega}{kT} = \frac{1.05\cdot10^{-34}\cdot4.45\cdot10^{14}}{1.38\cdot10^{-23}\cdot500} \approx 6.8.$$

თუ ამას ჩავსვავთ C_V-ს ფორმულაში, მაშინ მივიღებთ:

$$C_V \approx N_A k\cdot6.8^2\cdot e^{-6.8} \approx 0.054\cdot R.$$

სადაც $R = N_A\cdot k$ უნივერსალური მუდმივაა.

ამოცანა # 8.3

ერთი ოსცილატორის სტატისტიკური ჯამი $z = \dfrac{1}{2sh\dfrac{\hbar\omega}{T}}$ (იხ. ამოცანა # 8.1). აქედან, როცა $T >> T_C$, სადაც $T_C = \hbar\omega$ ანუ, როცა $\dfrac{\hbar\omega}{T} << 1$, მაშინ

$$z = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}} = \frac{T}{\hbar\omega}.$$

სხვა მხრივ, როცა $T >> T_C$, მაშინ ოსცილატორი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც კლასიკური და მისი სტატისტიკური ჯამი დაემთხვევა მდგომარეობათა ინტეგრალს, $z = \dfrac{T}{\hbar\omega} = \int e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\dfrac{d\Gamma}{a_\nu}$. რადგანაც ჰარმონიული ოსცილატორისათვის $\varepsilon = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{kx^2}{2}$ და $d\Gamma = dpdx$, ამიტომ

$$z = \frac{T}{\hbar\omega} = \frac{1}{a_\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2mT}}dp\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{kx^2}{2T}}dx = \frac{1}{a_\nu}\sqrt{\pi 2mT}\cdot\sqrt{\frac{2\pi T}{k}} = \frac{1}{a_\nu}\frac{2\pi T}{\omega},\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

საიდანაც $a_\nu = 2\pi\hbar = h$. ამრიგად, ჰარმონიული ოსცილატორის ერთ თავისუფლების ხარისხზე მოდის $a_\nu = h$ ფაზური მოცულობა.

ამოცანა # 8.4

ამოცანიდან #8.1 $z=\dfrac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}}$, აქედან ერთი ოსცილატორის თავისუფალი ენერგია: $F=-T\ln z=\dfrac{\hbar\omega}{2}+T\ln\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}\right)$, N ოსცილატორისათვის: $F=\dfrac{N\hbar\omega}{2}+TN\ln\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}\right)$. აქედან ენტროპიისთვის მივიღებთ გამოსახულებას: $S=-\dfrac{\partial F_N}{\partial T}=-N\ln\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}\right)+\dfrac{\hbar\omega N}{T}\dfrac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}}}$.

ამოცანა # 8.5

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\varepsilon_n}{T}}\Omega(\varepsilon_n)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\hbar\omega(n+1)}{T}}(n+1)=\left(\frac{\hbar\omega}{T}=\beta\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta(n+1)}(n+1)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta(n+1)}=-\frac{\partial}{\partial\beta}e^{-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta n}=-\frac{\partial}{\partial\beta}e^{-\beta}\frac{1}{1-e^{-\beta}}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{e^{\beta}-1}=\frac{e^{\beta}}{\left(e^{\beta}-1\right)^2}=\frac{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1\right)^2}$$

სისტემის ენერგია ტოლია:

$$E=NT^2\frac{\partial\ln z}{\partial T}=NT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln\frac{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1\right)^2}=$$

$$=NT^2\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)-2\frac{\partial}{\partial T}\ln\left(e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1\right)\right\}=$$

$$=NT^2\left(-\frac{\hbar\omega}{T^2}+\frac{2e^{\frac{\hbar\omega}{T}}\frac{\hbar\omega}{T^2}}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}\right)=N\hbar\omega\left(-1+\frac{2e^{\frac{\hbar\omega}{T}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}\right)=$$

$$=N\hbar\omega\left(-1+\frac{2e^{\frac{\hbar\omega}{T}}\left(e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1+1\right)}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}\right)=$$

$$=N\hbar\omega\left(1+\frac{2}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}\right),$$

$$\left(e^{\frac{\cdots}{T}} - 1 \right)$$

$$C_V = \frac{\partial F}{\partial T} = N\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^2 \frac{2e^{\frac{\hbar\omega}{T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1\right)^2} = N\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)^2 \frac{1}{2} sh^{-1}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right).$$

ამოცანა # 9.1

განმარტების თანახმად, $S = \ln\Delta\Gamma$, სადაც $\Delta\Gamma$ არის კვანტურ მდგომარეობათა რიცხვი, რომელიც შეესაბამება ΔE ენერგიის ინტერვალს, რომელშიც იმყოფება სისტემა (სტატისტიკური წონა). დავყოთ მოცემული სისტემა ქვესისტემებად $j = 1...n$ და ვთქვათ $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2 \ldots \Delta\Gamma_n$ არის ქვესისტემების შესაბამისი სტატისტიკური წონები. თუ თითოეული ქვესისტემა იმყოფება $\Delta\Gamma_a$ შესაბამისი კვანტური მდგომარეობიდან ერთ-ერთში, მაშინ მთელი სისტემის შესაბამისი სტატისტიკური წონა:

$$\Delta\Gamma = \prod_{j=1}^{n} \Delta\Gamma_j, \text{ და ენტროპია } S = \ln\Delta\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \ln\Delta\Gamma_j = \sum_{j=1}^{n} S_j .$$

დავყოთ გაზის მოლეკულის კვანტური მდგომარეობები ჯგუფებად, რომელთაგან თითოეული შეიცავს ახლო მდგომარეობებს ისე, რომ მდგომარეობათა რიცხვი ყოველ ჯგუფში, ასევე მასში მყოფი ნაწილაკების რიცხვი, იყოს ძალიან დიდი. გადავნომროთ ეს მდგომარეობათა ჯგუფები ნომრებით $j = 1, 2, \ldots n$. დავუშვათ, G_j იყოს მდგომარეობათა რიცხვი j ჯგუფში, N_j – ნაწილაკთა რიცხვი, რომლებიც იმყოფებიან ამ მდგომარეობებში. ფერმი სტატისტიკის დროს თითოეულ კვანტურ მდგომარეობაში შეიძლება იმყოფებოდეს არა უმეტეს ერთი ნაწილაკისა, მაგრამ N_j რიცხვი არ არის მცირე და იმავე რიგისაა, რაც G_j.

N_j ერთნაირი ნაწილაკის G_j მდგომარეობებში განაწილება იგივეა, რაც G_j მდგომარეობიდან N_j მდგომარეობის ამორჩევის რიცხვი, მასთან ეს მდგომარეობები ერთმანეთისაგან არ განსხვავდებიან.

დავუშვათ, გვაქვს G_j მდგომარეობა. ამ მდგომარეობებიდან ერთი მდგომარეობის ამორჩევის რიცხვი იქნება G_j, რადგან ერთი მდგომარეობა უკვე არჩეულია, დაგვრჩება $G_j - 1$ მდგომარეობა, აქედან კიდევ ერთი მდგომარეობის არჩევის რიცხვი იქნება $G_j - 1$, დაგვრჩება $G_j - 2$, მდგომარეობა. ამრიგად, G_j მდგომარეობიდან ორი მდგომარეობის არჩევის რიცხვი ტოლი იქნება $G_j \cdot (G_j - 1)$. თუ მსჯელობას გავაგრძელებთ G_j მდგომარეობებიდან, N_j მდგომარეობის არჩევის შესაძლო რიცხვი იქნება $G_j \cdot (G_j - 1) \cdot (G_j - 2) \cdot \ldots (G_j - N_j + 1)$. რადგან მდგომარეობები ერთმანეთის იდენტურია, ამიტომ არ აქვს მნიშვნელობა, რომელ მდგომა-

რეობას ავირჩევთ პირველად, რომელს მეორედ და ასე შემდეგ. ამიტომ ეს ნამრავლი უნდა გაიყოს N_j მდგომარეობების შესაძლო გადანაცვლე-ბის რიცხვზე, ანუ $N_j!$, ამრიგად მივიღებთ:

$$\frac{G_j\cdot(G_j-1)\cdot(G_j-2)\cdot\ldots(G_j-N_j+1)}{N_j!}=$$

$$=\frac{G_j\cdot(G_j-1)\cdot(G_j-2)\cdot\ldots(G_j-N_j+1)\cdot.(G_j-N_j)\cdot.(G_j-N_j-1)\ldots2\cdot1}{N_j!\cdot(G_j-N_j)\cdot.(G_j-N_j-1)\ldots2\cdot1}=$$

$$=\frac{G_j!}{N_j!(G_j-N_j)!}.$$

ამრიგად, $\Delta\Gamma_j=\dfrac{G_j!}{N_j!(G_j-N_j)!}$.

ენტროპიისათვის მივიღებთ:

$$S=\sum_{j=1}^{n}\ln\Delta\Gamma_j=\sum_j\ln G_j-\sum_j\ln N_j-\sum_j\ln(G_j-N_j)!,$$

მაგრამ $\ln N!=\ln1+\ln2+\ldots\ln N\approx\int\limits_0^\infty\ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_0^N=N\ln\dfrac{N}{e}$.

ამრიგად,

$$S=\sum_j G_j\ln\frac{G_j}{e}-\sum_j N_j\ln\frac{N_j}{e}-\sum_j(G_j-N_j)\ln\frac{(G_j-N_j)}{e}=$$

$$=\sum_j\left(G_j\ln G_j-N_j\ln N_j-(G_j-N_j)\ln(G_j-N_j)\right)-$$

$$-\sum_j\left(G_j-N_j\right)+\sum_j\left(G_j-N_j\right)=$$

$$=\sum_j\left(G_j\ln G_j-N_j\ln N_j-(G_j-N_j)\ln(G_j-N_j)\right).$$

ამრიგად,

$$S=\sum_j\left(G_j\ln G_j-N_j\ln N_j-(G_j-N_j)\ln(G_j-N_j)\right).$$

შემოვიღოთ მდგომარეობების საშუალო შევსების რიცხვი: $\bar{n}_j=\dfrac{N_j}{G_j}$,

$$S=\sum_j G_j\left(\ln G_j-\bar{n}_j\ln N_j-(1-\bar{n}_j)\ln(G_j-N_j)\right)=$$

$$=\sum_j G_j\left(\ln G_j-\bar{n}_j\ln G_j\frac{N_j}{G_j}-(1-\bar{n}_j)\ln(\frac{G_j-N_j}{G_j}\cdot G_j)\right)=$$

$$=\sum_j G_j\left(\ln G_j-\bar{n}_j\ln\bar{n}_j-\bar{n}_j\ln G_j-\left(1-\bar{n}_j\right)\ln\left(1-\bar{n}_j\right)-\left(1-\bar{n}_j\right)\ln G_j\right)=$$

$$=-\sum_j G_j\left(\bar{n}_j\ln\bar{n}_j+\left(1-\bar{n}_j\right)\ln\left(1-\bar{n}_j\right)\right).$$

ამრიგად

$$S=-\sum_j G_j\left(\bar{n}_j\ln\bar{n}_j+\left(1-\bar{n}_j\right)\ln\left(1-\bar{n}_j\right)\right).$$

წონასწორობის მდგომარეობაში ენტროპიას უნდა ჰქონდეს მაქსიმუ-მი, ამასთან უნდა სრულდებოდეს ორი დამატებითი პირობა:

$$\sum_j N_j=\sum_j\bar{n}_j G_j=N,$$

$$\sum_j\varepsilon_j N_j=\sum_j\varepsilon_j\bar{n}_j G_j=E,$$

ამიტომ, ლაგრანჟის განუზღვრელ მამრავლთა მეთოდის გამოყენე-ბით, გვექნება:

$\dfrac{\partial}{\partial\bar{n}_j}\left(S+\alpha N+\beta E\right)=0$, სადაც α და β განუზღვრელი თანამამ-რავლებია, აქედან:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{n}_j}\left(S+\alpha N+\beta E\right)=$$

$$=-\sum_j G_j\left(\ln\bar{n}_j+1-\frac{1}{1-\bar{n}_j}-\ln\left(1-\bar{n}_j\right)+\frac{\bar{n}_j}{1-\bar{n}_j}+\alpha+\beta\varepsilon_j\right)=$$

$-\sum_j G_j\left(\ln\dfrac{\bar{n}_j}{1-\bar{n}_j}+\alpha+\beta\varepsilon_j\right)=0$, აქედან $\ln\dfrac{\bar{n}_j}{1-\bar{n}_j}+\alpha+\beta\varepsilon_j=0$,

$$\frac{\bar{n}_j}{1-\bar{n}_j}=e^{-\beta\varepsilon_j-\alpha},\quad\bar{n}_j=\exp\left(-\beta\varepsilon_j-\alpha\right)-\bar{n}_j\exp\left(-\beta\varepsilon_j-\alpha\right),$$

$$\bar{n}_j=\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_j+\alpha}+1},$$

$$\beta=\frac{1}{T},\quad\alpha=-\frac{\mu}{T},$$

$$\bar{n}_j = \frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon_j-\mu)}{T}}+1}$$ (ფერმის განაწილება).

თუ გვაქვს ბოზე გაზი, ერთ მდგომარეობაში შეიძლება იმყოფებოდეს ნაწილაკთა ნებისმიერი რიცხვი. თუ გვაქვს N_j ნაწილაკი და G_j მდგომარეობა მასთან ერთ მდგომარეობაში შეიძლება იმყოფებოდეს ნაწილაკთა ნებისმიერი რიცხვი.

ეს იგივეა, რომ გვქონდეს N_j ერთნაირი ბურთი და G_j ყუთი და გვინდოდეს ამ ბურთების ყუთებში განაწილების რიცხვის პოვნა, ამასთან, ერთ Yყუთში შეიძლება იმყოფებოდეს ბურთების ნებისმიერი რიცხვი 0-დან G_j-მდე.

ბურთები წარმოვადგინოთ ერთმანეთის თანმიმდევრობით განლაგებული წერტილების სახით, ყუთები გადავნომროთ და გამოვსახოთ მათ შორის საზღვრები G_j-1 ვერტიკალური ხაზების სახით.

მაგალითად, ნახაზი გამოსახავს იმას, რომ პირველ ყუთში არის ერთი ბურთი, მეორეში – სამი, მესამეში – არცერთი, მეოთხეში – ოთხი, მეხუთეში – ორი, ე.ი. გვაქვს სულ ათი ბურთი განლაგებული ხუთ ყუთში.

სულ ადგილების რიცხვი, სადაც შეიძლება იმყოფებოდეს წერტილი ან ხაზი, ტოლიაN N_j+G_j-1, ამ ადგილებში უნდა განვალაგოთ G_j-1 ხაზი. ამრიგად, Yყუთებში ბურთების განლაგების რიცხვი ტოლია N_j+G_j-1 ადგილიდან G_j-1 ადგილის ამორჩევის რიცხვის. თუ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას მივყვებით, მივიღებთ, რომ ეს რიცხვი ტოლია:

$$\frac{(G_j+N_j-1)(G_j+N_j-2)(N_j+1)}{(G_j-1)!}=$$

$$=\frac{(G_j+N_j-1)(G_j+N_j-2)(N_j+1)N_j(N_j-1)\ldots2\cdot1}{(G_j-1)!N_j(N_j-1)\ldots2\cdot1}=$$

$$=\frac{(G_i+N_i-1)!}{(G_i-1)!N!}.$$

აქედან

$$\Delta\Gamma_j=\frac{(G_j+N_j-1)!}{(G_j-1)!N_j!}.$$

$$S=\sum_j\Delta\Gamma_j=\sum_j\ln(G_j+N_j-1)!-\sum_j\ln(G_j-1)!-\sum_j\ln N_j=$$

$$=\sum_j(G_j+N_j-1)\ln\frac{(G_j+N_j-1)}{e}-$$

$$-\sum_j(G_j-1)\ln\frac{(G_j-1)}{e}-\sum_j N_j\ln\frac{N_j}{e}=$$

$$=\sum_j(G_j+N_j-1)\ln(G_j+N_j-1)-\sum_j(G_j-1)\ln(G_j-1)-\sum_j N_j\ln N_j.$$

რადგანაც $G_j>>1$ და $N_j>>1$, ამიტომ ერთიანები შეგვიძლია უგულებელვყოთ და შედეგად მივიღებთ:

$$S=\sum_j(G_j+N_j)\ln(G_j+N_j)-\sum_j G_j\ln G_j-\sum_j N_j\ln N_j,$$

თუ შემოვიტანთ მდგომარეობათა შევსების საშუალო რიცხვს

$$\bar{n}_j=\frac{N_j}{G_j},$$

$$S=\sum_j G_j\left((1+\bar{n}_j)\ln(1+\bar{n}_j)G_j-\ln G_j-\bar{n}_j\ln\bar{n}_jG_j\right)=$$

$$=\sum_j G_j\left((1+\bar{n}_j)\ln(1+\bar{n}_j)-\bar{n}_j\ln\bar{n}_j\right).$$

ამრიგად,

$$S=\sum_j G_j\left((1+\bar{n}_j)\ln(1+\bar{n}_j)-\bar{n}_j\ln\bar{n}_j\right).$$

წონასწორობის მდგომარეობაში ენტროპიას უნდა ჰქონდეს მაქსიმუმი შემდეგი დამატებითი პირობებით:

$$\sum_j N_j=\sum_j\bar{n}_jG_j=N,$$

$$\sum_j \varepsilon_j N_j = \sum_j \varepsilon_j \bar{n}_j G_j = E\,,$$

ამიტომ ლაგრანჟის განუზღვრელ მამრავლთა მეთოდის გამოყენებით, გვექნება:

$\dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_j}\left(S+\alpha N+\beta E\right)=0\,,$ სადაც α და β განუზღვრელი თანამამრავლებია.

აქედან:

$$\sum_j G_j\left(\frac{1}{1+\bar{n}_j}+\ln\left(1+\bar{n}_j\right)+\frac{\bar{n}_j}{1+\bar{n}_j}-\ln\bar{n}_j-1+\alpha+\beta\varepsilon_j\right)=0,$$

$$\sum_j G_j\left(\ln\frac{1+\bar{n}_j}{\bar{n}_j}+\alpha+\varepsilon_j\beta\right)=0.$$

აქედან:

$$\ln\frac{1+\bar{n}_j}{\bar{n}_j}+\alpha+\varepsilon_j\beta=0,$$

$$\frac{1+\bar{n}_j}{\bar{n}_j}=e^{-\alpha-\varepsilon_j\beta},$$

$$\bar{n}_j=\frac{1}{e^{-\alpha-\varepsilon_j\beta}-1},$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს: $\beta=-\dfrac{1}{T},\ \alpha=\dfrac{\mu}{T},$

მაშინ მივიღებთ:

$$\bar{n}_j=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_j-\mu}{T}}-1}$$ (ბოზე-აინშტაინის განაწილება).

ამოცანა # 9.2

მდგომარეობათა რიცხვი მოცულობის ერთეულში, როცა ფერმიონების იმპულსი მოთავსებულია $p,\ p+dp$ ინტერვალში, იმის გათვალისწინებით, რომ სპინს აქვს ორი პროექცია, ტოლია $2D(p)dp=2\cdot\dfrac{4\pi p^2dp}{(2\pi\hbar)^3}$.

არარელატივისტური ნაწილაკებისათვის $p=mv$, აქედან:

$$2D(p)dp=2\cdot\frac{4\pi m^3v^2dv}{(2\pi\hbar)^3}.$$

აქედან, რადგანაც ნაწილაკთა საშუალო რიცხვი ერთ კვანტურ მდგომარეობაში მოიცემა ფერმი-დირაკის განაწილებით:

$f(\varepsilon)=\dfrac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$ და $\varepsilon=\dfrac{mv^2}{2}$, განაწილების ფუნქციისთვის მივიღებთ:

$$dn(v)=f(v)D(v)dv=\frac{8\pi m^3}{(2\pi\hbar)^3}\cdot\frac{1}{e^{\left(\frac{mv^2}{2}-\mu\right)\frac{1}{kT}}+1}\cdot v^2dv.$$

როცა გვაქვს ტემპერატურის აბსოლუტური ნული, მაშინ განაწილების ფუნქციისთვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$dn_0(v)=\begin{cases}\dfrac{8\pi m^3}{(2\pi\hbar)^3}v^2dv, & v<v_m\\ 0, & v>v_m.\end{cases}$$, სადაც $v_m=\sqrt{\dfrac{2\mu}{m}}$.

ამოცანა # 9.3

$$\bar{v}=\frac{\int_0^\infty v\,dn_0(v)}{\int_0^\infty dn_0(v)}=\frac{\int_0^{\sqrt{2\mu/m}} v\cdot\frac{8\pi m^3}{(2\pi\hbar)^3}v^2dv}{\int_0^{\sqrt{2\mu/m}}\frac{8\pi m^3}{(2\pi\hbar)^3}v^2dv}=\frac{\int_0^{v_m} v\cdot v^2dv}{\int_0^{v_m} v^2dv}=\frac{\frac{1}{4}\cdot v_m^4}{\frac{1}{3}\cdot v_m^3}=\frac{3}{4}v_m.$$

ანალოგიურად:

$$\overline{v^2}=\frac{\int_0^\infty v^2dn_0(v)}{\int_0^\infty dn_0(v)}=\frac{\int_0^{v_m} v^4dv}{\int_0^{v_m} v^2dv}=\frac{\frac{1}{5}v_m^5}{\frac{1}{3}v_m^3}=\frac{3}{5}v_m^2,$$

$$\overline{\frac{1}{v}}=\frac{\int_0^{v_m} v\,dv}{\int_0^{v_m} v^2dv}=\frac{\frac{1}{2}v_m^2}{\frac{1}{3}v_m^3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{v_m}.$$

სადაც $v_m=\sqrt{\frac{2\mu}{m}}$.

ამოცანა # 9.4

გამოვთვალოთ ჯერ ენერგია: $E=2\int_0^\infty \varepsilon f_0(\varepsilon)D(\varepsilon)d\varepsilon$, სადაც $D(\varepsilon)$ მდგომარეობის რიცხვია, რომელიც მოდის $\varepsilon,\ \varepsilon+d\varepsilon$ ინტერვალში. 2 თანამამრავლი გაჩნდა იქიდან, რომ სპინს აქვს ორი პროექცია.

მდგომარეობათა რიცხვი მოცულობის ერთეულში, როცა ფერმიონების იმპულსი მოთავსებულია $p,\ p+dp$ ინტერვალში, იმის გათვალისწინებით, რომ სპინს აქვს ორი პროექცია, ტოლია

$2D(p)dp=2\cdot\frac{4\pi p^2dp}{(2\pi\hbar)^3}$. აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ $\varepsilon=\frac{p^2}{2m}$, მოვიღებთ: $D(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon$.

აქედან E $E=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)+1}$.

ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად განვიხილოთ უფრო ზოგადი ინტეგრალი:

$\int_0^\infty\frac{\varepsilon^n d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)+1}=\int_0^\infty \varepsilon^n f(\varepsilon)d\varepsilon$, სადაც $f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$. ჩავატაროთ ნაწილობითი ინტეგრირება: O

$$\int_0^\infty \varepsilon^n f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{1}{n+1}\int_0^\infty f(\varepsilon)d\varepsilon^{n+1}=\frac{1}{n+1}f(\varepsilon)\varepsilon^{n+1}\Big|_0^\infty-\frac{1}{n+1}\int_0^\infty \varepsilon^{n+1}\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}d\varepsilon=$$

$$\int_0^\infty \varepsilon^n f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{1}{n+1}\int_0^\infty f(\varepsilon)d\varepsilon^{n+1}=\frac{1}{n+1}f(\varepsilon)\varepsilon^{n+1}\Big|_0^\infty-\frac{1}{n+1}\int_0^\infty \varepsilon^{n+1}\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}d\varepsilon=$$

$$=-\frac{1}{n+1}\int_0^\infty \varepsilon^{n+1}\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}d\varepsilon=(\varepsilon=\mu+kTx)=-\frac{1}{n+1}\int_{-\mu/kT}^\infty(\mu+kTx)^{n+1}\frac{\partial f}{\partial x}dx,$$

რადგანაც $\mu>>kT$, ამიტომ ინტეგრების ქვედა საზღვარი შეგვიძლია გავავრცელოთ $-\infty$-მდე:

$$-\frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^\infty(\mu+kTx)^{n+1}\frac{\partial f}{\partial x}dx=-\frac{1}{n+1}\mu^{n+1}\int_{-\infty}^\infty\left(1+\frac{kTx}{\mu}\right)^{n+1}\frac{\partial f}{\partial x}dx,$$

$\left(1+\frac{kTx}{\mu}\right)^{n+1}$ გამოსახულება გავშალოთ ტეილორის მწკრივად:

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}f''(0)\cdot x^2+\dots$$

$$-\frac{1}{n+1}\mu^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{kTx}{\mu}\right)^{n+1}\frac{\partial f}{\partial x}dx=-\frac{1}{n+1}\mu^{n+1}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1+(n+1)\frac{kT}{\mu}x+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\cdot x^2+\dots\right]\cdot\frac{\partial f}{\partial x}dx,$$

რადგანაც $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n+1}\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}dx=f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{e^x+1}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=-1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{\partial f}{\partial x}=2\int_0^{+\infty}x^2\frac{\partial f}{\partial x}=-4\int_0^\infty xf(x)dx=-4\int_0^\infty\frac{xdx}{e^x+1}=-4\frac{\pi^2}{12}=-\frac{\pi^2}{3}.$$

ყველაფერი ამის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\int_0^\infty\frac{\varepsilon^n d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}=\frac{1}{n+1}\mu^{n+1}\left(1+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{3}+\dots\right),$$

$$\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}=\frac{2}{5}\mu^{5/2}\left(1+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{2!}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{3}+\dots\right)\approx\mu^{5/2}\left(1+\frac{1}{4}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\cdot\pi^2+..\right),$$

აქედან ენმერგიისთვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$E=\frac{2}{5}\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\mu^{5/2}\left(1+\frac{5}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\cdot\pi^2+..\right),$$

ახლა გამოვთვალოთ როგორ არის ქიმიური პოტენციალი დამოკიდებული ტემპერატურაზე:

$$N=2\int_0^\infty f(\varepsilon)D(\varepsilon)d\varepsilon=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\mu^{3/2}\left(1+\frac{1}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\cdot\pi^2\right)$$

აქედან, როცა $T=0K$, მივიღებთ:

$N=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\mu_0^{3/2}$, სადაც μ_0 აღნიშნავს ქიმიურ პოტენციალს აბსოლუტურ ნულზე, თუ ამას ჩავსვამთ N-ის გამოსახულებაში, მაშინ მივიღებთ: $\mu_0^{3/2}=\mu^{3/2}+\frac{\pi^2}{8}\frac{(kT)^2}{\mu^{1/2}}$, ხოლო თუ გამოვიყენებთ თანმიმდევრული მიახლოების მეთოდს, მაშინ შეგვიძლია ამ გამოსახულების მნიშვნელში μ შევცვალოთ μ_0-ით და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\mu^{3/2}=\mu_0^{3/2}\left(1-\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right),$$

აქედან $\mu=\mu_0\left(1-\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right)^{2/3}=\mu_0\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right)$, ბოლო ფორმულაში გამოყენებულია ის ფაქტი, რომ $\frac{kT}{\mu_0}<<1$ და ფორმულა $(1-x)^n\approx1-nx$, როცა $x<<1$.

აქედან, ენერგიისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$E=\frac{2}{5}\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\mu_0^{5/2}\left(1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right)^{5/2}\left(1+\frac{5}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\cdot\pi^2+..\right)=$$

$$=\frac{3}{5}N\mu_0\left(1-\frac{5\pi^2}{24}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right)\left(1+\frac{5}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\cdot\pi^2+..\right),$$

აქედან, ამ გამოსახულების წევრების ერთმანეთზე გადამრავლების და გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$E=\frac{3}{5}N\mu_0\left(1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2-\frac{25}{192}\pi^4\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^4\right).$$

აქედან, სითბოტევადობისათვის მივიღებთ:

$C_V=\frac{\partial E}{\partial T}=\frac{3}{5}N\mu_0\left(\frac{5\pi^2}{6}\left(\frac{k^2T}{\mu_0^2}\right)-\frac{25}{48}\pi^4\left(\frac{k^3T^3}{\mu_0^4}\right)\right)$, რომლის გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$C_V = \frac{\pi^2 N k^2 T}{2\mu_0}\left(1 - \frac{5}{8}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right).$$

რადგანაც:

$C_V = T\dfrac{dS}{dT}$ ამიტომ აქედან ენტროპიისათვის მივიღებთ:

$$S = \int \frac{C_V}{T} dT ,$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ როცა $T = 0K$, მაშინ $S = 0$.

მაშინ ენტროპიის გამოსახულებაში სითბოტევადობის ჩასმის და ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ:

$$S = \frac{\pi^2 N k^2 T}{2\mu_0}\left(1 - \frac{5}{24}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right).$$

ამოცანა # 9.5

ელექტრონების რიცხვი მოცულობის ერთეულში, რომელთა იმპულსები მოთავსებულია $p,\ p+dp$ ინტერვალში და მიმართულებით იმყოფებიან კედლის ნორმალის მიმართ კუთხით $\theta,\ \theta+d\theta$ ინტერვალში, იმის გათვალისწინებით, რომ ელექტრონების სპინს აქვს ორი პროექცია, ტოლია: $\dfrac{2\cdot 2\pi \sin\theta d\theta p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$, დაჯახებათა საძიებელი რიცხვი მიიღება ფართობის ერთეულზე, თუ ამ ელექტრონების რიცხვს გავამრავლებთ $v_z = v\cos\theta,\ \ (v = p/m)$,

დავაინტეგრებთ $d\theta$-თი 0-დან $\pi/2$ ინტერვალში და dv-თი 0-დან v_m, სადაც $v_m = \sqrt{\dfrac{2\mu_0}{m}}$ (იხ. ამოცანა # 89 და # 90) .

$$\nu = \frac{m^3}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{v_m} v^3 dv \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{m^3 v_m^4}{16\pi^2\hbar^3} = \frac{m^3\mu_0^2}{4\pi^2\hbar^3}.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ აბსოლუტურ ნულზე $\mu_0 = \varepsilon_F = \dfrac{p_F^2}{2m} = \left(3\pi^2\right)^{2/3}\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{N}{V}\right)^{2/3}$, მივიღებთ:

$$\nu = \frac{m^3\varepsilon_F^2}{4\pi^2\hbar^3} = \frac{m^3}{4\pi^2\hbar^3}\left(3\pi^2\right)^{4/3}\frac{\hbar^4}{(2m)^2}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} = \frac{\hbar\pi^{2/3}}{16m}\left(\frac{3N}{V}\right)^{4/3}.$$

ასეთი 89 და 90 ამოცანები არ არსებობს

დავაინტეგრებთ $d\theta$-თი 0-დან $\pi/2$ ინტერვალში და dv-თი 0-დან v_m, სადაც $v_m = \sqrt{\frac{2\mu_0}{m}}$ (იხ. ამოცანა # 89 და # 90) .

$$\nu = \frac{m^3}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{v_m} v^3 dv \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{m^3 v_m^4}{16\pi^2\hbar^3} = \frac{m^3\mu_0^2}{4\pi^2\hbar^3}.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ აბსოლუტურ ნულზე $\mu_0 = \varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \left(3\pi^2\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$, მივიღებთ:

$$\nu = \frac{m^3\varepsilon_F^2}{4\pi^2\hbar^3} = \frac{m^3}{4\pi^2\hbar^3}\left(3\pi^2\right)^{4/3}\frac{\hbar^4}{(2m)^2}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} = \frac{\hbar\pi^{2/3}}{16m}\left(\frac{3N}{V}\right)^{4/3}.$$

ამოცანა # 9.6

ამ ამოცანის ამოხსნა ხდება ისევე, როგორც არარელატივისტური გაზის შემთხვევაში, ოღონდ მხედველობაში უნდა მივიღოთ რომ $v \approx c$. შედეგად მივიღებთ:

$$d\nu = \frac{2p^2 dpc\cdot\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi}{(2\pi\hbar)^3}$$

, აქედან ინტეგრირებით იმპულსებით 0-დან p_F-მდე, კუთხეებით θ-ით 0-დან $\pi/2$ და φ-ით 0-დან 2π-მდე, მივიღებთ ნაწილთა დაჯახების რიცხვისათვის ერთ წამში ფართობის ერთეულზე: $\nu = \frac{c}{4\pi^2\hbar^3}\cdot\frac{p_F^3}{3}$, თუ აქ ჩავსვამთ $p_F = \left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$, გამოსახულებას მივიღებთ: $\nu = \frac{c}{4}\cdot\frac{N}{V}$.

ამოცანა # 9.7

ა) რადგანაც $D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V\varepsilon^2 d\varepsilon}{2\pi^2\hbar^3c^3}$. ამიტომ

$$E = 2\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon^3 d\varepsilon = \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\cdot\frac{\varepsilon_F^4}{4}.$$

$$N = 2\cdot\int_0^{p_F} D(p)dp = \frac{Vp_F^3}{3\pi^2\hbar^3},$$ ამიტომ

$E = \frac{3}{4}N\varepsilon_F = \frac{3}{4}N\mu_0$. სადაც μ_0 ქიმიური პოტენციალია აბსოლუტური ნული ტემპერატურის დროს. აქედან, ერთ ნაწილაკზე მოსული საშუალო ენერგიისათვის მივიღებთ: $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{4}\mu_0$.

ბ) $E = \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\cdot\frac{\varepsilon_F^4}{4} = \frac{Vcp_F^4}{\pi^2\hbar^3}$. რადგანაც $p_F = \left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$, ამიტომ ენერგიისათვის მივიღებთ: $E = \frac{3\left(3\pi^2\right)^{1/3}}{4}\hbar cN\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$.

აქედან წნევისათვის მივიღებთ:

$$p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \frac{3\left(3\pi^2\right)^{1/3}}{4}\hbar cN\frac{1}{3}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}\frac{1}{V} = \frac{E}{3V}.$$

აქედან $pV = \frac{E}{3}$.

ამოცანა # 9.8

რადგანაც $D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V\varepsilon^2 d\varepsilon}{2\pi^2\hbar^3c^3}$. ამიტომ

$$E = 2\int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon)D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}.$$

$$N = 2\int_0^{\infty} f(\varepsilon)D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}.$$

თუ გამოვიყენებთ ფორმულას:

$$\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^n d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} = \frac{1}{n+1}\mu^{n+1}\left(1+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{3}+\dots\right),$$ (იხ. ამოცანა # 9.4)

მივიღებთ;

$$\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} = \frac{\mu^4}{4}\left(1+2\pi^2\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right),\quad \int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} = \frac{\mu^3}{3}\left(1+2\pi^2\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right).$$

აქედან

$$N = \frac{V}{\pi^2c^3\hbar^3}\frac{\mu^3}{3}\left(1+2\pi^2\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right),$$ როცა $T = 0\,K$, მაშინ

$N = \frac{V}{\pi^2c^3\hbar^3}\frac{\mu_0^3}{3}$, სადაც μ_0 ქიმიური პოტენციალია აბსოლუტურ ნულზე. თუ ამას ჩავსვამთ N N-ის გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$\mu_0^3 = \mu^3\left(1+2\pi^2\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right),$$ აქედან:

$$\mu^3 = \frac{\mu_0^3}{\left(1+2\pi^2\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right)} \approx \mu_0^3\left(1-2\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right),$$ აქ მოცემული გამოსახულების მნიშვნელში μ შეცვლილია μ_0-ით და გათვალისწინებულია, რომ

$\frac{kT}{\mu_0} << 1$, აგრეთვე გამოყენებულია ფორმულა $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$, როცა $x << 1$.

აქედან $\mu \approx \mu_0 \left(1 - 2\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right)^{1/3}$.

ენერგიისათვის გვაქვს გამოსახულება:

$$E = \frac{V}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \cdot \frac{\mu^4}{4} \left(1 + 2\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \frac{\mu_0^{\,4}}{4} \left(1 - 2\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right)^{1/3} \left(1 + 2\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right),$$

აქედან $(1-x)^n \approx 1 - nx$, როცა $x << 1$ ფორმულის გამოყენებით, მოცემული გამოსახულების წევრების ერთმანეთზე გადამრავლების შედეგად მივიღებთ:

$$E = \frac{V}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \frac{\mu_0^{\,4}}{4} \left(1 + \frac{2}{3}\pi^2 \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right).$$ აქედან სითბოტევადობა:

$$C_V^e = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{V \mu_0^2 k^2 T}{3 c^3 \hbar^3} = \pi^2 N \frac{k^2 T}{\mu_0}.$$

$$C_V^e = \pi^2 N \frac{k^2 T}{\mu_0}.$$

ამოცანა # 9.9

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right),$$

აქედან $\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2$.

$$\mu_0 = \varepsilon_F = \left(3\pi^2\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3} =$$

$$\left(3 \cdot 3.14^2\right)^{2/3} \cdot \frac{\left(1.05 \cdot 10^{-34}\right)^2}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}} \cdot \left(2.5 \cdot 10^{28}\right)^{2/3} \approx 5 \cdot 10^{-19}\ J$$

აქედან $\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{5 \cdot 10^{-19}}\right)^2 = 0.6 \cdot 10^{-4}$.

ამოცანა # 9.10

$$dn(\varepsilon) = 2D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon,\ D(p)dp = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$p^2 = 2m\varepsilon,\ p = \sqrt{2m\varepsilon},\ dp = \sqrt{2m}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}d\varepsilon,\ p^2 dp = \frac{(2m)^{3/2}}{2}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon.$$

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^3}\cdot(2m)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon.$$

აქედან:

$$dn(\varepsilon) = \frac{2\cdot 2\pi}{(2\pi\hbar)^3}(2m)^{3/2}\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon =$$

$$= \frac{2\cdot 2\pi}{(2\pi\hbar)^3}(2m)^{3/2} e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}\left(1 - e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}\right)\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon.$$

ამოცანა # 9.11

$PV = \frac{2}{3}E$, დაბალ ტემპერატურებზე

$E = \frac{3}{5}N\mu_0\left(1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \ldots\right)$, აქედან $p \approx \frac{2}{5}\frac{N\mu_0}{V}\left(1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \ldots\right)$.

ამოცანა # 9.12

იდეალური გაზის საშუალო ენერგია:

$$E = N\bar{\varepsilon} = 4\pi N\int_0^\infty \varepsilon f(p)p^2dp.$$

მივმართოთ x ღერძი ჭურჭლის კედლის მართობულად. ჭურჭლის კედლებთან დაჯახებისას თითოეული ნაწილაკი ჭურჭლის კედელს გადასცემს $2p_x$ იმპულსს, ფართობის ერთეულს 1 წმ-ში მიაღწევენ ის ნაწილაკები, რომლებიც დაშორებულნი არიან v_x მანძილით. ამრიგად, 1 წმ-ში გადაცემული იმპულსი იქნება $2np_xv_xdw$, სადაც $n = \dfrac{N}{V}$. ეს გამოსახულება უნდა გაიყოს 2-ზე, რადგანაც საშუალოდ ნაწილაკთა ნახევარი მოძრაობს ჭურჭლის კედლის მიმართულებით, ნახევარი – მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით და უნდა ვაინტეგროთ იმპულსებით. საბოლოოდ, წნევისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$P = \frac{N}{V}4\pi\int_0^\infty p_xv_xf(p)p^2dp = \frac{N}{V}\overline{p_xv_x}\,.$$

რადგანაც $pv = p_xv_x + p_yv_y + p_zv_z$. სივრცის იზოტროპულობის გამო $\overline{p_xv_x} = \overline{p_yv_y} = \overline{p_zv_z}$, ამიტომ $\overline{pv} = \overline{p_xv_x} + \overline{p_yv_y} + \overline{p_zv_z} = 3\overline{p_xv_x}$, აქედან $\overline{p_xv_x} = \dfrac{1}{3}\overline{pv}$, საიდანაც წნევისათვის მივიღებთ:

$$P = \frac{N}{3V}\overline{pv} = \frac{N}{3V}4\pi\int_0^\infty pvf(p)p^2dp = \frac{N}{3V}4\pi\int_0^\infty p\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}f(p)p^2dp = \frac{N}{3V}4\pi\int_0^\infty p\alpha p^{l-1}f(p)p^2dp =$$

$$= \frac{lN}{3V}4\pi\int_0^\infty \varepsilon f(p)p^2dp = \frac{lE}{3V}.$$

თუ $\varepsilon = \dfrac{p^2}{2m}$, მაშინ $l = 2$ და $P = \dfrac{2E}{3V}$.

თუ $\varepsilon = cp$, მაშინ $l = 1$ და $P = \dfrac{E}{3V}$.

ამოცანა # 9.13

როცა $T = 0$ ელექტრონები იმპულსურ სივრცეში ავსებენ ყველა მდგომარეობას $p = 0$-დან $p = p_F$ ზღვრულ იმპულსამდე.

ელექტრონების კვანტურ მდგომარეობათა რიცხვი, რომლებიც მოძრაობენ V მოცულობაში და რომელთა იმპულსები მოთავსებულია p, $p + dp$ ინტერვალში, ტოლია:

$$dn_p = 2\frac{4\pi p^2dpV}{(2\pi\hbar)^3} = V\frac{p^2dp}{\pi^2\hbar^3}.$$

აქედან, ელექტრონების სრული რიცხვი:

$$N = \int_0^{p_F}\frac{Vp^2dp}{\pi^2\hbar^3} = \frac{Vp_F^3}{3\pi^2\hbar^3}\text{, საიდანაც } p_F = \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar.$$

აქედან, ფერმი ენერგიისათვის მივიღებთ:

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \left(3\pi^2\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3},$$

სრული ენერგიის მისაღებად $\dfrac{p^2}{2m}$ უნდა გავამრავლოთ dn_p-ზე და ვაინტეგროთ 0-დან p_F-მდე.

E $E = \displaystyle\int_0^{p_F}\frac{p^2}{2m}\cdot\frac{Vp^2dp}{\pi^2\hbar^3} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3m}\int_0^{p_F}p^4dp = \frac{V}{10\pi^2\hbar^3m}p_F^5$. თუ ჩავსვამთ p_F-ის გამოსახულებას, მაშინ ენერგიისათვის მივიღებთ:

$$E = \frac{3\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{10}\cdot\frac{\hbar^2}{m}\cdot\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\cdot N\,.$$

რადგანაც წნევა ენერგიასთან და მოცულობასთან შემდეგნაირად არის დაკავშირებული $P = \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{V}$ ამიტომ $P = \dfrac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{5}\dfrac{\hbar^2}{m}\left(\dfrac{N}{V}\right)^{5/3}$.

ამოცანა # 9.14

ელექტრონული გაზის ენერგია:

$$E=\int_0^\infty \varepsilon dN_\varepsilon ,$$

იმ ნაწილაკების რიცხვი, რომელთა იმპულსები მოთავსებულია p, $p+dp$ ინტერვალში, ტოლია:

$$dN_p=\frac{gd\tau}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1}=\frac{g4\pi p^2dpV}{(2\pi\hbar)^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1}=\frac{gp^2dpV}{2\pi^2\hbar^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1},$$

მაგრამ რადგან არარელატივისტური ნაწილაკებისათვის:

$$\frac{p^2}{2m}=\varepsilon,\quad p=\sqrt{2m\varepsilon},\ dp=\sqrt{2m}\,\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$dN_\varepsilon=\frac{gV}{2\pi^2\hbar^3}\cdot\frac{2m\varepsilon\sqrt{2m}}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}=\frac{gVm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1},$$

$$E=\int_0^\infty \varepsilon dN_\varepsilon=\frac{gVm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1},$$

$$P=\frac{2}{3}\cdot\frac{E}{V}=\frac{2}{3}\cdot\frac{gVm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1},$$

განვიხილოთ ინტეგრალი:

$$I=\int_0^\infty\frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T}+1},$$ შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $\varepsilon=\mu+Tz$,

$$I=T\int_{-\frac{\mu}{T}}^{\infty}\frac{f(\mu+Tz)}{e^z+1}=T\int_{-\frac{\mu}{T}}^{0}\frac{f(\mu+Tz)}{e^z+1}+T\int_0^\infty\frac{f(\mu+Tz)}{e^z+1}=$$

$$=T\int_0^{\frac{\mu}{T}}\frac{f(\mu-Tz)}{e^{-z}+1}+T\int_0^\infty\frac{f(\mu+Tz)}{e^z+1},$$

რადგანაც: $\dfrac{1}{e^{-z}+1}=\dfrac{e^z}{e^z+1}=1-\dfrac{1}{e^z+1}$, ამიტომ

$$I=\int_0^{\mu/T}f(\mu-Tz)dz-T\int_0^{\frac{\mu}{T}}\frac{f(\mu-Tz)}{e^z+1}+T\int_0^\infty\frac{f(\mu+Tz)}{e^z+1},$$

პირველ ინტეგრალში შემოვიღოთ ახალი ცვლადი:

$$\mu-Tz=\varepsilon,\ dz=-\frac{1}{T}d\varepsilon.$$

მეორე ინტეგრალში, რადგანაც $\mu/T>>1$ ინტეგრების ზედა საზღვარი შევცვალოთ უსასრულობით, მაშინ მივიღებთ:

$$I=\int_0^\mu f(\varepsilon)d\varepsilon+T\int_0^\infty dz\frac{f(\mu+Tz)-f(\mu-Tz)}{e^z+1}.$$

$f(\mu+Tz)$ და $f(\mu-Tz)$ გავშალოთ ტეილორის მწკრივად:

$$f(\mu+Tz)=f(\mu)+Tzf'(\mu)+\frac{(Tz)^2}{2!}f''(\mu)+\frac{(Tz)^3}{3!}f'''(\mu)+\ldots$$

$$f(\mu-Tz)=f(\mu)-Tzf'(\mu)+\frac{(Tz)^2}{2!}f''(\mu)-\frac{(Tz)^3}{3!}f'''(\mu)+\ldots$$

მაშინ მივიღებთ:

$$I=\int_0^\mu f(\varepsilon)d\varepsilon+2T^2f'(\mu)\int_0^\infty\frac{zdz}{e^z+1}+\frac{T^4}{3}f'''(\mu)\int_0^\infty\frac{z^3dz}{e^z+1},$$

როცა $f(\varepsilon)=\varepsilon^{3/2}$, მაშინ $\int_0^\mu f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2}{5}\mu^{5/2}=\frac{2}{5}\varepsilon_F^{5/2}$,

$$\int_0^\infty\frac{zdz}{e^z+1}=\frac{\pi^2}{12},\quad \int_0^\infty\frac{z^3dz}{e^z+1}=\frac{7}{120}\pi^4.$$

მაშინ მივიღებთ:

$$I=\frac{2}{5}\mu^{5/2}+2T^2f'(\mu)\cdot\frac{\pi^2}{12}+\frac{T^4}{3}\cdot f'''(\mu)\frac{7}{120}\pi^4=$$

$$=\frac{2}{5}\mu^{5/2}+\frac{(\pi T)^2}{6}f'(\mu)+\frac{7(\pi T)^4}{360}\cdot f'''(\mu),$$

$$f(\varepsilon)=\varepsilon^{3/2},\quad f'(\varepsilon)=\frac{3}{2}\varepsilon^{1/2},\quad f''(\varepsilon)=\frac{3}{4}\varepsilon^{-1/2},\quad f'''(\varepsilon)=-\frac{3}{8}\varepsilon^{-3/2},$$

აქედან მივიღებთ:

$$I=\frac{2}{5}\mu^{5/2}+\frac{(\pi T)^2}{4}\cdot\mu^{1/2}-\frac{7(\pi T)^4}{960}\cdot\mu^{-3/2},$$

$$P=\frac{2}{3}\frac{E}{V}=\frac{2}{3}\frac{m^{3/2}g}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\left(\frac{2}{5}\mu^{5/2}+\frac{(\pi T)^2}{4}\cdot\mu^{1/2}-\frac{7(\pi T)^4}{960}\cdot\mu^{-3/2}\right),$$

რადგანაც $\mu=(3\pi)^2\cdot\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$, აქედან $\frac{m^{3/2}}{\hbar^3\pi^2}=\frac{N}{V}\cdot\mu^{-3/2}\cdot\frac{3}{2^{3/2}}$, ამის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$P=\frac{2}{3}\cdot\frac{N}{V}\frac{\mu^{-3/2}3\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 2^{3/2}}\left(\frac{2}{5}\mu^{5/2}+\frac{(\pi T)^2}{4}\cdot\mu^{1/2}-\frac{7(\pi T)^4}{960}\cdot\mu^{-3/2}\right)$$. აქედან

$$P=\frac{N}{V}\cdot\frac{2}{5}\mu\left(1+\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{\pi T}{\mu}\right)^2-\frac{35}{1920}\left(\frac{\pi T}{\mu}\right)^4+\ldots\right).$$

ამოცანა # 9.15

$$D(p)\,dp=\frac{4\pi Vp^2dp}{8\pi^3\hbar^3}=\frac{4\pi V\varepsilon^2 d\varepsilon}{8\pi^3\hbar^3c^3},$$ აქედან: $D(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{4\pi V\varepsilon^2 d\varepsilon}{8\pi^3\hbar^3c^3}$.

ელექტრონები აბსოლუტურ ნულზე ავსებენ ყველა მდგომარეობას 0-დან $p=p_F$, სასაზღვრო მნიშვნელობამდე.

ელექტრონების სრული რიცხვი ტოლია: $N=2\cdot\int_0^{p_F}D(p)\,dp$, რადგანაც ელექტონის სპინს აქვს ორი პროექცია, ამიტომაც ვამრავლებთ 2-ზე.

აქედან $N=2\cdot\int_0^{p_F}\frac{\pi Vp^2dp}{2\pi^3\hbar^3}=\frac{Vp_F^3}{3\pi^2\hbar^3}$, აქედან $p_F=\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$,

$$\varepsilon_F=cp_F=c\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}.$$

ამოცანა # 9.17

იმისათვის, რომ ორმა ნაწილაკმა ენერგიებით ε_1 და ε_2 შეძლოს გადასვლა მდგომარეობაში ენერგიით ε_3 და ε_4, დაჯახებისას აუცილებელია ეს უკანასკნელი არ იყოს შევსებული.

თუ $w(\varepsilon_k)$ $k=1,2,3,4$ ნაწილაკის ყოფნის ალბათობაა იმ მდგომარეობაში, რომლის ენერგიაა ε_k, $k=1,2,3,4$, მაშინ $1-w(\varepsilon_k)$ იმის ალბათობაა, რომ მდგომარეობა ε_k, $k=1,2,3,4$ ენერგიით არ არის შევსებული. მაშინ გადასვლების რიცხვი პროპორციული იქნება

$$w(\varepsilon_1)w(\varepsilon_2)(1-w(\varepsilon_3))(1-w(\varepsilon_4)),$$

წონასწორობის მდგომარეობაში რამდენი ნაწილაკიც გადავა ε_1 და ε_2 მდგომარეობიდან ε_3 და ε_4 მდგომარეობაში, იმდენი ნაწილაკი გადავა ε_3 და ε_4 მდგომარეობიდან ε_1 და ε_2 მდგომარეობაში. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$w(\varepsilon_1)w(\varepsilon_2)(1-w(\varepsilon_3))(1-w(\varepsilon_4))=w(\varepsilon_3)w(\varepsilon_4)(1-w(\varepsilon_1))(1-w(\varepsilon_2)),$$

გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე $w(\varepsilon_1)w(\varepsilon_2)w(\varepsilon_3)w(\varepsilon_4)$-ზე, შედეგად მივიღებთ:

$$\left(\frac{1}{w(\varepsilon_3)}-1\right)\left(\frac{1}{w(\varepsilon_4)}-1\right)=\left(\frac{1}{w(\varepsilon_1)}-1\right)\left(\frac{1}{w(\varepsilon_2)}-1\right),$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $f(\varepsilon)=\dfrac{1}{w(\varepsilon)}-1$, მაშინ მივიღებთ:

$f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)=f(\varepsilon_3)f(\varepsilon_4)$, ამ ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნია:

$$f(\varepsilon)=Ae^{\alpha\varepsilon}=\frac{1}{w(\varepsilon)}-1,\quad \text{აქედან}\quad w(\varepsilon)=\frac{1}{Ae^{\alpha\varepsilon}+1}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1}.$$

ამოცანა # 10.1

დავუშვათ, სისტემა შედგება ორი ნაწილისაგან. სისტემის დამახასიათებელი სიდიდე აღვნიშნოთ L-ით, ხოლო მისი ნაწილების – L_1-ით და L_2-ით, მაშინ

$$L=L_1+L_2,\ \overline{(\Delta L)^2}=\overline{(L-\overline{L})^2}=\overline{(L_1+L_2-\overline{L_1}-\overline{L_2})^2}=\overline{(\Delta L_1+\Delta L_2)^2}=$$

$=\overline{(\Delta L_1)^2}+2\overline{\Delta L_1\cdot\Delta L_2}+\overline{(\Delta L_2)^2}$, რადგან L_1 და L_2 სხვადასხვა ნაწილებს ეკუთვნიან, ამიტომ ისინი სტატისტიკურად დამოუკიდებელნი არიან და $\overline{\Delta L_1\cdot\Delta L_2}=\overline{\Delta L_1}\cdot\overline{\Delta L_2}=0$ აქედან მივიღებთ, რომ:

$$\overline{(\Delta L)^2}=\overline{(\Delta L_1)^2}+\overline{(\Delta L_2)^2}=\sum_{i=1}^{2}\overline{(\Delta L_i)^2}.$$

მიღებული შედეგი განზოგადდება იმ შემთხვევაში, როცა სისტემა შედგება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი N ნაწილისაგან:

$$\overline{(\Delta L)^2}=\sum_{i=1}^{N}\overline{(\Delta L_i)^2},$$

ამოცანა # 10.2

$\overline{(\Delta L)^2} = \sum_{i=1}^{N} \overline{(\Delta L_i)^2}$. თუ დავუშვებთ, რომ L სიდიდის ფლუქტუაციები რიგით ერთი და იგივეა, მაშინ, ცხადია, რომ $\overline{(\Delta L)^2} \sim N \overline{(\Delta L_i)^2}$, რადგან $\overline{L} = \sum_{i=1}^{N} \overline{L_i}$. ამიტომ, ცხადია, $\overline{L} \sim N$,

აქედან, $\delta_L = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta L)^2}}}{\overline{L}} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

ამოცანა # 10.3

ვაჩვენოთ, რომ $C_V = \frac{\overline{\left(H - \overline{H}\right)^2}}{T^2}$ (ამ ამოცანაში $k = 1$),

$$C_V = \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial}{\partial T} \frac{\int H e^{-\frac{H}{T}} d\Gamma}{\int e^{-\frac{H}{T}} d\Gamma} = \frac{1}{T^2} \left(\frac{\int H^2 e^{-\frac{H}{T}} d\Gamma}{\int e^{-\frac{H}{T}} d\Gamma} - \left(\frac{\int H e^{-\frac{H}{T}} d\Gamma}{\int e^{-\frac{H}{T}} d\Gamma} \right)^2 \right) = \frac{\overline{\left(H - \overline{H}\right)^2}}{T^2}$$

,

აქედან $\frac{\sqrt{\overline{(\Delta H)^2}}}{\overline{H}} = \frac{T}{\overline{H}} \sqrt{\frac{\partial \overline{H}}{\partial T}}$.

ამოცანა # 10.4

თუ გამოვიყენებთ გიბსის განაწილებას ნაწილაკთა ცვლადი რიცხვით:

$$w_{nN}=\frac{\exp\left(\frac{\mu N-E_{nN}}{T}\right)}{\sum\limits_{nN}\exp\left(\frac{\mu N-E_{nN}}{T}\right)},$$

$$\overline{N}=\frac{\sum\limits_{nN}N\exp\left(\frac{\mu N-E_{nN}}{T}\right)}{\sum\limits_{nN}\exp\left(\frac{\mu N-E_{nN}}{T}\right)},$$

$$\left(\frac{\partial\overline{N}}{\partial\mu}\right)_{T,V}=\frac{1}{T}\left(\frac{\sum\limits_{nN}N^2\exp\left(\frac{\mu N-E_{nN}}{T}\right)}{\sum\limits_{nN}\exp\left(\frac{\mu N-E_{nN}}{T}\right)}-\left(\frac{\sum\limits_{nN}N\exp\left(\frac{\mu N-E_{nN}}{T}\right)}{\sum\limits_{nN}\exp\left(\frac{\mu N-E_{nN}}{T}\right)}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\left(\overline{N^2}-\left(\overline{N}\right)^2\right)=\frac{1}{T}\overline{(\Delta N)^2},\quad \overline{(\Delta H)^2}=T\left(\frac{\partial\overline{N}}{\partial\mu}\right)_{T,V}.$$

ამოცანა # 10.5

ა) ბოლცმანის განაწილება:

$\overline{n_k}=\exp\left(\frac{\mu-\varepsilon_k}{T}\right)$, წინა ამოცანის შედეგების გამოყენებით:

$$\overline{(\Delta n_k)^2}=T\left(\frac{\partial\overline{n_k}}{\partial\mu}\right)_{T,V}=\overline{n_k},\quad \overline{(\Delta n_k)^2}=\overline{n_k},\quad \delta=\frac{\sqrt{\overline{(\Delta n_k)^2}}}{\overline{n_k}}=\frac{1}{\sqrt{\overline{n_k}}}.$$

ბ) ფერმი-დირაკის განაწილება: $\overline{n_k}=\frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}+1}$,

$$\overline{(\Delta n_k)^2}=T\left(\frac{\partial\overline{n_k}}{\partial\mu}\right)_{T,V}=T\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}+1}=$$

$$=\frac{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}}{\left(e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}+1\right)^2}=\left(\overline{n}_k\right)^2\left(\frac{1}{\overline{n}_k}-1\right)=\overline{n_k}\left(\overline{n_k}-1\right)$$

$$\delta=\frac{\sqrt{\overline{(\Delta n_k)^2}}}{\overline{n_k}}=\sqrt{\frac{1-\overline{n}_k}{\overline{n}_k}}.$$

გ) ბოზე-აინშტაინის განაწილება: $\overline{n_k}=\frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}+1}$,

$$\overline{(\Delta n_k)^2}=T\left(\frac{\partial\overline{n_k}}{\partial\mu}\right)_{T,V}=T\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}-1}=\frac{e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}}{\left(e^{(\varepsilon_k-\mu)/T}-1\right)^2}=$$

$$=\left(\overline{n}_k\right)^2\left(\frac{1}{\overline{n}_k}+1\right)=\overline{n_k}\left(\overline{n_k}+1\right)$$

$$\delta=\frac{\sqrt{\overline{(\Delta n_k)^2}}}{\overline{n_k}}=\sqrt{\frac{1+\overline{n}_k}{\overline{n}_k}}$$

ამოცანა # 10.6

იდეალური აირის ერთი ატომის საშუალო ენერგია $\bar{\varepsilon} = \frac{3T}{2}$, საშუალო კვადრატული ენერგია: $\overline{\varepsilon^2} = \frac{15}{4}T^2$ და საშუალო კვადრატული გადახრა: $\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \frac{3}{2}T^2$, თუ ჩავთვლით, რომ სამართლიანია ენერგიის თანაბრად განაწილების კანონი და იდეალური გაზის თითოეულ ატომს მივიჩნევთ დამოუკიდებელ სისტემად, მაშინ, თუ იდეალური გაზი შედგება N ატომისაგან,

$$\overline{(\Delta E)^2} = N\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \frac{3}{2}NT^2, \text{ ასევე } \bar{E} = N\bar{\varepsilon} = \frac{3NT}{2},$$

$$\text{აქედან } \delta_E = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta E)^2}}}{\bar{E}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}N}}{\frac{3}{2}N} = \sqrt{\frac{2}{3N}}, \text{ ე.ი. } \delta_E \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

ამოცანა # 10.7

დავუშვათ, სისტემას შეუძლია, იმყოფებოდეს მდგომარეობებში ენერგიებით 0 და ε შესაბამისი გადაგვარების რიცხვით g_1 და g_2, მაშინ

$$\bar{E} = \frac{\varepsilon g_2 e^{-\frac{\varepsilon}{T}}}{g_1 + g_2 e^{-\frac{\varepsilon}{T}}}, \quad \overline{E^2} = \frac{\varepsilon^2 g_2 e^{-\frac{\varepsilon}{T}}}{g_1 + g_2 e^{-\frac{\varepsilon}{T}}}, \quad \overline{(\Delta E)^2} = \overline{E^2} - \bar{E}^2 = \frac{g_1 g_2 \varepsilon^2 e^{\frac{\varepsilon}{T}}}{\left(g_2 + g_1 e^{\frac{\varepsilon}{T}}\right)^2}.$$

ამოცანა # 10.8

$$dw_\varepsilon = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\varepsilon^2 d\varepsilon}{2(kT)^3}, \quad \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2(kT)^2}\int_0^\infty \varepsilon^3 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = 3kT,$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{2(kT)^2}\int_0^\infty \varepsilon^4 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = 12(kT)^2.$$

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \overline{\varepsilon^2} - \overline{\varepsilon}^2 = 12(kT)^2 - 9(kT)^2 = 3(kT)^2.$$

თუ გაზი შედგება N ნაწილაკისაგან:

$$\overline{E} = 3NkT, \quad \overline{E^2} = 12N(kT)^2, \quad \overline{(\Delta E)^2} = 3N(kT)^2.$$

$$\delta_E = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta E)^2}}}{\overline{E}} = \frac{1}{\sqrt{3N}}.$$

ამოცანა # 10.9

ენტროპიის ფლუქტუაციური კლება განისაზღვრება ფორმულით:

$\Delta S = -\frac{A_{\min}}{T}$, $A_{\min} = mgh = mgl(1-\cos\varphi)$, მცირე გადახრებისათვის

$A_{\min} = \frac{mgl\varphi^2}{2}$. $\Delta S = -\frac{mgl\varphi^2}{2T}$.

ამოცანა # 10.10

$$\overline{\left(\Delta r_C\right)^2} = \frac{3}{5N} R_0^2$$

12. მათემატიკური დამატება

1. ეილერის Γ ფუნქცია

ეილერის გამა ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx,\ \alpha>0.$$

დავამტკიცოთ $\Gamma(\alpha)$ ფუნქციის შემდეგი თვისებები:

$$\Gamma(\alpha)=1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\ \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\ \Gamma(n+1)=n!.$$

ამოხსნა:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=e^{-x}\Big|_0^\infty=1.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx=(x=y^2,dx=2ydy)=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy.$$

განვიხილოთ ინტეგრალი: $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx.$

$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dye^{-\alpha(x^2+y^2)}$. გადავიდეთ სფერულ კოორდინატებზე:

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$.

გარდაქმნის იაკობიანი

$$D=\begin{vmatrix}\partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta\\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r.$$

აქედან: $I^2=\int_0^\infty rdr\int_0^{2\pi}d\theta e^{-\alpha r^2}=2\pi\int_0^\infty e^{-\alpha r^2}rdr=-\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha r^2}\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{\alpha}.\ I=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ და $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha dx=-\int_0^\infty x^\alpha de^{-x}=-x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty+\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha),$$

ე.ი. $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$. კერძოდ, როცა $\alpha=n$

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=...=n(n-1)(n-2)...1\cdot\Gamma(1)=n!$.

2. ზოგიერთი ინტეგრალის გამოთვლა

გამოთვალეთ ინტეგრალი: $I_n=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^n dx$.

გავაკეთოთ ჩასმა $\alpha x^2=y$, რაც გვაძლევს $x=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\alpha}}$, $x^n=\alpha^{-\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}}$,

$dx=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}y^{-\frac{1}{2}}dy$,

$I_n=\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{n-1}{2}}dy$, თუ გავიხსენებთ Γ ფუნქციის განსაზღვრებას, მაშინ მივიღებთ: $I_n=\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

როცა $n=0$ მაშინ $I_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

როცა $n=2r,\ r>0$, მაშინ:

$$I_{2r}=\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{2r+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2r+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{2r+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2r-1}{2}+1\right)=$$

$$\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{2r+1}{2}}\frac{2r-1}{2}\Gamma\left(\frac{2r-1}{2}\right)=\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{2r+1}{2}}\frac{2r-1}{2}\Gamma\left(\frac{2r-3}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{2r+1}{2}}\frac{2r-1}{2}\frac{2r-3}{2}\Gamma\left(\frac{2r-3}{2}\right)=...$$

$$=\frac{(2r-1)!!}{2^{r+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2r+1}}}.$$

როცა $n=2r+1$, მაშინ

$$I_{2r+1}=\frac{1}{2}\alpha^{-\frac{2r+2}{2}}\Gamma\left(\frac{2r+2}{2}\right)=\frac{1}{2}\alpha^{-(r+1)}\Gamma(r+1)=\frac{r!}{2\alpha^{r+1}}.$$

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალი:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^m e^{-\alpha x^n}dx,\quad m=0,1,2,...\quad n=2,4,6,8...$$

ამოხსნა:

როცა m კენტია, მაშინ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx = \int_{-\infty}^{0} x^m e^{-\alpha x^n}dx + \int_{0}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx =$$ (პირველ ინტეგრალში $x \to -x$ მაშინ მივიღებთ)

$$= \int_{-\infty}^{0} (-x)^m e^{-\alpha(-x)^n} d(-x) + \int_{0}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx = -\int_{0}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx + \int_{0}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx = 0.$$

ამრიგად: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx = 0$, როცა m კენტია.

როცა m ლუწია, მაშინ:

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx = 2\int_{0}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx$. გამოვთვალოთ $\int_{0}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx$, გავაკეთოთ ჩასმა

$$\alpha x^n = y, \quad x = \frac{1}{\alpha^{1/n}} y^{1/n}, \quad dx = \frac{1}{n\alpha^{1/n}} y^{\frac{1}{n}-1}dy, \quad x^m = \frac{1}{\alpha^{m/n}} y^{m/n}.$$

$$\int_{0}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx = \frac{1}{n}\frac{1}{\alpha^{\frac{m+1}{n}}}\int_{0}^{\infty} y^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-y}dy = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{\alpha^{(m+1)/n}},$$

ამრიგად,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-\alpha x^n}dx = \frac{2}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{\alpha^{(m+1)/n}},$$ როცა m ლუწია.

ამ ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავთვალოთ შემდეგი ინტეგრალები:

1) $\int_{0}^{\infty} x e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha}$, 2) $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{\pi^{1/2}}{4\alpha^{3/2}}$,

3) $\int_{0}^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha^2}$, 4) $\int_{0}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(5/2)}{\alpha^{5/2}}$,

3. ალბათობის ინტეგრალი

ალბათობის ინტეგრალი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Phi(x) = erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}dt,$$

როცა $x \ll 1$, მაშინ ეს ინტეგრალი შეგვიძლია წარმოვადგონოთ შემდეგნაირად:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \ldots\right);$$

Gგანმარტებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი თანაფარდობები:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\pm x}^{\infty} e^{-t^2}dt = 1 \mp \Phi(x);$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\pm x}^{\infty} t^2 e^{-t^2}dt = \frac{1}{2} \pm \left\{\frac{x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} - \frac{1}{2}\Phi(x)\right\};$$

$$\Phi(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{1} e^{-t^2}dt \approx 0.84;$$

4. მაკდონალდსის ფუნქცია

მაკდონალდსის ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$K_\nu(z)=\frac{\pi^{1/2}(z/2)^2}{\Gamma(1/2+\nu)}\int_1^\infty e^{-zt}\left(t^2-1\right)^{\nu-1/2}dt\quad\left(\operatorname{Re}\nu>-1/2,\ |\arg z|<\pi/2\right);$$

მაკდონალდსის ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ რეკურენტულ თანაფარდობებს:

$$K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)=-\frac{2\nu}{z}K_\nu(z).$$

13. ძირითადი ფიზიკური მუდმივები

სინათლის სიჩქარე: $c = 3.00 \cdot 10^8$ მ/წმ;

პლანკის მუდმივა: $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ ჯ•წმ,

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-34}$$ ჯ•წმ;

გრავიტაციული მუდმივა: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ ნ•მ^2/კმ^2;

ბოლცმანის მუდმივა: $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ ჯ/k;

აირის უნივერსალური მუდმივა: $R = 8.31$ **ჯ**/k•მოლი**;**

ავოგადროს რიცხვი: $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ მოლ$^{-1}$;

ელემენტარული მუხტი: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ კ;

ელექტრული მუდმივა : $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ კ^2/ნ•მ^2;

ელექტრონის მასა: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ კგ;

ელექტრონის კუთრი მუხტი: $(e/m) = 1.76 \cdot 10^{11}$ კ/კგ;

ბორის პირველი რადიუსი: $r_1 = \dfrac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0.53 \cdot 10^{-10}$ მ;

რიდბერგის მუდმივა: $R = 3.29 \cdot 10^{15}$ წმ$^{-1}$;

კომპტონის ტალღის სიგრძე: $\lambda_c = (h/m_e c) = 2.43 \cdot 10^{-12}$ მ;

ელექტრონის კლასიკური რადიუსი: $r_e = (e^2/m_e c^2) = 2.82 \cdot 10^{-15}$ მ;

პროტონის მასა: $m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}$ კგ;

ნეიტრონის მასა: $m_n = 1.675 \cdot 10^{-27}$ კგ.

14. პასუხები

ამოცანა # 1.1

$$dw=\frac{dt}{\tau}=\frac{dx}{a}.$$

ამოცანა # 1.2

$$dw=\frac{2dx}{Tv_0\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{dx}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}.$$

ამოცანა # 1.3

$$dw(x,y)=\frac{4}{a^2b^2}xydxdy,$$

ამოცანა # 1.4

$$dw(x)=\frac{2}{a^2}xdx.$$

ამოცანა # 1.5

$$dw=\alpha e^{-\alpha x}dx,\quad \overline{x}=\frac{1}{\alpha},\ \overline{x^2}=\frac{2}{\alpha^2},\ \overline{(\Delta x)^2}=\frac{1}{\alpha^2},\ \delta x=\frac{\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}}{\overline{x}}=1,$$

ამოცანა # 1.6

$$C=\frac{\alpha}{\pi}$$

ამოცანა # 1.7

$$dw(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha x^2}dx.$$

ამოცანა # 1.8

$$dw=2\alpha e^{-\alpha y^2}ydy.$$

ამოცანა # 1.9

$$dw(x)=\frac{dx}{b-a},\quad \overline{x}=\int_a^b dw(x)x=\frac{a+b}{2},\ \overline{x^2}=\int_a^b dw(x)x^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$\overline{(\Delta x)^2}=\overline{(x-\overline{x})^2}=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

ამოცანა # 1.10

$$\frac{1}{N}.$$

ამოცანა # 1.11

$$\frac{1}{36}.$$

ამოცანა # 1.12

$$\frac{1}{12}.$$

ამოცანა # 1.13

$$3.5.$$

ამოცანა # 1.14

$$dw(x)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\alpha x^2}dx,\quad \overline{x}=0,\ \overline{x^2}=\frac{1}{2\alpha},\ \overline{(\Delta x)^2}=\frac{1}{2\alpha}.$$

ამოცანა # 1.15

$$dW(x,y)=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy,$$

$$\overline{x^2}=\frac{c}{2(ac-b^2)},\ \overline{y^2}=\frac{a}{2(ac-b^2)},\ \overline{xy}=-\frac{b}{2(ac-b^2)}.$$

ამოცანა # 1.16

$$W_N(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{v}{V}\right)^n\left(1-\frac{v}{V}\right)^{N-n} .$$

ამოცანა # 1.18

$$P_n(t)=\frac{\left(\bar{n}\right)^n}{n!}e^{-\bar{n}} .$$

ამოცანა # 1.19

$$\overline{\Delta n^2}=n_0 t .$$

ამოცანა # 1.20

ა) 0.064, ბ) 0.04912.

ამოცანა # 1.21

0.027, 0.142, 0.303, 0.321, 0.171, 0.036.

ამოცანა # 1.24

$$dw(\varphi)=\frac{d\varphi}{2\pi} .$$

ამოცანა # 3.1

$$dw=e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{d\varepsilon}{kT} .$$

ამოცანა # 3.2

გიბსის კანონიკური განაწილება:

ა) $\Gamma(E)=\dfrac{(2mE)^{3N/2}\pi^{3N/2}V^N}{\Gamma\left(\dfrac{3N}{2}+1\right)}$,

$$\Omega(E)=\frac{\partial\Gamma(E)}{\partial E}=\frac{(2m)^{3N/2}E^{3N/2-1}\dfrac{3N}{2}\cdot\pi^{3N/2}}{\Gamma\left(\dfrac{3N}{2}+1\right)},$$

$$\rho(H)=\delta(H-E)\cdot\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)\cdot E^{1-\frac{3N}{2}}\cdot\frac{2}{3N}\cdot\frac{V^N}{(2m)^{3N/2}\cdot\pi^{3N/2}} .$$

ბ) $\Gamma(E)=E^N\cdot\left(\dfrac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\dfrac{1}{N!}$, $\Omega(E)=\dfrac{\partial\Gamma(E)}{\partial E}=E^{N-1}\cdot\left(\dfrac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\dfrac{1}{(N-1)!}$,

$$\rho(H)=\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^N(N-1)!\,\delta(H-E)\cdot E^{1-N} .$$

ამოცანა # 3.4

$$\overline{E^n}=\frac{(kT)^n\cdot\Gamma\left(\dfrac{3N}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3N}{2}\right)},\quad \alpha=kT\sqrt{\frac{3N}{2}}.\quad \delta=\sqrt{\frac{2}{3N}}.$$

ამოცანა # 3.5

$$P=\frac{TN}{V},\quad E=\frac{3NT}{l},\quad PV=\frac{l}{3}E .$$

ამოცანა # 3.6

$$\Gamma(E)=\frac{(2mE)^{3N/2}\pi^{3N/2}V^N}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)},$$

$$T=\frac{2E}{3N},\ S=\ln\Gamma(E)=N\ln V+\frac{3N}{2}\ln E+\ln\frac{(2m\pi)^{2N/2}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}.$$

ამოცანა # 3.7

$$\Gamma(E)=E^N\cdot\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\frac{1}{N!},\ S=\ln\Gamma(E)=N\ln E+\ln\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\cdot\frac{1}{N!},\ E=TN.$$

ამოცანა # 3.8

$$Z(T)=(2m\pi kT)^{3N/2}V^N\ .$$

ამოცანა # 3.9

$$Z(T)=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^N\cdot\frac{kT}{(N-1)!}.$$

ამოცანა # 3.10

$$dW(E)=\frac{e^{-E/T}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}\cdot\left(\frac{E}{T}\right)^{\frac{3N}{2}}\cdot\frac{dE}{E}.$$

ამოცანა # 3.11

$$dw(p)=\frac{e^{-\frac{c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}}dp_xdp_ydp_z}{4\pi(mc)^3\left(2\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2K_1\left(\frac{mc^2}{kT}\right)+\left(\frac{kT}{mc^2}\right)K_0\left(\frac{mc^2}{kT}\right)\right)}.$$

ამოცანა # 3.12

$$PV=NT.$$

$$E=\left(1+\frac{\frac{2}{\alpha}\left(K_0(\alpha)+\frac{2}{\alpha}K_1(\alpha)+\frac{\alpha}{2}K_1(\alpha)\right)}{\frac{2}{\alpha}\cdot\left(K_0(\alpha)+\frac{2}{\alpha}K_1(\alpha)\right)}\right)=$$

$$=\left(1+2\frac{\left(K_0(\alpha)+\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{\alpha}{2}\right)K_1(\alpha)\right)}{\left(K_0(\alpha)+\frac{2}{\alpha}K_1(\alpha)\right)}\right),$$

$$\alpha=\frac{mc^2}{kT}.$$

ამოცანა # 3.13

$$Z(T)=4\pi(mc)^3\left(2\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2K_1\left(\frac{mc^2}{kT}\right)+\left(\frac{kT}{mc^2}\right)K_0\left(\frac{mc^2}{kT}\right)\right).$$

ამოცანა # 3.14

$$\Gamma=\frac{4\pi V\varepsilon^3}{3c^3},\ \Omega(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi V\varepsilon^2}{c^3h^3}d\varepsilon.$$

ამოცანა # 3.18

$dw=C\exp\left\{-\dfrac{E_0-\sum\frac{m}{2}[\Omega r]^2}{kT}\right\}d\Gamma$, სადაც E_0 სისტემის ენერგიაა არამბრუნავ სისტემაში.

ამოცანა # 3.19

$$\varepsilon_{rot}=\frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}\right),$$

$$dw_M=(2\pi T)^{-3/2}(I_1I_2I_3)^{-1/2}\,e^{-\frac{1}{2T}\left(\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}\right)}dM_1dM_2dM_3\,,$$

$$dw_M=(2\pi T)^{-3/2}(I_1I_2I_3)^{1/2}\,e^{-\frac{1}{2T}\left(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2\right)}d\omega_1d\omega_2d\omega_3\,.$$

ამოცანა # 3.20

$$\sqrt{\overline{\omega^2}}=\sqrt{T\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}+\frac{1}{I_3}\right)},\quad \sqrt{\overline{M^2}}=\sqrt{T\left(I_1+I_2+I_3\right)}\,.$$

ამოცანა # 3.22

$$\Omega(E)\sim\exp\left\{\frac{a^{\frac{1}{n}}n}{k(n-1)}E^{\frac{n-1}{n}}\right\}.$$

ამოცანა # 4.1

ა) $dw_v=\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2T}\right)dv_xdv_ydv_z\,,$

ბ) $dw_v=\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2T}}v^2\sin\theta d\theta d\varphi dv\,,$

გ) $dw_\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi T^3}}e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon\,.$

ამოცანა # 4.2

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{8T}{\pi m}}\,,\quad \overline{|v_x|}=\overline{|v_y|}=\overline{|v_z|}=\sqrt{\frac{2T}{\pi m}}\,.$$

ამოცანა # 4.3

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{2T}{m}}.$$

ამოცანა # 4.4

$$\overline{v^n}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right),$$

$$\overline{v^{2r}}=\left(\frac{T}{m}\right)^2(2r+1)!!,\quad \overline{v^{2r+1}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2T}{m}\right)^{\frac{2r+1}{2}}(r+1)!.$$

ამოცანა # 4.5

$$\overline{(\Delta v)^2}=\frac{T}{m}\left(3-\frac{8}{\pi}\right).$$

ამოცანა # 4.6

$$\overline{\frac{1}{v}}=\sqrt{\frac{2m}{\pi T}}.$$

ამოცანა # 4.7

$$\bar{\varepsilon}=\frac{3T}{2},$$

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{15T^2}{4},\quad \overline{(\Delta\varepsilon)^2}=\overline{\varepsilon^2}-(\bar{\varepsilon})^2=\frac{3}{2}T^2.$$

ამოცანა # 4.8

$$\varepsilon_m=\frac{T}{2}.$$

ამოცანა # 4.9

$$w=_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_0}=erf\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{T}\right)-\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{T}e^{-\varepsilon_0/T}.$$

ამოცანა # 4.10

$$w_{\varepsilon\ge\varepsilon_0}=1-erf\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{T}\right)+\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{T}e^{-\varepsilon_0/T}\approx\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{T}e^{-\varepsilon_0/T}.$$

ამოცანა # 4.11

$$\frac{n_{\varepsilon<\varepsilon_0}}{n_{\varepsilon>\varepsilon_0}}=\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}erf(1)-\frac{1}{e}}{1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}erf(1)+\frac{1}{e}}.$$

ამოცანა # 4.12

$$n_{0\le v_x\le v_x^0}=\frac{n}{2}erf\left(\frac{v_x^{(0)}\sqrt{m}}{\sqrt{2T}}\right).$$

ამოცანა # 4.13

$$n_{0\le v\le v_{\max}}=n\left(erf(1)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\right).$$

ამოცანა # 4.14

$$\frac{N_1}{N}=\frac{\sqrt{6}}{\pi}e^{-3/2}+1-erf\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 0.39.$$

ამოცანა # 4.15

$\bar{v}_{H_2}\approx 1700$ მ/წმ, $\bar{v}_{N_2}\approx 454.3$ მ/წმ, $\bar{v}_{O_2}\approx 425$ მ/წმ.

ამოცანა # 4.16

$$\frac{N_1}{N}\approx 0.00390475.$$

ამოცანა # 4.17

$$\frac{N_1}{N}\approx 0.00865522.$$

ამოცანა # 4.18

$$\frac{n_{v<\bar{v}}}{n}=erf\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)-\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{4}{\pi}}.$$

ამოცანა # 4.19

$$N_{\frac{1}{2}v_m\le v\le 2v_m}=erf(2)-erf(1/2)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-1/4}-\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-4}.$$

ამოცანა # 4.20

$$\Delta N=163\cdot 10^6.$$

ამოცანა # 4.21

$\overline{v_{H_2}} = 1700$ მ/წმ, $\bar{\varepsilon} = 5.65\cdot 10^{-21}$ ჯ, $\sqrt{\overline{v^2}} = 1845$ მ/წმ.

ამოცანა # 4.22

$\Delta N = 9.7\cdot 10^4$, 4.23 $v_{mH_2} = 1490$ მ/წმ, $v_{mHe} = 1065$ მ/წმ, $v_{mN_2} = 402.5$ მ/წმ.

ამოცანა # 4.24

$\gamma \approx 0.486$, გაუსის განაწილებისათვის $\gamma = 0$.

ამოცანა # 4.25

$\varepsilon = -2.22$, გაუსის განაწილებისათვის $\varepsilon = 0$.

ამოცანა # 4.26

$$\nu = \frac{N}{V}\left(\frac{T}{2\pi m}\right)^{1/2}.$$

ამოცანა # 4.27

$$d\nu_\theta = \left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\frac{N}{V}\sin\theta\cos\theta\, d\theta.$$

ამოცანა # 4.28

$$d\nu = \frac{\pi N}{V}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^3 dv.$$

ამოცანა # 4.29

$$E_{LF\}} = \frac{N}{V}\sqrt{\frac{2T^3}{\pi m}}.$$

ამოცანა # 4.30

$$dw = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2\right)}{2kT}}dv_x dv_y,$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}},\quad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}},\quad \text{PP } P = \frac{N}{S}kT.$$

ამოცანა # 4.31

$$dN(\theta) = \frac{1}{2}S\frac{N}{V}\bar{v}\cos\theta\,\sin\theta\, d\theta.$$

ამოცანა # 4.32

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{P}{kT}S\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

ამოცანა # 4.33

$$J \approx J_0 e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{\delta^2}},\quad \delta = \sqrt{\frac{2kT\lambda_0^2}{mc^2}}.$$

ამოცანა # 4.34

$\bar{\varepsilon} = \dfrac{m\overline{v^2}}{2} = \dfrac{3}{2}kT$, $\varepsilon_0 = \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{kT}{2}$, $\bar{\varepsilon} \neq \varepsilon_0$, რადგანაც გვაქვს ნაწილაკთა ბევრი რიცხვი სისტემაში.

ამოცანა # 4.35

$d\rho(v') = 4\pi\left(\dfrac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v'^2}{2kT}} v'^2 dv'$, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\overline{v'} = \sqrt{2}\bar{v}$. სადაც $\bar{v}$ არის ნაწილაკის მოძრაობის საშუალო სიჩქარე.

ამოცანა # 4.36

$$\nu = 4\pi\sigma\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}, \quad \sigma = 4\pi r_0^2, \quad \lambda = \frac{\bar{v}}{\nu} = \frac{1}{4\pi n r_0^2\sqrt{2}}.$$

ამოცანა # 4.37

$$J_x = n_0 e\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2} e^{-\frac{W}{2T}} = \frac{1}{4} n_0 e\bar{v} e^{-\frac{W}{2T}}.$$

ამოცანა # 4.38

$$dN(v_z, v_\perp) = 2\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(v_z^2+v_\perp^2\right)}{2kT}} v_\perp dv_\perp dv_z.$$

ამოცანა # 4.39

$$\bar{F} = 4\sqrt{\pi}\rho R^2 T\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(\xi)\left(1+2\xi^2\right)+\xi e^{\xi^2}\right].$$

ამოცანა # 4.41

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{9k\pi T}{8m}}, \quad \overline{v^2} = \sqrt{\frac{4kT}{m}}.$$

ამოცანა # 4.42

$$\frac{N_1}{N} = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{4}{\pi}} + 1 - erf\left(\sqrt{\frac{4}{\pi}}\right) \approx 0.5.$$

ამოცანა # 4.44

$$\nu_{v_x > v_0} = n\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_0^2}{2kT}}.$$

ამოცანა # 4.45

$$N_1 = S\frac{N}{2V}\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}\frac{R^2}{R^2+h^2}.$$

ამოცანა # 5.1

$$P = Np\left(cth\frac{pE}{kT} - \frac{kT}{pE} \right)$$ მაღალტემპერატურულ მიახლოებაში:

$kT >> pE$, $P = N\frac{p^2}{3kT}$, დაბალტემპერატურულ მიახლოებაში $kT << pE$, $P \approx Np$.

ამოცანა # 5.2

$$U = -N\left(\frac{p^2E^2}{3kT} \right), \quad C_d = \frac{Nk}{3}\left(\frac{pE}{kT} \right)^2.$$

ამოცანა # 5.4

$$\frac{\Delta N}{N} \approx 0.15.$$

ამოცანა # 5.5

$H = \frac{RT}{\mu g}\ln 3 \approx 8.6$ კმ, μ მოლური მასაა.

ამოცანა # 5.6

$$N_A = \frac{RT\ln\frac{n_1}{n_2}}{gV(\rho - \rho_1)(h_2 - h_1)} \approx 6.1\cdot 10^{26}\,\frac{1}{K\cdot Mol}.$$

ამოცანა # 5.7

$$dw(z) = \frac{\beta e^{-\beta z}dz}{\left(1 - e^{-\beta H}\right)}, \quad \beta = \frac{mg}{kT}.$$

5.8 $\bar{u} = kT\left(1 - \frac{mgH}{kT}\cdot\frac{1}{e^{\frac{mgH}{kT}} - 1} \right).$

ამოცანა # 5.9

$$F = -NkT\ln\frac{e}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} - NkT\ln\left(\frac{kT}{mg}S\left(1 - e^{-\frac{mgh}{kT}} \right) \right),$$

$$E = \frac{5}{2}NkT - \frac{Nmgh}{e^{\frac{mgh}{kT}} - 1},$$

$$C_V = \frac{5}{2}Nk - \frac{N(mgh)^3 e^{\frac{mgh}{kT}}}{\left(e^{\frac{mgh}{kT}} - 1 \right)^2}\cdot\frac{1}{kT^2},$$

1) $H \to \infty$, $mgH >> kT$,

$$F = -kNT\ln\left[\frac{e}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} S\frac{kT}{mg} \right],$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = kN\left(\ln\left(\frac{eS}{Nmg}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (kT)^{3/2} \right) + \frac{5}{2} \right),$$

$$E = \frac{5}{2}NkT.$$

2) $mgh << kT$ $F = -NkT\ln\left(\frac{Ve}{N}\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$, $C_V = \frac{3}{2}Nk$, $E = \frac{3}{2}NkT$.

ამოცანა # 5.11

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1 + e^{\frac{m\omega^2R^2}{kT}}\left(\frac{m\omega^2R^2}{kT} - 1 \right)}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{kT}} - 1}.$$

ამოცანა # 5.12

$$q = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)_{r=R}}{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)_{r=0}} = e^{\frac{(m_1 - m_2)\omega^2R^2}{2kT}}.$$

ამოცანა # 5.13

$$\frac{n\left(r=\frac{1}{2}R\right)}{n(r=R)}=e^{-\frac{3m\omega^2R^2}{8kT}}, \quad m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho .$$

ამოცანა # 5.14

$$m=\frac{2kT\rho\ln\alpha}{(\rho-\rho_0)\left(r^2-r_0^2\right)\omega^2}.$$

ამოცანა # 5.15

$$\overline{r^2}=\frac{2kT}{m\omega^2}\cdot\frac{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}}\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}-1\right)+1}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}}-1}.$$

ამოცანა # 5.16

$$E=NkT\frac{1-\exp\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)\left(1-\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)}{1-\exp\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)},$$

$$C_V=\frac{3}{2}Nk+Nk\left[1-\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)^2\cdot\frac{\exp\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)}{\left(1-\exp\left(\frac{m\omega^2R^2}{2kT}\right)\right)^2}\right].$$

ამოცანა # 5.17

$$dw(z,r)=\frac{mg}{kT}\cdot\frac{e^{-\frac{mgz}{kT}}}{1-e^{-\frac{mgH}{kT}}}\cdot\frac{m\omega^2}{kT}\cdot\frac{e^{\frac{m\omega^2r^2}{2kT}}}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}}-1}dzdr .$$

ამოცანა # 5.18

$$F=F_0-NkT\ln\left[\frac{2kT}{m\omega^2R^2}\left(e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}}-1\right)\right].$$

ამოცანა # 5.19

$$E=\frac{5}{2}RT-\frac{\mu gH}{\exp\left(\frac{\mu gH}{RT}\right)-1},$$

$$C_V=\frac{5}{2}R-R\left(\frac{\mu gH}{RT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{\mu gH}{RT}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\mu gH}{RT}\right)-1\right]^2}.$$

1) $C_V\approx\frac{3}{2}R,\ \ \mu g << RT$, 2) $C_V\approx\frac{5}{2}R,\ \ \mu gT >> RT$.

ამოცანა # 5.20

$$n(r)=\frac{Nm\omega^2e^{m\omega^2r^2/2T}}{2\pi Tl\left(e^{\frac{m\omega^2R^2}{2T}}-1\right)}, \quad P=-\frac{NkT}{V}\frac{U(R)}{T}\frac{e^{-\frac{U}{T}}}{e^{-\frac{U}{T}}-1}, \quad U=-\frac{m\omega^2R^2}{2}.$$

ამოცანა # 5.21

$d\rho(r)=Ce^{-U(x,y,z)/kT}dxdydz$, $dn(\vec{r})=n_0d\rho(\vec{r})$, n_0 ნაწილაკთა რიცხვი მოცულობის ერთეულში.

ამოცანა # 5.22

$$z_0=\frac{kT}{mg},$$

ამოცანა # 5.23

$$z_k = \frac{\int_0^h z e^{-\frac{m_k g z}{kT}} dz}{\int_0^h e^{-\frac{m_k g z}{kT}} dz} = z_{0k} - \frac{h}{e^{h/z_{0k}} - 1},$$

$$z_{0k} = \frac{kT}{m_k}, \quad z_0 = \frac{\sum_{k=1}^{l} N m_k z_k}{\sum_{k=1}^{l} N m_k} = \frac{lkT}{gM} - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{l} \frac{h m_k}{e^{h/z_{0k}} - 1}, \quad M = \sum_k m_k .$$

ამოცანა # 5.24

$$P(h) = \sum_{k=1,2} \frac{N_k}{S} \cdot \frac{m_k g}{e^{\frac{m_k g h}{kT}} - 1}, \quad x_C = \frac{\bar{u}}{\mu g}, \quad \bar{u} = \sum_{k=1,N} N_K \left(kT - \frac{m_k g h}{e^{\frac{m_k g h}{kT}} - 1} \right).$$

ამოცანა # 5.25

$n(\infty) \approx 10^{-344}$ ნაწილი.

ამოცანა # 5.26

$P(1000) = 883$ მბარი $250\,K$ -ზე,

$P(1000) = 904$ მბარი $300\,K$ -ზე.

ამოცანა # 5.27

ზღვის დონეზე $\rho_{N_2} = 0.975$ კგ,

$\rho_{O_2} = 0.299$ კგ, $\dfrac{\rho_{N_2}}{\rho_{O_2}} = 3.26$, როცა $z = 5532$ მ, $\rho_{N_2} = 0.499$ კგ,

$\rho_{O_2} = 0.139$ კგ, $\dfrac{\rho_{N_2}}{\rho_{O_2}} = 3.59.$

ამოცანა # 5.28

$0\,^0C$ -ზე $h_{N_2} = 5.729$ კმ, $h_{CO_2} = 3.647$ კმ, $30\,^0C$ -ზე $h_{N_2} = 6.358$ კმ, $h_{CO_2} = 4.047$ კმ.

ამოცანა # 5.29

$\mu = 5.44 \cdot 10^{-21}$ კგ, $\rho = 1.0055$.

ამოცანა # 5.30

$\rho(3) = 0.159\rho(0)$, $h = 1.13$ მ.

ამოცანა # 5.32

$m = 0.118$ კგ.

ამოცანა # 5.33

$$\bar{z} = \frac{kT}{mg} = 7.85 \text{ კმ.}$$

ამოცანა # 5.34

$$\overline{z^2} = 2\left(\frac{kT}{mg}\right)^2 .$$

ამოცანა # 5.35

$$n_\infty = n_0 S \frac{kT}{mg} .$$

ამოცანა # 5.36

$$\bar{u} = kT\left(1 - \frac{mgh}{e^{\frac{mgh}{kT}} - 1}\right).$$

ამოცანა # 6.20

$\alpha = p_0\beta\gamma$, 6.23 $C_p - C_V = Nk = \mu R$ იდეალური გაზისათვის,

$$C_p - C_V = \frac{R}{1 - \dfrac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}.$$

ამოცანა # 6.24

$$Q = \frac{C_V}{R}\left[\left(P + \frac{a}{V_2^2}\right)(V_2 - b) - \left(P + \frac{a}{V_1^2}\right)(V_1 - b) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)\right].$$

ამოცანა # 6.25

$PV^n = const$, $n = \dfrac{C_p - C}{C_V - C}$ პოლიტროპის მაჩვენებელი.

ამოცანა # 6.26

$S = S_0 + C_p \ln T - \alpha V_0 P = const$, 6.27 $\eta = \dfrac{T_1 - T}{T_1}$, 6.28 $F = -T \ln Z$,

$$S = \ln z + T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V, \qquad PV = T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_T, E = T^2\left(\frac{\partial \ln z}{\partial T}\right)_V,$$

$$C_V = 2T\left(\frac{\partial \ln z}{\partial T}\right)_V + T^2\left(\frac{\partial^2 \ln z}{\partial T^2}\right)_V,$$

$$W = T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln T}\right)_V + T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_V, \quad \Phi = T\left(\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_T - \ln Z\right).$$

ამოცანა # 6.30

$Q = \lambda m = 2258 \cdot 18 = 40624$ ჯ.

(λ ორთქლადქცევის კუთრი სითბოა, რომელიც ტოლია $\lambda = 2258$ ჯ/გრ).

ამოცანა # 6.32

$$V_{kr} = 3b, \quad P_{kr} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{kr} = \frac{8a}{27Rb}, \quad s = \frac{8}{3} = 2,67.$$

ამოცანა # 6.33

$$P_{kr} = \frac{a}{4e^2b^2}, \quad V_{kr} = 2b, \quad T_{kr} = \frac{a}{4Rb}, \quad s = \frac{e^2}{2} = 3.695.$$

ამოცანა # 6.34

$$P_{kr} = \frac{a}{4(4b)^{5/3}}, \quad V_{kr} = 4b, \quad T_{kr} = \frac{5ab}{4R(4b)^{5/3}}.$$

ამოცანა # 6.36

1) $\pi(2\varphi - 1) = \tau \exp\left\{2\left[1 - \dfrac{1}{\tau\varphi}\right]\right\}$,

2) $\left(\pi + \dfrac{4}{\varphi^{5/3}}\right)\left(\varphi + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{4}\tau$.

ამოცანა # 6.37

$$B = b - \frac{a}{RT},$$

$$C = b^2.$$

ამოცანა # 6.39

$$T_B = \frac{a}{Rb}.$$

ამოცანა # 6.40

$$1)\, B(T)=\frac{2}{3}\pi N\sigma^3,$$

$$2)\, B(T)=\frac{2}{3}\pi N\sigma^3\left[1-\left(R^2-1\right)\left(e^{-\varepsilon/kT}-1\right)\right],$$

$$3)\; B(T)=\frac{2\pi}{3}N\left(\frac{\alpha}{T}\right)^{3/n}\Gamma\left(1-\frac{3}{n}\right).$$

ამოცანა # 6.41

თითოეული ბურთისათვის ერთი და იმავე სითბოს რაოდენობის გადაცემისას პირველი ბურთის სიმძიმის ცენტრი ქვემოთ ჩამოიწევს, მეორესი ზემოთ აიწევს და სითბოს ნაწილი, რომელიც გადაეცემა მეორე ბურთს, წავა სიმძიმის ცენტრის ასაწევ მუშაობაში, შესაბამისად, ის ნაკლებად გათბება, ვიდრე პირველი, ამიტომაც $C_{P_2}>C_{P_1}$.

ამოცანა # 6.42

ზემოთ განხილული ყველა პროცესი წარმოადგენს პოლიტროპულ პროცესს $PV^n=const$, სხვადასხვა პოლიტროპის მაჩვენებლით:

$$n=\frac{C_P-C}{C_V-C}=\frac{C_V+R-C}{C_V-C}, \text{ აქედან } C=C_V-\frac{R}{n-1}.$$

ა) შემთხვევაში $PV^2=const$, $n=2$, ამიტომ $C_{PV^2}=C_V-R$,

ბ) შემთხვევაში $P^2V=const$, ანდა $PV^{1/2}=const$ $n=\frac{1}{2}$, $C_{P^2V}=C_V+2R$,

გ) შემთხვევაში $\frac{P}{V}=PV^{-1}=const$, $n=1$, $C_{P/V}=C_V+\frac{1}{2}R$.

ამოცანა # 6.43

$C=C_V+R=C_P$ 6.44 $n=\ln 4/\ln 3=1.26$, მუშაობა $A=1884,54$ კჯ,

სითბოს რაოდენობა $Q=659,59$ კჯ, შინაგანი ენერგიის ცვლილება $\Delta E=1225$ კჯ.

ამოცანა # 6.45

$$S=C_V\ln T+R\ln(V-b)+S_0,\quad T(V-b)^{R/C_V}=const,$$

$$\left(P+\frac{a}{V}\right)\cdot(V-b)^{(C_V+R)/C_V}=const.$$

ამოცანა # 6.46

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1+C_V\left(T_1-T_2\right)/R\ln\left(V_2/V_1\right)},\quad \eta<\frac{T_1-T_2}{T_1}=\eta_{carno}.$$

ამოცანა # 6.47

$$\eta=1-\frac{\gamma\left(\delta^{1/\gamma}-1\right)}{\delta-1},\ \text{6.48}\ \ \eta=1-\frac{1}{æ^{\gamma-1}}\frac{\rho^\gamma-1}{\rho-1},\ \text{6.49}\ \ \eta=1-\frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}.$$

ამოცანა # 6.51

$$\Delta S=k\sum_{i=1}^{2}N_i\ln\frac{N_i}{N_1+N_2}+k\left(N_1+N_2\right)\ln 2,\quad 0\le S\le 2kN\ln 2.$$

ამოცანა # 6.53

ა) $\Delta S=S_2-S_1=\nu C_P\left(T_1+T_2\right)^2/\left(4T_1T_2\right)$,

ბ) $\Delta S=S_2-S_1=\nu C_P\ln\left[\left(P_1+P_2\right)^2/\left(4P_1P_2\right)\right]$.

ამოცანა # 7.1

$$A = NT\ln\frac{V_1}{V_2} = NT\ln\frac{P_1}{P_2},$$

ამოცანა # 7.2

$$A = C_V T_1\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = C_V T_2\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right],$$

ამოცანა # 7.3

$$Q = C_V\left(T_2 - T_1\right).$$

ამოცანა # 7.4

$$A = -P\left(V_2 - V_1\right) = N\left(T_1 - T_2\right),\quad Q = C_P\left(T_2 - T_1\right).$$

ამოცანა # 7.5

$$A = \frac{a}{n-1}\left(V_2 - V_1\right),\quad Q = a\left(C_V + \frac{1}{1-n}\right)\left(V_2^{1-n} - V_1^{1-n}\right).$$

ამოცანა # 7.6

$$A = \left(V_2 - V_1\right)\left(P_2 - P_1\right).$$

ამოცანა # 7.7

$$A = \left(T_2 - T_1\right)N\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

ამოცანა # 7.8

$$Q = \left(T_2 - T_1\right)\left(S_2 - S_1\right) = \left(T_2 - T_1\right)\left(N\ln\frac{P_1}{P_2} + C_P\ln\frac{T_2}{T_1}\right).$$

ამოცანა # 7.9

$$A = N\left(T_2 - T_1\right)\ln\frac{P_2}{P_1}.$$

ამოცანა # 7.10

$$Q = C_P T_1\left[\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right] + C_P T_2\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right].$$

ამოცანა # 7.11

$$A = C_V T_2\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}\right] + C_V T_1\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\gamma}\right].$$

ამოცანა # 7.12

$$\Delta S = S - S_0 = C_P\ln\frac{\left(T_1 + T_2\right)^2}{4T_1T_2}.$$

ამოცანა # 7.13

$F = 58529.25$ ჯ, $P = 0.63\cdot10^5$ ნ/მ^2.

ამოცანა # 7.14

$E = 414$ ჯ.

ამოცანა # 7.15

$$S = Nk\left[\ln V + \frac{3}{2}\ln E\right] + const.$$

ამოცანა # 7.16

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{M}{\mu}R\ln 2.$$

ამოცანა # 7.17

$$\Delta S = N_1 k \ln\frac{N_1+N_2}{N_1} + N_2 k \ln\frac{N_1+N_2}{N_2}.$$

ამოცანა # 7.18

$$\Delta S \equiv 0.$$

ამოცანა # 7.21

$$Z_{\text{<h}} = \left(\frac{4\pi IkT}{h^2}\right)^N,$$

$$F_{\text{<H}} = -NkT\ln\left(\frac{4\pi IkT}{h^2}\right), \quad E_{\text{<H}} = NkT, \quad S_{\text{<H}} = Nk\left(1+\ln\frac{4\pi IkT}{h^2}\right).$$

ამოცანა # 7.22

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = Nk \quad \text{(იხ. წინა ამოცანა).}$$

ამოცანა # 7.23

$$l = r_0.$$

ამოცანა # 7.24

$\Delta F_{\text{<H}} = 2.3\cdot 10^3$ ჯ, $\Delta S_{\text{<H}} \approx 12$ ჯ/გრად.

ამოცანა # 7.25

$\Delta E = 4.2\cdot 10^6$ ჯ,
$\Delta S = 1.2\cdot 10^4$ ჯ/გრად.

ამოცანა # 7.26

$$a = \frac{12}{n-3}2^{-n}N_0^2 u_0 V_0, \text{ სადაც } V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3.$$

ამოცანა # 7.27

$$P_{\text{ehs}} = \left(\frac{N}{V}\right)^2 v_0\left(4kT - \frac{3\alpha}{d^n(3-n)}\right).$$

ამოცანა # 7.28

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \left(\frac{M_1}{\mu_1}+\frac{M_2}{\mu_2}\right)R\ln 2.$$

ამოცანა # 7.29

$$n_j = n\frac{T_C}{T}(2j+1)e^{-\frac{T_C}{T}j(j+1)}.$$

ამოცანა # 7.30

$\Delta E = 416$ კჯ, $\Delta F = -2.2\cdot 10^3$ კჯ,
$\Delta S = 1.4$ კჯ/გრად, 7.31 $\Delta E \approx 8.3\cdot 20^2\cdot 50\cdot e^{-20} \approx 0.000342152$
$\Delta C_V \approx 8.30\cdot 20^4\cdot e^{-20}\cdot(50/300) \approx 0.00273721$, $\Delta F = 0$, $\Delta S = 0$.

ამოცანა # 7.33

$$dw_\varepsilon = \frac{4\pi V e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\varepsilon^2 d\varepsilon}{Zh^3c^3}, \qquad Z = \frac{4\pi V}{h^3c^3}2(kT)^3, \qquad dw_\varepsilon = \frac{1}{2(kT)^3}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\varepsilon^2 d\varepsilon,$$

$$F = -nkT\ln\frac{8\pi V(kT)^3}{h^3c^3N!}, \quad P = nkT, \quad C_V = 3Nk.$$

ამოცანა # 7.34

$$S = \frac{3}{2}Nk\ln E + Nk\ln V + const.$$

ამოცანა # 7.35

$$F = -NkT\ln\frac{e}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} - NkT\ln\left[\frac{kTs}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgH}{kT}}\right)\right].$$

ამოცანა # 7.36

$$P = \frac{Nmg}{L^2}\frac{1}{e^{\frac{mgL}{kT}}-1}.$$

ამოცანა # 7.37

$$Z_{<h} = \left(\frac{8\pi^2}{h^3\tau}\right)^N \left(2\pi kT\right)^{\frac{3}{2}N}\left(I_\xi I_\eta I_\varsigma\right)^{\frac{1}{2}N},$$

$$F_{<H} = -NkT\left(\frac{3}{2}\ln 8\pi^2 + \frac{1}{2}\ln\frac{\pi I_\xi I_\eta I_\varsigma k^3T^3}{h^6\tau^2}\right),$$

I_ξ, I_η, I_ς მოლეკულის მთავარი ინერციის მომენტებია, τ მოლეკულის სიმეტრიის ღერძების რაოდენობა.

ამოცანა # 7.38

$$F = F_{BL} + \frac{n^2}{V}\left(RTb-a\right),$$

სადაც $n = \dfrac{N}{N_1} = \dfrac{m}{\mu}$ გაზის მოლების რაოდენობაა.

ამოცანა # 7.39

$$S = S_{BL} - \frac{n^2Rb}{V} = kN\left[\ln\frac{V}{N}\frac{\left(2\pi nkT\right)^{3/2}}{h^3} + \frac{5}{2}\right] - \frac{n^2Rb}{V}.$$

ამოცანა # 7.40

$$C_V = 3R.$$

ამოცანა # 7.41

$$C_V \approx 3R\left(1+\frac{3}{2}\frac{\beta}{\alpha^2}kT+\ldots\right).$$

ამოცანა # 7.42

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{4}kT.$$

ამოცანა # 7.43

$$C_V' = Nk\delta T, \quad \delta = \frac{15}{2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^3} - \frac{3\gamma}{\alpha^2}.$$

ამოცანა # 7.44

$$A_{Max} = E_0 - E = 2C_V\left(T_0 - T\right) = 2C_VT_0\left[1-\left(\frac{4V_1V_2}{\left(V_1+V_2\right)^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\right].$$

ამოცანა # 7.45

$$A_{Max} = C_V\left\{T_1 + T_2 - 2^\gamma\sqrt{T_1T_2}\left[\frac{T_1T_2}{\left(T_1+T_2\right)^2}\right]^{\frac{\gamma-1}{2}}\right\}.$$

ამოცანა # 7.46

$$A_{Min} = NT_0\left[\ln\frac{P_2}{P_1} + P_0\left(\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}\right)\right].$$

ამოცანა # 7.47

$$A_{Max} = C_V\left(T-T_0\right) + C_VT_0\ln\frac{T_0}{T}.$$

ამოცანა # 7.48

$$A_{Max}=C_V\left(T-T_0\right)+NT_0\ln\frac{P}{P_0}+C_PT_0\ln\frac{T_0}{T}+N\left(T\frac{P_0}{P}-T_0\right).$$

ამოცანა # 7.49

იდეალური გაზისათვის: $T_2-T_1=0,$

ვან-დერ-ვაალსის გაზისათვის: $T_2-T_1=\dfrac{Na}{C_V}\left(\dfrac{1}{V_2}-\dfrac{1}{V_1}\right).$

ამოცანა # 8.1

$$E=N\left(\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}\right),\quad C_V=Nk\frac{e^{\hbar\omega/kT}}{\left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right)^2}\cdot\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2.$$

ამოცანა # 8.2

$$C_V^{\text{H\{}}=-0.054R.$$

ამოცანა # 8.3

$$a_v=h,\ \text{8.4}\quad F=NkT\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}-\ln\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)\right].$$

ამოცანა # 8.5

$$E=N\hbar\omega\left(1+\frac{2}{e^{\hbar\omega/T}-1}\right),$$

$$C_V=N\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 sh^{-2}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right).$$

ამოცანა # 8.6

$$Z=n-\frac{n(n+1)\Delta}{2kT}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\left(\frac{\Delta}{kT}\right)^2,$$

$$F=-kT\ln n+(n+2)\Delta-F\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)\left(\frac{\Delta}{kT}\right)^2,$$

$$C_V=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\frac{\Delta^2}{kT^2}.$$

ამოცანა # 8.7

$$n_{\varepsilon>\varepsilon_1}=N\exp\left\{-\frac{\hbar\omega n_1}{kT}\right\}.$$

ამოცანა # 8.8

$$E = N\varepsilon_0 + \frac{NT_C}{e^{T_C/T} - 1}, \quad C_V = N\left(\frac{T_C}{T}\right)^2 \frac{e^{T_C/T}}{\left(e^{T_C/T} - 1\right)^2}.$$

ამოცანა # 8.9

$$S = k\left[\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon - E} + \frac{E}{\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon - E}{E}\frac{g_2}{g_1}\right].$$

ამოცანა # 8.10

$$E = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} - \frac{n\varepsilon}{e^{n\varepsilon/kT} - 1}.$$

ამოცანა # 8.11

$$a = h^2.$$

ამოცანა # 8.12

$E_{rot} = NT\left(1 - \frac{\hbar^2}{6IT}\right)$, $C_{rot} = N$, როცა $T >> T_C$ მაღალი ტემპერატურების დროს, $E_{rot} = \frac{3N\hbar^2}{I}e^{-\frac{\hbar^2}{IT}}$, $C_{rot} = 3N\left(\frac{\hbar^2}{IT}\right)^2 e^{-\frac{\hbar^2}{IT}}$, როცა $T << T_C$ დაბალი ტემპერატურების დროს.

ამოცანა # 8.13

მაღალ ტემპერატურებზე:

$$T >> T_C, \quad F = NT\ln\frac{T_C}{T}, \quad S = N\left(\ln\frac{T}{T_C} + 1\right),$$

დაბალ ტემპერატურებზე:

$$T << T_C, \quad F = -3NTe^{-\frac{2T_c}{T}}, \quad S = 3Ne^{-\frac{2T_C}{T}}\left(1 + \frac{2T_C}{T}\right).$$

ამოცანა # 8.14

$T_C^{H_2} = 87\,K$, $T_C^{N_2} = 2.19\,K$, $T_C^{O_2} = 2.1\,K$, $T_C^{Cl_2} = 0.35\,K$, $T_C^{NCl} = 15\,K$, $T_C^{NO} = 2.43\,K$.

ამოცანა # 8.15

$$T_C^{H_2} : T_C^{D_2} : T_C^{HD} = 2 : 1 : \frac{3}{2}.$$

ამოცანა # 8.16

$$T_C^{\mathrm{H\{}} \approx 3118\,K.$$

ამოცანა # 8.17

$$T_C^{\mathrm{H\{}}(H_2) : T_C^{\mathrm{H\{}}(HD) : T_C^{\mathrm{H\{}}(D_2) = \sqrt{2} : \sqrt{\frac{3}{2}} : 1.$$

ამოცანა # 9.2

$$dn_0(v) = \begin{cases} \dfrac{8\pi m^3}{(2\pi\hbar)^3} v^2 dv, & v < v_m \\ 0, & v > v_m. \end{cases}, \text{ სადაც } v_m = \sqrt{\frac{2\mu}{m}}.$$

ამოცანა # 9.3

$$\bar{v} = \frac{3}{4} v_m, \ \overline{v^2} = \frac{3}{5} v_m^2, \ \overline{\frac{1}{v}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{v_m}, \ v_m = \sqrt{\frac{2\mu}{m}}.$$

ამოცანა # 9.4

$$C_V = \frac{\pi^2 N k^2 T}{2\mu_0}\left(1 - \frac{5}{8}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right),$$

$$S = \frac{\pi^2 N k^2 T}{2\mu_0}\left(1 - \frac{5}{24}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right).$$

ამოცანა # 9.5

$$v = \frac{\hbar \pi^{2/3}}{16m}\left(\frac{3N}{V}\right)^{4/3}.$$

ამოცანა # 9.6

$$v = \frac{c}{4} \cdot \frac{N}{V}.$$

ამოცანა # 9.7

ა) $E = \frac{3}{4} N \varepsilon_F = \frac{3}{4} N \mu_0$. ბ) $pV = \frac{E}{3}$.

ამოცანა # 9.8

$$C_V^e = \pi^2 N \frac{k^2 T}{\mu_0}.$$

ამოცანა # 9.9

$$\mu_0 = \varepsilon_F \approx 5 \cdot 10^{-19} \text{ ჯ. } \quad \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} = 0.6 \cdot 10^{-4}.$$

ამოცანა # 9.10

$$dn(\varepsilon) = \frac{2 \cdot 2\pi}{(2\pi\hbar)^3} (2m)^{3/2} e^{\frac{\mu - \varepsilon}{kT}} \left(1 - e^{\frac{\mu - \varepsilon}{kT}}\right) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

ამოცანა # 9.11

$$p \approx \frac{2}{5} \frac{N\mu_0}{V}\left(1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 + \dots\right).$$

ამოცანა # 9.12

$$P = \frac{lE}{3V}.$$

ამოცანა # 9.13

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}.$$

ამოცანა # 9.14

$$P = \frac{N}{V} \cdot \frac{2}{5} \mu\left(1 + \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{\pi T}{\mu}\right)^2 - \frac{35}{1920}\left(\frac{\pi T}{\mu}\right)^4 + \dots\right).$$

ამოცანა # 9.15

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi V\varepsilon^2 d\varepsilon}{8\pi^3\hbar^3c^3}.\quad p_F=\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3},$$

$$\varepsilon_F=cp_F=c\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}.$$

ამოცანა # 9.16

$$E=\frac{3NkT}{2}\left(1+\frac{1}{2^{7/2}}\cdot\frac{h^3N}{\left(2\pi mkT\right)^{3/2}}\cdot\frac{N}{V}\right),$$

$$P=\frac{2}{3}\frac{E}{V}=\frac{NkT}{V}\left(1+\frac{1}{2^{7/2}}\cdot\frac{h^3N}{\left(2\pi mkT\right)^{3/2}}\cdot\frac{N}{V}\right).$$

ამოცანა # 9.17

$$P=\frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\left\{p_F\left(\frac{2}{3}p_F^2-m^2c^2\right)\sqrt{p_F^2+m^2c^2}+\left(mc\right)^4 Arsh\frac{p_F}{mc}\right\},$$

$$\frac{N}{V}=\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3\frac{1}{3\pi^2}sh^2\frac{\xi}{4},$$

$$P=\frac{m^4c^5}{32\pi^2\hbar^3}\left(\frac{1}{3}sh\xi-\frac{8}{3}sh\frac{\xi}{2}+\xi\right),\quad \frac{E}{V}=\frac{m^4c^5}{32\pi^2\hbar^3}\left(sh\xi-\xi\right),$$

$$\xi=4Arsh\frac{p_F}{mc}.$$

ამოცანა # 9.19

$PV=NT\left(1\mp\frac{N}{2gV}\left(\frac{\pi\hbar^2}{mT}\right)^{3/2}\right)$, "+" ნიშანი ფერმიონებისათვის, "-" ბოზონებისათვის, $g=2s+1$ ნაწილაკის სპინური მდგომარეობების რიცხვია s სპინით, N ნაწილაკთა რიცხვია, V - გაზის მოცულობა.

ამოცანა # 9.21

$$\Phi=N\mu_0\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{\mu_0}\right)^2\right],\ F=\frac{3}{5}N\mu_0\left[1-\frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{T}{\mu_0}\right)^2\right],$$

$$H=N\mu_0\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{T}{\mu_0}\right)^2\right].$$

ამოცანა # 9.22

$$P=\frac{2}{3}\frac{E}{V}.$$

ამოცანა # 9.23

$$T_0=\frac{3.31\hbar^2}{mk}\left(\frac{N}{\left(2s+1\right)V}\right)^{3/2}.$$

ამოცანა # 9.24

$$N_{\varepsilon=0}=N-N_{\varepsilon>0}=N\left(1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right).$$

სადაც T_0 ბოზე კონდენსაციის ტემპერატურაა (იხ. წინა ამოცანა).

ამოცანა # 9.25

$$E=0.128\left(2s+1\right)Vm^{3/2}\hbar^{-3}T^{5/2},\quad C_V=0.32\left(2s+1\right)Vm^{3/2}\hbar^{-3}T^{3/2}.$$

ამოცანა # 9.26

$$E=\alpha T^{5/2},\qquad \alpha=0.128Vm^{3/2}\hbar^{-3}\left(2s+1\right),\qquad C_V=\frac{5}{2}\frac{E}{T},\qquad S=\frac{5}{3}\frac{E}{T},$$

$F=-\frac{2}{3}\alpha T^{5/2}$, $P=\frac{2}{3}\frac{\alpha T^{5/2}}{V}$, $\Phi=0$. 9.27 $C_V=4\alpha T^3V$, $\alpha=\frac{8\pi^5k^4}{15\left(hc\right)^3}$.

ამოცანა # 9.28

$$N=\frac{8\pi V}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^3\int\limits_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1},\quad \int\limits_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1}=1.2\,.$$

ამოცანა # 9.29

$$dn(\lambda,T)=\frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{d\lambda}{\exp\left(\dfrac{hc}{kT\lambda}\right)-1}\,.$$

ამოცანა # 9.30

$$n=19.24\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3=5\cdot 10^8 \text{ სმ}^{-3}.$$

ამოცანა # 9.31

$$N\sim V^{\frac{1}{3}}E^{\frac{3}{4}}.$$

ამოცანა # 10.3

$$\frac{\sqrt{\overline{(\Delta H)^2}}}{\overline{H}}=\frac{T}{\overline{H}}\sqrt{\frac{\partial\overline{H}}{\partial T}}\,.$$

ამოცანა # 10.5

ა) $\overline{(\Delta n_k)^2}=\overline{n}_k,\quad \delta=\dfrac{\sqrt{\overline{(\Delta n_k)^2}}}{\overline{n}_k}=\dfrac{1}{\sqrt{\overline{n}_k}}$,

ბ) $\overline{(\Delta n_k)^2}=\overline{n}_k\left(\overline{n}_k-1\right),\quad \delta=\dfrac{\sqrt{\overline{(\Delta n_k)^2}}}{\overline{n}_k}=\sqrt{\dfrac{1-\overline{n}_k}{\overline{n}_k}}$,

გ) $\overline{(\Delta n_k)^2}=\overline{n}_k\left(\overline{n}_k+1\right),\ \delta=\dfrac{\sqrt{\overline{(\Delta n_k)^2}}}{\overline{n}_k}=\sqrt{\dfrac{1+\overline{n}_k}{\overline{n}_k}}$.

ამოცანა # 10.7

$$\overline{(\Delta E)^2}=\overline{E^2}-\overline{E}^2=\frac{g_1g_2\varepsilon^2e^{\frac{\varepsilon}{T}}}{\left(g_2+g_1e^{\frac{\varepsilon}{T}}\right)^2}\,.$$

ამოცანა # 10.8

$$\delta_E=\frac{\sqrt{\overline{(\Delta E)^2}}}{\overline{E}}=\frac{1}{\sqrt{3N}}\,.$$

ამოცანა # 10.9

$$\Delta S=-\frac{mgl\varphi^2}{2T}\,.$$

ამოცანა # 10.10

$$\overline{\rho(\vec r)\rho(\vec r\,')}=\bar\rho(\vec r)\delta(\vec r-\vec r\,').$$

ამოცანა # 10.11

$$\overline{(\Delta\vec r_C)^2}=\frac{1}{N}\overline{r^2}.$$

ამოცანა # 10.12

$$\overline{(\Delta r_C)^2}=\frac{3}{5N}R_0^2.$$

ამოცანა # 10.13

$$\overline{(\Delta\vec r_C)^2}=\frac{2\alpha^2e^{h/\alpha}-\left(h^2+2\alpha h+2\alpha^2\right)}{N\left(e^{h/\alpha}-1\right)},\ \text{სადაც}\ \ \alpha=\frac{kT}{mg}.$$

ამოცანა # 10.15

$$\overline{\varphi^2}=\frac{kT}{\alpha},\ 10.16\ \ m\approx\frac{\sqrt{kT\kappa}}{g}.$$

ამოცანა # 10.17

$$\Delta T=\frac{T}{\sqrt N},\ 10.18\ \ \overline{\varphi^2}=\frac{kT}{mgl},\ 10.19\ \ \overline{\varphi^2}=\sqrt{\frac{kT}{\alpha}}=2\cdot10^{-4}\ \text{rad}.$$

ამოცანა # 10.20

$$\overline{y^2}=\frac{T}{Fl}x(l-x),\ 10.21\ \ \overline{y_1y_2}=\frac{T}{Fl}x_1(l-x_2).$$

ამოცანა # 10.22

$$\overline{(\Delta E)^2}=-\left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V-P\right]^2T\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T+C_VT^2.$$

ამოცანა # 10.23

$$\overline{\Delta T\Delta P}=\frac{T^2}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

ამოცანა # 10.24

$$\overline{\Delta V\Delta P}=-T,$$

ამოცანა # 10.25

$$\overline{\Delta S\Delta V}=\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P T.$$

ამოცანა # 10.26

$$\overline{\Delta S\Delta T}=T.$$

ამოცანა # 10.27

$$\overline{(\Delta P)^2}=-T\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S.$$

ამოცანა # 10.28

$$\delta=\frac{\sqrt{\overline{(\Delta n_k)^2}}}{\bar n_k}=\sqrt{\frac{1+\bar n_k}{\bar n_k}}.$$

15. გამოყენებული ლიტერატურა

არ. უგულავა, მ. ვერულაშვილი, ზ. როსტომაშვილი, სტატისტიკური ფიზიკა, ლექციების კურსი, ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა 2005.

Я. П. Терлецкий, Статистическая физика, Москва, изд. «Высшая школа», 1966.

И.П. Базаров, Термодинамика, изд. «высшая школа», Москва, 1991.

Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков, О.Ф. Томасевич, А.М. Федорченко, Сборник задач по теоретической физике, изд. «Высшая школа», Москва, 1984.

Ф. Г. Серова, А. А. Янкина, Сборник задач по теоретической физике, изд. «Просвещение», Москва, 1979.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая Физика, изд. «Наука», Москва 1976.

В. Г. Левич, Введение в статистическую физику, Москва, 1954.

Г. Шиллинг, Статистическая физика в примерах, изд. «Мир», Москва, 1976.