მალხაზ ბაკურაძე
რუსლან სურმანიძე

ამოცანათა კრებული გეომეტრიაში

ამოცანათა კრებული
გეომეტრიაში

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მალხაზ ბაკურაძე
რუსლან სურმანიძე

ამოცანათა კრებული გეომეტრიაში

უნივერსიტეტის გამომცემლობა

ამოცანათა კრებული გეომეტრიაში განკუთვნილია ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებების შემსწავლელი სტუდენტებისათვის. კრებულით წლების განმავლობაში სარგებლობენ ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის, ინფორმატიკის, ფიზიკისა და სხვა სპეციალობის სტუდენტები.

სამეცნიერო რედაქტორი მიხეილ ამაღლობელი
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ასოც. პროფ.

რეცენზენტები ვახტანგ ლომაძე
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოც. პროფ.

ქეთევან შავგულიძე
ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოც. პროფ.

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით.

© ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2018
ISBN 978-9941-13-743-3 (pdf)

შინაარსი

§1. ვექტორები 7

§2. წრფე სიბრტყეზე 11

§3. სიბრტყე 29

§4. წრფე სივრცეში 39

§5. წრფისა და სიბრტყის ურთიერთგანლაგება 44

§6. მეორე რიგის წირები 52

§7. გეომეტრიული გარდაქმნები 87

§ 8. მეორე რიგის წირთა კლასიფიკაცია 101

დანართი 109

§1. ვექტორები

სავარჯიშო ამოცანები

1. მოცემული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით ააგეთ ვექტორები:
(ა) $2\vec{a}$; (ბ) $-\vec{a}-2\vec{b}$; (გ) $2\vec{b}-3\vec{a}$.

2. $OACB$ პარალელოგრამში $\vec{OA}=\vec{a}$ და $\vec{OB}=\vec{b}$. გამოსახეთ მათი საშუალებით: $\vec{MO}$, $\vec{MA}$, $\vec{MB}$ და $\vec{MC}$ ვექტორები, თუ M პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია.

3. $ABCDEF$ წესიერ ექვსკუთხედში $\vec{AB}=\vec{p}$ და $\vec{AF}=\vec{q}$. გამოსახეთ მათი საშუალებით $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{FE}$ და $\vec{ED}$ ვექტორები.

4. $ABCD$ ტეტრაედრში $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{c}$ და $\vec{AD}=\vec{d}$, იპოვეთ BCD წახნაგის $\vec{DM}$ მედიანა.

5. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, რომ შესრულდეს პირობა:

ა) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

ბ) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$

გ) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$

დ) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

ე) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$

ვ) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

ზ) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$

თ) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}|-|\vec{a}|$.

6. აჩვენეთ, რომ ABC სამკუთხედის $\vec{AD}$, $\vec{BE}$ და $\vec{CK}$ მედიანებისთვის $\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CK}=0$.

7. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ოთხკუთხედის თანმიმდევრობით აღებული გვერდების შუა A, B, C და D წერტილებისათვის სრულდება ტოლობა: $\vec{AB}+\vec{CD}=0$.

8. იპოვეთ $\vec{m}=(8, 8, 4)$ ვექტორის გეგმილი:

ა) საკოორდინატო ღერძებზე; ბ) $\vec{n}=(2, 2, 1)$ ვექტორზე.

9. იპოვეთ $\vec{a}=(2, 1, -2)$ და $\vec{b}=(1, -4, 2)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი და კუთხე მათ შორის.

10. იპოვეთ $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$ და $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}-5\vec{c}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ერთეულოვანი და წყვილ-წყვილად მართობული ვექტორებია.

11. დაადგინეთ $A(1, 2, -1)$, $B(3, 2, 0)$ და $C(0, 1, -1)$ წერტილებზე გავლებული სიბრტყის მართობული რაიმე $\vec{n}$ ვექტორის კოორდინატები.

12. იპოვეთ $A(-1, 0, 2)$, $B(3, -1, 0)$ და $C(2, 1, 1)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის ფართობი.

13. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}=i+2j+k$ და $\vec{b}=-2i+j+2k$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონელებს შორის.

14. იპოვეთ $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ და $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეები, თუ $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ერთეულოვანი ვექტორებია და მათ შორის კუთხეა 60°.

15. იპოვეთ $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ და $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი, თუ $\vec{m}$ და $\vec{n}$ ერთეულოვანი ვექტორებია და მათ შორის კუთხეა $\pi/3$.

16. დაადგინეთ არიან თუ არა ვექტორები კომპლანარულები:

ა) $\vec{a} = i + j + k$, $\vec{b} = i + j - k$, $\vec{c} = i - j + k$,

ბ) $\vec{a} = 3i + 5j$, $\vec{b} = i - j + 2k$, $\vec{c} = 5i + 3j + 4k$.

17. აჩვენეთ, რომ $A(1,0,7)$, $B(-1,-1,2)$, $C(2,-2,2)$, $D(0,1,9)$ წერტილები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ.

18. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ ის $\vec{a} = i + 2j - 2k$, $\vec{b} = 2i - j + k$ და $\vec{c} = 4i - 3j + 2k$ ვექტორებზეა აგებული.

19. იპოვეთ $A(1, 0, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(3, -1, 2)$, $D(0, -1, 1)$ წვეროების მქონე ტეტრაედრის მოცულობა.

20. იპოვეთ $O(-1, -2, 3)$, $A(2, 3, 1)$, $B(3, 1, -2)$ და $C(1, 2, 3)$ წვეროების მქონე პირამიდის ABC წახნაგზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

პასუხები:

2. $\vec{MA} = 0{,}5(\vec{a} - \vec{b})$, $\vec{MB} = 0{,}5(\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{MC} = 0{,}5(\vec{b} - \vec{a})$;

3. $\vec{BC} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{CD} = \vec{q}$, $\vec{FE} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{ED} = \vec{p}$;

5. ა) $(\hat{\vec{a}}, \vec{b}) = \pi/2$, ბ) $(\hat{\vec{a}}, \vec{b}) < \pi/2$, გ) $(\hat{\vec{a}}, \vec{b}) > \pi/2$,

დ) $(\hat{\vec{a}}, \vec{b}) = 0$, ე) $(\hat{\vec{a}}, \vec{b}) = \pi$ და $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$, ვ) $(\hat{\vec{a}}, \vec{b}) = \pi$,

ზ) $(\hat{\vec{a}}, \vec{b}) = 0$ და $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$, თ) $(\hat{\vec{a}}, \vec{b}) = 0$ და $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$;

8. ა) 8, 8 და 4; ბ) 12; **9.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$,

$(\hat{\vec{a}}, \vec{b}) = \pi - \arccos(6/\sqrt{21})$; **10.** $\vec{p} \cdot \vec{q} = 9$;

11. $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (1,-1,-2)$; **12.** $S = 0{,}5|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 0{,}5\sqrt{62}$;

13. $\cos(\hat{\vec{a} + \vec{b}}, \vec{a} - \vec{b}) = -3/\sqrt{109}$;

14. $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 10$; **15.** $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = 1{,}5\sqrt{3}$;

16. ა) არა, ბ) კი; **18.** $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b})| = 5$; **19.** $V = 1$;

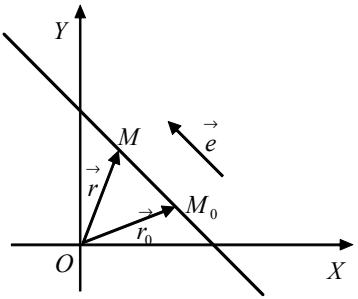
20. $h = 10/\sqrt{59}$.

§2. წრფე სიბრტყეზე

წრფის ვექტორულ-პარამეტრული სახის განტოლება:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{e},\ t \in R,$$

სადაც $\vec{e}$ წრფის პარალელური ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორია, მას წრფის მიმმართველი ვექტორი ეწოდება, $\vec{r_0}$ – წრფეზე რაიმე ფიქსირებული $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის რადიუს-ვექტორია, ხოლო $\vec{r}$ – წრფის მიმდინარე $M(x, y)$ წერტილის რადიუს-ვექტორი. $t \in R$-ს პარამეტრი ეწოდება.

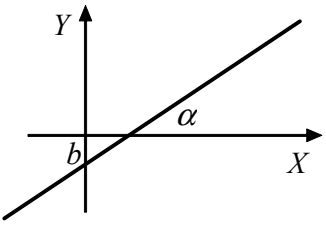


წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით:

$$y = k \cdot x + b,$$

სადაც $k = tg\alpha$ საკუთხო კოეფიციენტია და ტოლია იმ კუთხის ტანგენსის, რომელსაც მოცემული წრფე ადგენს აბსცისთა ღერძის დადებით მიმართულებასთან (კუთხე გადაზომილია საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით), ხოლო b, აბსოლუტური

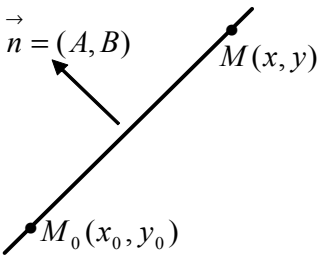
მნიშვნელობით, ტოლია იმ მონაკვეთის სიგრძის, რომელსაც ეს წრფე ორდინატთა ღერძზე ჩამოკვეთს.



წრფის ზოგადი სახის განტოლება:

$$Ax + By + C = 0\,,$$

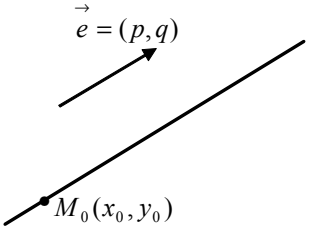
სადაც A, B და C ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია და A და B რიცხვებს შორის ერთი მაინც არაა ნულის ტოლი ($A^2 + B^2 \neq 0$). ვექტორი $\vec{n} = (A, B)$ ამ წრფის მართობული ვექტორია, მას წრფის ნორმალი ეწოდება.



წრფის კანონიკური სახის განტოლება:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}\,,$$

სადაც $M_0(x_0, y_0)$ წრფეზე მდებარე რაიმე წერტილია, ხოლო $\vec{e} = (p, q)$ არანულოვანი ვექტორი – წრფის მიმმართველი ვექტორია.



წრფის პარამეტრული სახის განტოლება:

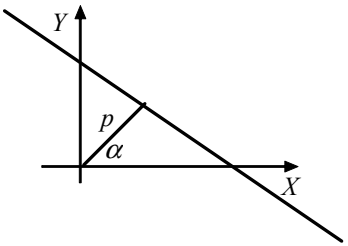
$$\begin{aligned} x &= x_0 + p \cdot t \\ y &= y_0 + q \cdot t \end{aligned}, \; t \in R .$$

ამ სახის განტოლება უშუალოდ მიიღება წრფის კანონიკური სახის განტოლებიდან.

წრფის ნორმალური სახის განტოლება:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 ,$$

სადაც p კოორდინატთა სათავიდან წრფემდე მანძილია, ხოლო α არის კუთხე, რომელსაც ადგენს კოორდინატთა სათავიდან წრფეზე დაშვებული მართობი აბსცისთა ღერძთან.



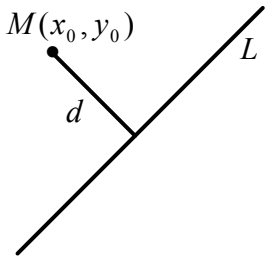
წრფის განტოლება მონაკვეთებში:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

სადაც a და b, აბსოლუტური მნიშვნელობით, იმ მონაკვეთების სიგრძეების ტოლია, რომლებსაც წრფე ჩამოკვეთს აბსცისთა და ორდინატთა ღერძებზე, შესაბამისად.

მანძილი წერტილიდან წრფემდე: d – მანძილი $M(x_0, y_0)$ წერტილიდან $Ax + By + C = 0$ განტოლებით მოცემულ L წრფემდე გამოითვლება ფორმულით

$$d = \frac{|\, A x_0 + B y_0 + C \,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



სავარჯოშო ამოცანები

1. რა ფიგურას განსაზღვრავს $r = r_0 + ta$ ტოლობა, თუ t იღებს მნიშვნელობებს შემდეგი სიმრავლიდან: (ა) $(-\infty,0]$, (ბ) $[-1,1]$, (გ) $(-1,1)$, (დ) $\{\sin\tau \mid \tau \in R\}$.

2. შეადგინეთ წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, თუ ის გადის $M_0(2,5)$ წერტილზე და $\vec{a} = (4,-3)$ ვექტორის პარალელურია.

3. შეადგინეთ წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, თუ ის გადის კოორდინატთა სათავეზე და $\vec{b} = (3,2)$ ვექტორის პარალელურია.

4. შეადგინეთ წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, თუ ის გადის $A(1,9)$ წერტილზე და Oy ღერძის პარალელურია.

5. შეადგინეთ წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, თუ ის $M_1(2,7)$ და $M_2(2,-3)$ წერტილებზე გადის.

6. წრფე მოცემულია პარამეტრული სახის განტოლებით: $x = 2 - 5t$ და $y = -1 + t$. იპოვეთ:

(ა) მისი მიმმართველი ვექტორი;

(ბ) წერტილები, რომლებიც განისაზღვრებიან პარამეტრის შემდეგ მნიშვნელობებით: $t_1 = 3$, $t_2 = -2$, $t_3 = 0$, $t_4 = 5$, $t_5 = 20$;

(გ) პარამეტრის მნიშვნელობები, რომლისთვისაც წრფე გადაკვეთს საკოორდინატო ღერძებს;

(დ) დაადგინეთ შემდეგი წერტილებიდან რომელი მათგანი მდებარეობს მოცემულ წრფეზე: $A(1,5)$, $B(7,-2)$, $C(2,-1)$, $D(3,-7)$.

7. M წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლებაა: $x = 3 - 2t$ და $y = -1 + 7t$. იპოვეთ:

(ა) M წერტილის სიჩქარე;

(ბ) სიბრტყის იმ წერტილის კოორდინატები, რომელშიც იქნება M წერტილი $t = 6$ მომენტში;

(გ) დროის ის მომენტი, როდესაც M წერტილი $x = 7 + 2t'$, $y = 5 + 3t'$ წრფეს გადაკვეთს.

8. შეადგინეთ M მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლება, რომელიც კოორდინატთა სათავიდან გამოდის, მოძრაობს წრფივად და თანაბრად და რომლის სიჩქარის ვექტორის გეგმილებია: $v_x = 3$ სმ/წ, $v_y = 4$ სმ/წ. ჩათვალეთ, რომ $|i| = |j| = 1$ სმ.

9. M წერტილი იწყებს წრფივ და თანაბარ მოძრაობას $M_0(8,-5)$ წერტილიდან $|v| = 40$ სმ/წ სიჩქარით $\vec{a} = (4,3)$ ვექტორის გასწვრივ, იგულისხმება, რომ $|i| = |j| = 1$ სმ. რა დრო დასჭირდება მას მოძრაობის ტრაექტორიის იმ ნაწილის გასავლელად, რომელიც საკოორდინატო ღერძებს შორისაა მოქცეული?

10. სინათლის სხივი $x = -4 - 2t$, $y = 3 + t$ წრფიის გასწვრივაა მიმართული, ამასთან Ox ღერძთან მიღწევის შემდეგ ის აირეკლება. იპოვეთ სხივის Ox ღერძთან შეხვედრის წერტილი და შეადგინეთ არეკლილი სხივის განტოლება.

11. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $k = -7$ და რომელიც $A(2,-3)$ წერტილზე გადის.

12. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $k = 5$ და რომელიც Oy ღერძზე 3-ის ტოლ მონაკვეთს ჩამოკვეთს.

13. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც $A(1,-4)$ და $B(-2,1)$ წერტილებზე გადის.

14. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც $A(2,-3)$ წერტილზე გადის და Ox ღერძთან 60°-იან კუთხეს ადგენს.

15. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც $A(2,5)$ წერტილზე გადის და $\vec{n} = (4,3)$ ვექტორის ორთოგონალურია.

16. შეადგინეთ შემდეგ წრფეთა პარამეტრული სახის განტოლებები:

(ა) $y = 3x - 5$; (ბ) $y = \frac{1}{2}x + 2$; (გ) $6x - 7y + 5 = 0$;

(დ) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$; (ე) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$; (ვ) $\frac{x+2}{4} = \frac{y}{3}$;

(ზ) $5x - 3 = 0$; (თ) $4y + 9 = 0$.

17. შეადგინეთ შემდეგ წრფეთა ზოგადი სახის განტოლებები:

(ა) $x = 2 + t$, $y = 1 - 3t$; (ბ) $x = -2$, $y = 3 + t$;

(გ) $x = t$, $y = 2$; (დ) $y = \frac{2}{3}x - 1$; (ე) $y = -5x$;

(ვ) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$; (ზ) $2x + \frac{y}{-3} = 1$; (თ) $\frac{x+3}{-4} = \frac{y+1}{3}$.

18. მოცემულია $A(1,1)$, $B(-2,3)$ და $C(4,7)$ წვეროების მქონე სამკუთხედი. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდებისა და A წვეროდან გავლებული მედიანის განტოლებები.

19. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც $A(-2,7)$ წერტილზე გადის და კოორდინატთა ღერძებზე ტოლი სიგრძის მონაკვეთებს ჩამოკვეთს.

20. გამოთვალეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელსაც საკოორდინატო ღერძები და $3x - 5y - 30 = 0$ განტოლებით მოცემულ წრფე განსაზღვრავს.

21. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც $A(5,-2)$ წერტილზე გადის და საკოორდინატო ღერძებთან ერთად ადგენს სამკუთხედს, რომლის ფართობია 150.

22. მოცემულია $ax+by+c=0$ და $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$ წრფეები. დაადგინეთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ისინი: (ა) იკვეთებოდნენ; (ბ) იყვნენ პარალელურები; (გ) ერთმანეთს ემთხვეოდნენ; (დ) იყვნენ ურთიერთმართობულები.

23. წრფეთა თითოეულ წყვილისათვის გამოარკვიეთ: ემთხვევიან თუ არა ისინი ერთმანეთს, არიან თუ არა პარალელურნი, თანაიკვეთებიან თუ არა. თანაკვეთის შემთხვევაში, იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი:

(ა) $2x+3y=0$, $x=3+t$, $y=2-t$;

(ბ) $x+2y-15=0$, $x=5+4t$, $y=-2-2t$;

(გ) $3x+4y-20=0$, $x=4-8t$, $y=2+6t$;

(დ) $x-2y+4=0$, $-3x+6y-12=0$;

(ე) $x-5y=0$, $2x-10y=0$;

(ვ) $2x+3y-8=0$, $x+y-3=0$.

24. წრფეთა თითოეულ წყვილისათვის გამოარკვიეთ: ემთხვევიან თუ არა ერთმანეთს, არიან თუ არა პარალელურნი, თანაიკვეთებიან თუ არა. თანაკვეთის შემთხვევაში, იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი:

(ა) $x=2+t$, $y=-9-t$ და $x=1+5t'$, $y=-1+2t'$;

(ბ) $x=-3+4t$, $y=1-3t$ და $x=1-4t'$, $y=-2+3t'$;

(გ) $x=1-2t$, $y=7+t$ და $x=5+8t'$, $y=-2-4t'$;

(დ) $x=-2+2t$, $y=-9+5t$ და $x=9-5t'$, $y=4+2t'$.

25. მოცემულია წრფეები: $x = x_1 + l_1 t$, $y = y_1 + m_1 t$ და $x = x_2 + l_2 t'$, $y = y_2 + m_2 t'$. დაადგინეთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ისინი : (ა) იკვეთებიან; (ბ) არიან პარალელური; (გ) ემთხვევიან ერთმანეთს; (დ) არიან ურთიერთმართობულები.

26. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ $M_1(1,2)$, $M_2(3,4)$ და $M_3(5,-1)$ მისი გვერდების შუა წერტილებია.

27. $x + y - 2 = 0$ და $2x - y + 4 = 0$ პარალელოგრამის ორი გვერდის განტოლებებია. შეადგინეთ პარალელოგრამის დანარჩენი ორი გვერდის განტოლებები, თუ ცნობილია, რომ $M(3,1)$ დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია.

28. შეადგინეთ $ABCD$ პარალელოგრამის გვერდების განტოლებები თუ ცნობილია, რომ მისი დიაგონალები $M(1,6)$ წერტილში იკვეთება, ხოლო AB, BC, CD და DA გვერდები, შესაბამისად, $P(3,0)$, $Q(6,6)$, $R(5,9)$ და $S(-5,4)$ წერტილებზე გადის.

29. შეადგინეთ $A(1,5)$, $B(-4,3)$ და $C(2,9)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის BC გვერდისადმი გავლებული სიმაღლის განტოლება.

30. რა ტრაექტორიაზე უნდა იმოძრაოს მატერიალურმა წერტილმა, თუ ის $M_0(5,-12)$ წერტილში იმყოფება და $2x - 3y + 6 = 0$ წრფემდე უმოკლესი გზით უნდა მიაღწიოს? რომელ წერტილში მიაღწევს ის ამ წრფეს?

31. იპოვეთ $3x + 4y - 20 = 0$ წრფის მიმართ $M(10,10)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი.

32. სამკუთხედის ორი წვეროა $A(-6,2)$ და $B(2,-2)$ წერტილები. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე წვეროს კოორდინატები, თუ მისი სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილია $H(1,2)$.

33. იპოვეთ ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრის კოორდინატები, თუ $A(1,2)$, $B(3,-2)$ და $C(5,6)$.

34. ცნობილია, რომ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობია 20, ჰიპოტენუზა Ox ღერძზე მდებარეობს და მართი კუთხის წვეროა $C(1,-4)$ წერტილი. შეადგინეთ მისი კათეტების შემცველი წრფეების განტოლებები.

35. დაადგინეთ წრფეთა საკუთხო კოეფიციენტი (დახრილობა):

(ა) $x = 2 + 3t,\ y = 3 - 2t$; (ბ) $x = -3t,\ y = 4t$;

(გ) $x = 2,\ y = 1 - 4t$; (დ) $3x - 4y = 4$.

36. გამოთვალეთ კუთხე წრფეებს შორის:

(ა) $y = 2x + 4$ და $y = -x + 3$;

(ბ) $3x - 5y + 4 = 0$ და $-x - 3y + 4 = 0$;

(გ) $y = -3x + 4$ და $x = 3 + t,\ y = 1 - 2t$;

(დ) $x = 1 - 3t,\ y = 2 + t$ და $x = 3 + 4t,\ y = 2 - 5t$.

37. შეადგინეთ წრფეთა განტოლებები, რომლებიც $A(3,1)$ წერტილზე გადიან და $y = -(2/3)x + 1/3$ წრფესთან $\pi/4$-ის ტოლ კუთხეს ადგენენ.

38. მოცემულია $L_1 : x = 3t,\ y = -t$ და $L_2 : y = x + 8$ წრფეები. შეადგინეთ L_3 წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ L_2 წრფე L_1 და L_3 წრფეებით განსაზღვრული კუთხის ბისექტრისაა.

39. იპოვეთ $x + 3y = 0$, $x = 3$ და $x - 2y + 3 = 0$ განტოლებებით განსაზღვრული გვერდების მქონე სამკუთხედის წვეროები და კუთხეები.

40. შეადგინეთ $A(1,-2)$, $B(5,4)$ და $C(-2,0)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის A წვეროსთან მდებარე შიგა და გარე კუთხეების ბისექტრისების განტოლებები.

41. შეადგინეთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების განტოლებები, თუ $y = 3x + 5$ მისი ჰიპოტენუზის განტოლებაა, ხოლო $M(4,-1)$ სამკუთხედის ერთ-ერთი წვეროა.

42. $6x - 2y + 5 = 0$ და $x + 3y - 1 = 0$ ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდების განტოლებებია. შეადგინეთ მისი ფუძის განტოლება თუ ის $M(1,1)$ წერტილზე გადის.

43. შეადგინეთ იმ კვადრატის გვერდების განტოლებები, რომლის წვეროა $M(-4,5)$ და დიაგონალი $7x - y + 8 = 0$.

44. შეადგინეთ წრფის განტოლება, თუ ის $3x - 5y + 2 = 0$ და $5x - 2y + 4 = 0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გადის და: (ა) გაივლის კოორდინატთა სათავეზე; (ბ) გადის $M(1,2)$ წერტილზე; (გ) აბსცისთა ღერძის პარალელურია; (დ) $2x-y+4=0$ წრფის პარალელურია; (ე) $x + 3y + 2 = 0$ წრფის პერპენდიკულარულია.

45. შეადგინეთ სამკუთხედის სიმაღლეების განტოლებები, თუ მისი გვერდების განტოლებებია $x+2y-1=0$, $5x+4y-17=0$ და $x - 4y + 11 = 0$.

46. შეადგინეთ ABC სამკუთხედის დანარჩენი ორი გვერდის განტოლებები, თუ მისი AB გვერდის, AH და BK სიმაღლეების განტოლებებია, შესაბამისად, $2x-3y+6=0$, $2x+y-2=0$, და $x + 3y - 12 = 0$.

47. შეადგინეთ წრფის განტოლება, თუ ის $M(8,9)$ წერტილზე გადის და $x - 2y = 0$ და $x - 2y + 5 = 0$ წრფეებს შორის მოქცეული მისი მონაკვეთის სიგრძე 5-ის ტოლია.

48. იპოვეთ მანძილები $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(-5,7)$ და $D(8,-3)$ წერტილებიდან $6x + 8y - 15 = 0$ წრფემდე.

49. იპოვეთ მანძილი პარალელურ წრფეებს შორის:

(ა) $x-3y+5=0$ და $2x-6y+9=0$;

(ბ) $2x-3y+1=0$ და $x=2+3t,\ y=1+2t$;

(გ) $6x-2y+5=0$ და $y=3x+4$;

(დ) $x=2+4t,\ y=1+6t$ და $x=1+2\tau,\ y=2+3\tau$.

50. იპოვეთ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბარად არიან დაშორებულნი შემდეგი ორი პარალელური წრფიდან:

(ა) $4x-5y+7=0$ და $4x-5y-11=0$;

(ბ) $x-3y+7=0$ და $x-3y+5=0$.

51. შეადგინეთ $x+2y-11=0$ და $3x-6y-5=0$ წრფეების გადაკვეთით მიღებული კუთხის ბისექტრისის განტოლება, თუ ის გადის წერტილზე: (ა) $M(1,-3)$, (ბ) $M(2,-1)$.

52. შეადგინეთ ყველა იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილის განტოლება, რომლებიც $x-y=0$ წრფიდან ორჯერ მეტი მანძილით არიან დაშორებულნი, ვიდრე აბსცისთა ღერძიდან.

53. შეადგინეთ მატერიალური წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლება, თუ დროის ყოველი მომენტისათვის ის სამჯერ ნაკლები მანძილითაა დაშორებული $x+2y=0$ წრფიდან, ვიდრე კოორდინატთა სათავიდან.

54. იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლეების სიგრძეები, თუ მისი წვეროებია $A(2,5)$, $B(1,3)$ და $C(7,0)$.

55. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის B წვეროდან AD მედიანამდე, თუ $A(-2,1)$, $B(3,1)$, $C(1,5)$.

56. აჩვენეთ, რომ $x-3y+1=0$, $x-3y+12=0$, $3x+y-1=0$ და $3x+y+10=0$ წრფეებით შემოსაზღვრული ფიგურა კვადრატია. იპოვეთ კვადრატის ფართობი.

57. შეადგინეთ კვადრატის გვერდების განტოლებები, თუ $A(0,6)$ და $B(8,0)$ მისი ორი მეზობელი წვეროა.

58. კვადრატის ორი გვერდის განტოლებებია $5x+12y-10=0$ და $5x+12y+29=0$. შეადგინეთ მისი დანარჩენი გვერდების განტოლებები, თუ ცნობილია, რომ $A(-3,5)$ მის გვერდზე დევს.

59. $x+3y-5=0$ კვარდატის ერთ-ერთი გვერდის განტოლებაა, ხოლო $O(-1,\ 0)$ მისი სიმეტრიის ცენტრია. შეადგინეთ კვადრატის დანარჩენი გვერდების განტოლებები.

60. შეადგინეთ სამკუთხედის მესამე გვერდის განტოლება და დაადგინეთ წვეროების კოორდინატები, თუ $O(0,\ 0)$ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია და მისი ორი გვერდის განტოლებებია $x+y-4=0$ და $2x+y-1=0$.

61. შეადგინეთ სამკუთხედის მესამე გვერდის განტოლება, თუ მისი ორი გვერდის განტოლებებია $3x-2y+1=0$ და $x-y+1=0$, ხოლო $2x-y-1=0$ ერთ-ერთი მედიანის განტოლებაა.

62. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ მისი ორი მედიანის განტოლებებია $x-y-3=0$ და $5x+4y-9=0$, ხოლო $A(-1,2)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა.

63. იპოვეთ სამკუთხედის წვეროები, თუ მისი მედიანების განტოლებებია $x-y-3=0$, $4x+5y-6=0$ და $5x+4y-9=0$, ხოლო ფართობია $S=6$.

64. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ მისი ორი სიმაღლის განტოლებებია $2x-5y+8=0$ და $x+y-4=0$, ხოლო $A(3,4)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა.

65. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ მისი ორი ბისექტრისის განტოლებებია $x-3y-6=0$ და $x+y-2=0$, ხოლო $A(2,-4)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა.

66. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ $x-7y+15=0$ და $7x+y+5=0$ ერთი წვეროდან გამოსული სიმაღლისა და ბისექტრისის განტოლებებია, ხოლო $A(2,6)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა.

67. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ $3x-4y+27=0$ და $x+2y-5=0$ სხვადასხვა წვეროდან გამოსული სიმაღლისა და ბისექტრისის განტოლებებია, ხოლო $A(2,-1)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა.

68. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ $3x+y+11=0$ და $x+2y+7=0$ სხვადასხვა წვეროდან გამოსული სიმაღლისა და მედიანის განტოლებებია, ხოლო $A(2,-7)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა.

69. შეადგინეთ სამკუთხედის გვერდების განტოლებები, თუ $x+2y-5=0$ და $4x+13y-10=0$ ერთი წვეროდან გამოსული ბისექტრისისა და მედიანის განტოლებებია, ხოლო $A(4,3)$ მისი ერთ-ერთი წვეროა.

70. $x+2y-5=0$ და $2x+y+10=0$ ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდების განტოლებებია. იპოვეთ სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, თუ $M(-1,\ 2)$ მის ფუძეზე დევს.

71. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც $A(0,1)$ წერტილზე გადის და $x-3y+10=0$ და $2x+y-8=0$ წრფეებს შორის მოქცეული მისი მონაკვეთი ამ წერტილით შუაზე იყოფა.

72. შეადგინეთ წრფის განტოლება, თუ პირველ საკოორდინატო მეოთხედში მოქცეული მისი მონაკვეთის სიგრძე კოორდინატთა სათავიდან ამ წრფემდე მანძილზე ორჯერ მეტია, ხოლო საკოორდინატო ღერძებითა და ამ წრფით შედგენილი სამკუთხედის ფართობია $9/2$.

73. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილისა და მასში ჩახაზული წრეწირის ცენტრის კოორდინატები, თუ $x+y-7=0$ და $7x-y-9=0$ სამკუთხედის ფერდების განტოლებებია, ხოლო $M(3,-8)$ წერტილი მის ფუძეზე დევს.

74. აჩვენეთ, რომ $A(3,-2)$, $B(1,5)$, $C(-4,3)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის სიმაღლეები ერთ წერტილში იკვეთებიან. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებსაც სამკუთხედის სიმაღლეების ფუძეები წარმოადგენს.

75. $3x+4y-30=0$ და $3x-4y+12=0$ წრფეები R-რადიუსიანი წრეწირის მხებებია. იპოვეთ მხებებითა და შეხების წერტილებში გავლებული წრეწირის რადიუსებით შედგენილი ოთხკუთხედის ფართობი, თუ $R=5$.

პასუხები

1. (ა) სხივი; (ბ) ჩაკეტილი მონაკვეთი; (გ) ღია მონაკვეთი; (დ) ღია მონაკვეთი;

2. $x = 2 + 4t$, $y = 5 - 3t$;

3. $x = 3t$, $y = 2t$; **4.** $x = 1$, $y = 9t$; **5.** $x = 2$, $y = 7 + 10t$;

6. (ა) $\vec{e} = (-5,1)$; (ბ) $A_1(-12,3)$, $A_2(12,-3)$, $A_3(2,-1)$, $A_4(-23,4)$, $A_5(-98,19)$; (გ) $t = 1$ აბსცისთა ღერძს, $t = 2{,}5$ ორდინატთა ღერძს; (დ) A არა, B კი, C კი, D არა;

11. $y = -7x + 11$; **12.** $y = 5x + 3$ ან $y = 5x - 3$;

13. $5x + 3y + 7 = 0$; **14.** $\sqrt{3}x - y - 3 - 2\sqrt{3} = 0$;

15. $4x + 3y - 23 = 0$; **16.** (ა) $x = t$, $y = -5 + 3t$; (ბ) $x = 4t$, $y = 2 + 2t$; (გ) $x = 1 + t$, $y = 11/7 + (6/7)t$; (დ) $x = 8 + 4t$, $y = -5 - 5t$; (ე) $x = 3 - 6t$, $y = -4t$; (ვ) $x = 2 - 4t$, $y = 3 - 3t$; (ზ) $x = 3/5$; (თ) $y = -9/4$;

17. (ა) $3x + y - 7 = 0$; (ბ) $x + 3 = 0$; (გ) $y - 2 = 0$; (დ) $2x - 3y - 3 = 0$; (ე) $5x + y = 0$; (ვ) $3x + 5y - 15 = 0$; (ზ) $6x - y - 3 = 0$; (თ) $3x + 4y + 13 = 0$;

18. $AB: 2x + 3y - 5 = 0$, $BC: 2x - 3y + 13 = 0$, $AC: 2x - y - 1 = 0$, $x - 1 = 0$;

19. $x + y \pm 5 = 0$, $x - y \pm 5 = 0$; **20.** $S = 30$;

23. (ა) $A(15,-10)$; (ბ) პარალელური არიან; (გ) ემთხვევიან ერთმანეთს; (დ) არიან მართობულები; (ე) ემთხვევიან ერთმანეთს; (ვ) $B(1,\ 2)$;

24. (ა) თანაიკვეთებიან; (ბ) თანაიკვეთებიან; (გ) პარალელური არიან; (დ) მართობულები არიან;

26. $x-y-6=0$, $5x+2y-9=0$, $3x+4y-25=0$;

27. $x+y-6=0$, $2x-y-14=0$;

28. $AB: x-2y-3=0$, $BC: 2x-y-6=0$,

$CD: x-2y+13=0$, $AD: 2x-y+14=0$;

29. $x+y-6=0$; **31.** $M'(-2,-6)$; **32.** $C(2;1{,}5)$;

33. $O(14/3, 11/6)$;

34. $x+2y+7=0,\ 2x-y-6=0$ ან

$x-2y-9=0,\ 2x+y+2=0$;

35. (ა) $-2/3$; (ბ) $-4/3$; (გ) არ არსებობს; (დ) $3/43$;

36. (ა) $-arctg\,3$; (ბ) $arctg(7/6)$; (გ) $arctg(1/7)$;

(დ) $arctg(11/17)$;

37. $5x+y-16=0$, $x-5y+2=0$; **38.** $x=-5+t,\ y=-1-3t$;

39. $A(3,-1)$, $B(3,3)$ და $C(-9/5;\ 3/5)$, $\cos\alpha_1=1/\sqrt{10}$,

$\cos\alpha_2=1/\sqrt{2}$, $\cos\alpha_3=1/\sqrt{5}$;

40. $5x+y-3=0$, $x-5y-11=0$;

41. $y=-2x+7$, $y=0{,}5x-3$;

42. $x-2y+1=0$, $2x+y-3=0$;

43. $3x-4y+32=0$, $3x-4y+7=0$, $4x+3y-24=0$,

$4x+3y+1=0$;

44. (ა) $x-8y=0$, (ბ) $8x-7y+6=0$, (გ) $19y+2=0$,

(დ) $38x-19y+30=0$, (ე) $57x-19y+46=0$;

45. $4x-5y+22=0$, $4x+y-18=0$, $2x-y+1=0$;

46. $3x-y+2=0$, $3x-6y+14=0$;

47. $4x-3y-5=0$; **49.** (ა) $\sqrt{10}/20$; (ბ) $2\sqrt{13}/13$;

(გ) $3\sqrt{10}/20$; (დ) $5\sqrt{13}/13$;

50. (ა) $4x-5y-2=0$; (ბ) $x-3y+4=0$;

51. (ა) $3x-19=0$; (ბ) $10x-10y-3=0$;

52. $x-(1\pm 2\sqrt{2})y=0$; **53.** $2x=(-9\pm 5\sqrt{2})y$;

54. $3\sqrt{5}$, $3/\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$; **55.** $\sqrt{5}$; **56.** 12,1;

57. $3x+4y-24=0$, $3x+4y-74=0$, $4x-3y+18=0$ და

$4x-3y-32=0$ ან $3x+4y-24=0$, $3x+4y+26=0$,

$4x-3y+18=0$ და $4x-3y-32=0$;

58. $12x-5y+61=0$, $12x-5y+22=0$ ან $12x-5y+61=0$,

$12x-5y+100=0$;

59. $3x-y+9=0$, $3x-y-3=0$, $x+3y+7=0$;

60. $A(-3,\ 7)$, $B(-6,10)$, $C(9,-17)$, $9x+5y+4=0$;

61. $x-3=0$ და $5x-3y-1=0$; **62.** $x+2y-3=0$,

$x+y-1=0$, $2x+y-6=0$;

63. $A(-1,\ 2)$, $B(3,0)$, $C(5,-4)$; **64.** $5x+2y-23=0$,

$x-y+1=0$, $3x+4y-11=0$;

65. $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$;

66. $4x-3y+10=0$, $7x+y-20=0$, $3x+4y-5=0$;

67. $4x+7y-1=0$, $y-3=0$, $4x+3y-5=0$;

68. $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$;

69. $x+y-7=0$, $x+7y+5=0$, $x-8y+20=0$;

70. $A(-13/3,\ 8/3)$; **71.** $x+4y+4=0$;

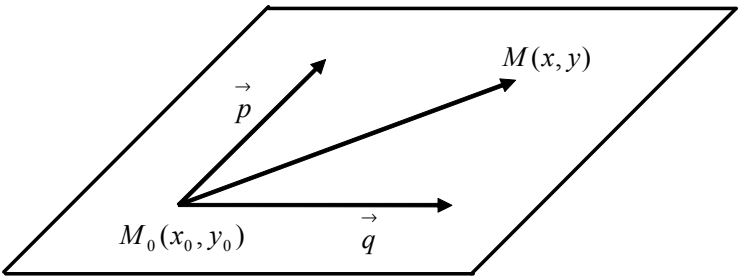
72. $x+y-3=0$; **73.** $(7-\sqrt{5};\ 3\sqrt{5}-10)$; **75.** $100/3$ და $75/2$.

§3. სიბრტყე

სიბრტყის ვექტორულ-პარამეტრული სახის განტოლება:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{p} + \tau \cdot \vec{q},\ t, \tau \in R,$$

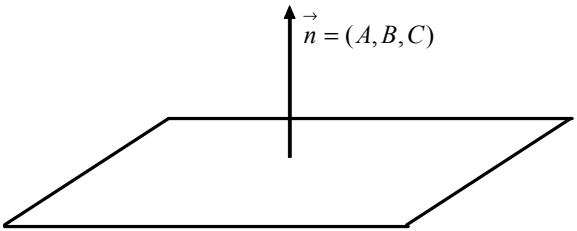
სადაც $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ და $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ სიბრტყის პარალელური ნებისმიერი არაკოლინეარული ვექტორებია, $\vec{r_0}$ – სიბრტის რაიმე ფიქსირებული $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილის რადიუს-ვექტორია, ხოლო $\vec{r}$ – სიბრტყის $M(x, y, z)$ მიმდინარე წერტილის რადიუს-ვექტორი. $t, \tau \in R$-ს პარამეტრები ეწოდებათ.



სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

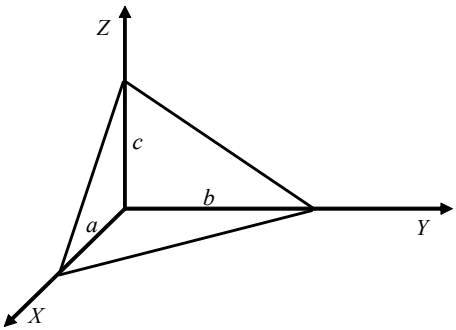
სადაც A, B, C და D ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან A, B და C რიცხვებს შორის ერთი მაინც არაა ნულის ტოლი ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$). ვექტორი $\vec{n} = (A, B, C)$ სიბრტყის მართობული ვექტორია, მას სიბრტყის ნორმალი ეწოდება.



სიბრტყის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

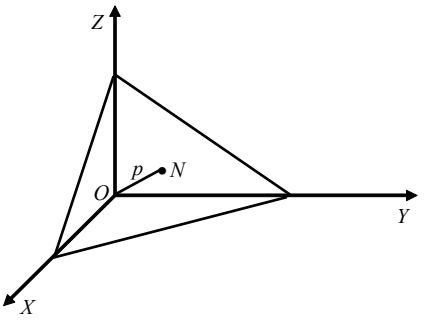
სადაც a, b და c, აბსოლუტური მნიშვნელობით, იმ მონაკვეთების სიგრძეების ტოლია, რომლებსაც სიბრტყე საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოკვეთს.



სიბრტყის ნორმალური სახის განტოლება:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

სადაც p – კოორდინატთა სათავიდან სიბრტყემდე მანძილია, ხოლო α, β და γ კოორდინატთა სათავიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის, შესაბამისად, OX, OY და OZ ღერძთან შედგენილი კუთხეებია.



სიბრტყის პარამეტრული სახის განტოლება:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot p_1 + \tau \cdot q_1 \\ y = y_0 + t \cdot p_2 + \tau \cdot q_2 \\ z = z_0 + t \cdot p_3 + \tau \cdot q_3 \end{cases}, \qquad t, \tau \in R \cdot$$

ეს ტოლობები მიიღება, თუ სიბრტყის ვექტორულ-პარამეტრული სახის განტოლებას ჩავწერთ კოორდინატობრივად.

მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილიდან $Ax + By + Cz + D = 0$ განტოლებით მოცემულ სიბრტყემდე მანძილი გამოითვლება ფორმულით

$$d = \frac{|\, A x_0 + B y_0 + C z_0 + D \,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

სიბრტყეთა კონა:

თუ $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ და $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ განტოლებებით მოცემული სიბრტყეები იკვეთებიან, მაშინ მათი თანაკვეთა წრფეს წარმოადგენს. ყველა იმ სიბრტყეთა ერთობლიობას, რომლებიც ამ წრფეზე გადის სიბრტყეთა კონა ეწოდება.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

განტოლება, ყოველი $\lambda \in R$-თვის, განსაზღვრავს კონაში შემავალ სიბრტყეს.

სავარჯიშო ამოცანები

1. შეადგინეთ სიბრტყის პარამეტრული სახის განტოლება, თუ ის გადის:

(1) $A(1,0,2)$ წერტილზე და $\vec{p} = (1,\ 2,\ 3)$ და $\vec{q} = (0,3,\ 1)$ ვექტორების პარალელურია;

(2) $A(1,2,1)$ წერტილზე და i და j ვექტორების პარალელურია;

(3) $A(1,7,1)$ წერტილზე და OXZ სიბრტყის პარალელურია;

(4) $A(5,3,2)$ და $B(1,0,1)$ წერტილებზე და $\vec{p} = (1,\ 3,\ -3)$ ვექტორის პარალელურია;

(5) $A(1,5,7)$ წერტილზე და OX ღერძზე;

(6) OY ღერძზე და $\vec{p} = (1,\ 2,\ 1)$ ვექტორის პარალელურია;

(7) კოორდინატთა სათავეზე და $A(1,0,1)$ და $B(-2,-3,1)$ წერტილებზე;

(8) $A(1,2,3)$, $B(2,4,4)$ და $C(3,3,1)$ წერტილებზე.

2. შეადგინეთ სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება, თუ ის გადის:

(1) $A(1,1,1)$ წერტილზე $\vec{p} = (1,\ 2,\ 0)$ და $\vec{q} = (0,1,\ 3)$ ვექტორების პარალელურად;

(2) $A(31,0,1)$ წერტილზე და აბსცისთა ღერძზე;

(3) $A(1,2,2)$ წერტილზე და OXZ სიბრტყის პარალელურია;

(4) კოორდინატთა სათავეზე და $A(1,0,2)$ და $B(0,0,3)$ წერტილებზე;

(5) $A(1,0,1)$, $B(0,2,3)$ და $C(0,2,1)$ წერტილებზე.

3. შეადგინეთ სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება, რომელიც $A(1,2,-2)$ წერტილზე გადის და $\vec{n}=(2,-1,3)$ ვექტორის მართობულია.

4. დაადგინეთ შემდეგი განტოლებებით მოცემულ სიბრტყეთა საკოორდინატო სისტემის მიმართ მდებარეობის თავისებურებები:

(1) $D=0$; (2) $A=0$; (3) $B=0$; (4) $C=0$;

(5) $A=0,\ D=0$; (6) $B=0,\ D=0$; (7) $C=0,\ D=0$;

(8) $B=0,\ C=0$; (9) $A=0,\ C=0$; (10) $A=0,\ B=0$;

(11) $B=0, C=0,\ D=0$; (12) $A=0, C=0,\ D=0$;

(13) $A=0, B=0,\ D=0$.

5. შეადგინეთ სიბრტყის ზოგადი სახის განტოლება:

(1) $x=2+3\cdot u-4\cdot v,\quad y=4-v,\quad z=2+3\cdot u$;

(2) $x=u+v,\quad y=u-v,\quad z=5+6\cdot u-4\cdot v$.

6. შეადგინეთ სიბრტყის პარამეტრული სახის განტოლება:

(1) $3x-6y+z=0$; (2) $2x-y-z-3=0$.

7. იპოვეთ სიბრტყის მიერ საკოორდინატო ღერძებზე ჩამოკვეთილი მონაკვეთების სიგრძეები:

(1) $2x+3y-9z+18=0$; (2) $x-2y+5z-20=0$;

(3) $x=1+u+v,\quad y=2+u,\quad z=3+u-v$;

(4) $x=3+2u,\quad y=2-2u+4v,\quad z=1+u+3v$.

8. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $A(3,5,-7)$ წერტილზე გადის და საკოორდინატო ღერძებზე ტოლი სიგრძის მონაკვეთებს ჩამოკვეთს.

9. გამოთვალეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, რომელიც საკოორდინატო სიბრტყეებითა და $3x-5y+15z-30=0$ სიბრტყით არის შემოსაზღვრული.

10. $A(2,1,0)$, $B(1,3,5)$, $C(6,3,4)$ და $D(0,-7,8)$ ტეტრაედრის წვეროებია. შეადგინეთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც AB წიბოზე და CD წიბოს შუა წერტილზე გადის.

11. შეადგინეთ $A(0,0,2)$, $B(3,0,5)$, $C(1,1,0)$ და $D(4,1,2)$ წვეროების მქონე ტეტრაედრის წახნაგების განტოლებები.

12. დაადგინეთ შემდეგი სიბრტყეებიდან რომლები კვეთენ ერთმანეთს, არიან პარალელურნი ან ემთხვევიან ერთმანეთს:

(1) $x-y+3z+1=0$ და $2x-y+5z-2=0$;

(2) $2x+y+2z+4=0$ და $4x+2y+4z+8=0$;

(3) $3x+2y-z+2=0$ და $6x+4y-2z+1=0$;

(4) $x=1+u+v,\quad y=2+u,\quad z=3+u-v$ და
$x=3+2u',\quad y=2-2u'+4v',\quad z=1+u'+3v'$;

(5) $x=u+2v,\quad y=1+v,\quad z=u-v$ და
$x=2+3u'+v',\quad y=1+u'+v',\quad z=2-2v'$;

(6) $x=2+u+2v,\quad y=2+v,\quad z=3+u-v$ და
$x=3u'+v',\quad y=u'+v',\quad z=-2v'$.

13. იპოვეთ სიბრტყეებს შორის კუთხის კოსინუსი:

(1) $2x+y-2z+6=0$ და $2x-2y+z+8=0$;

(2) $2x-2y+z+2=0$ და $x+y+z-5=0$;

(3) $x=1+u+v,\quad y=2+u,\quad z=3+u-v$ და
$x=3+2u',\quad y=2-2u'+4v',\quad z=1+u'+3v'$.

14. შეადგინეთ $A(1,-2,3)$ წერტილზე გავლებული იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $B(1,1,1)$, $C(2,0,-1)$ და $D(3,4,5)$ წერტილებზე გავლებული სიბრტყის პარალელურია.

15. მოცემულია პარალელეპიპედის $A(1,1,1)$ წვერო და მისი $x+y+2z-1=0$, $2x+y+3z+2=0$ და $x-y-z+3=0$

არაპარალელური წახნაგების განტოლებები. შეადგინეთ მისი დანარჩენი სამი წახნაგის განტოლებები.

16. აჩვენეთ, რომ $2x + y - 2z + 6 = 0$, $2x - 2y + z + 8 = 0$ და $x + 2y + 2z + 10 = 0$ არაპარალელური წახნაგების მქონე პარალელეპიპედი მართკუთხაა.

17. იპოვეთ $A(1,3,5)$ წერტილიდან $2x + y + z - 1 = 0$ და $3x + y + 2z - 3 = 0$ სიბრტყეების თანაკვეთის წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის B ფუძე.

18. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, თუ კოორდინატთა სათავიდან მასზე დაშვებული მართობის ფუძეა $A(1,-1,3)$.

19. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც OZ ღერძზე გადის და $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ სიბრტყესთან 45°-იან კუთხეს ადგენს.

20. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $2x + 3y - z + 5 = 0$, $3x - 2y + 2z - 1 = 0$ წრფეზე გადის და პარალელურია ვექტორის:

(1) $\vec{n} = (1,1,1)$; (2) $\vec{n} = (4,-7,-13)$.

21. $x + 5y + z = 0$, $x - z + 4 = 0$ წრფით განსაზღვრული კონიდან შეარჩიეთ სიბრტყე, რომელიც $x - 4y - 8z + 12 = 0$ სიბრტყესთან $\pi/4$-ის ტოლ კუთხეს ადგენს.

22. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $5x - y + 3z - 2 = 0$ სიბრტყის მართობულია და:

(1) მათი გადაკვეთის წრფე OXY სიბრტყეში ძევს;

(2) $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ წრფეზე გადის;

(3) $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x - 2y + z + 2 = 0$ წრფეზე გადის.

23. გამოარკვიეთ, თუ რომელი საკოორდინატო სიბრტყე მიეკუთვნება $4x - y + 2z - 6 = 0$ და $6x + 5y + 3z - 9 = 0$ სიბრტყეებით განსაზღვრულ კონას.

24. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $x + y - z + 2 = 0$, $4x - 3y + z - 1 = 0$ და $2x + y - 5 = 0$ სიბრტყეების გადაკვეთის წერტილზე და: (1) აბსცისთა ღერძზე; (2) კოორდინატთა სათავეზე და $A(1,3,2)$ წერტილზე; (3) პარალელურია OXZ სიბრტყის.

25. იპოვეთ მანძილი პარალელურ სიბრტყეებს შორის:
(1) $x - 2y - 2z + 7 = 0$ და $2x - 4y - 4z + 17 = 0$;
(2) $6x + 2y - 4z + 15 = 0$ და $9x + 3y - 6z + 10 = 0$.

26. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $3x - y + 7z - 4 = 0$ და $5x + 3y - 5z + 2 = 0$ სიბრტყეებით განსაზღვრულ ორწახნაგა კუთხეს შუაზე ჰყოფს.

27. იპოვეთ $A(0,6,4)$, $B(3,5,3)$, $C(-2,11,-5)$ და $D(1,-1,4)$ წვეროების მქონე ტეტრაედრის A წვეროდან დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

28. შეადგინეთ სიბრტყეთა განტოლებები, რომლებიც $2x - 2y - z - 6 = 0$ სიბრტყიდან $d = 7$-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული.

29. იპოვეთ სფეროს ცენტრი და რადიუსი, თუ ის საკოორდინატო სიბრტყეებითა და $11x - 10y - 2z - 57 = 0$ სიბრტყით შემოსაზღვრულ ტეტრაედრშია ჩახაზული.

30. იპოვეთ $x + 4y + 8z + 8 = 0$, $x - 2y + 2z + 2 = 0$ და $3x + 4y + 12 = 0$ სიბრტყეების OXY სიბრტყესთან გადაკვეთით მიღებული სამკუთხედის ის წერტილი, რომელიც ამ სიბრტყეებიდან თანაბარი მანძილითაა დაშორებული.

პასუხები

1. (1) $x = 1 + t,\ \ y = 2t + 3\tau,\ \ z = 2 + 3t + \tau$;

(2) $x = 1 + t,\ \ y = 2 + \tau,\ \ z = 1$; (3) $x = 1 + t,\ \ y = 7,\ \ z = 1 + \tau$;

(4) $x = 5 + 4t + \tau,\ \ y = 3 + 3t + 3\tau,\ \ z = 2 + t - 3\tau$;

(5) $x = 1,\ \ y = 5 + t,\ \ z = 7 + \tau$;

(6) $x = t,\ \ y = t + 2\tau,\ \ z = \tau$; (7) $x = t - 2\tau,\ \ y = -3\tau,\ \ z = t + \tau$;

(8) $x = 1 + t + 2\tau,\ \ y = 2 + 2t + \tau,\ \ z = 3 + t - 2\tau$;

2. (1) $6x - 3y + z - 4 = 0$; (2) $y = 0$; (3) $y - 2 = 0$;

(4) $y = 0$; (5) $2x + y - 2 = 0$;

3. $2x - y + 3z + 6 = 0$; **5.** (1) $x - 4y - z + 16 = 0$;

(2) $x + 5y - z + 5 = 0$;

6. (1) $x = u - v,\ \ y = u,\ \ z = 3u + 3v$;

(2) $x = 1 + u,\ \ y = -1 - u - v,\ \ z = u + 3v$;

7. (1) $-9,\ \ -6,\ \ 2$; (2) $20,\ \ -10,\ \ 4$; (3) $0,\ \ 0,\ \ 0$;

(4) $17/5,\ \ 17/3,\ \ -17/4$;

8. $x + y + z - 1 = 0$; **9.** 20; **10.** $27x + 11y + z - 65 = 0$;

11. $x - 3y - z + 2 = 0$, $x - 4y - z + 2 = 0$, $2x - 8y - 3z + 6 = 0$,
$2x - 11y - 3z + 9 = 0$;

12. (1) და (4) გადაიკვეთებიან; (2) და (5) ერთმანეთს ემთხვევიან;
(3) და (6) პარალელურები არიან;

13. (1) 0; (2) $1/3\sqrt{3}$; (3) $\sqrt{3}/6$; **14.** $2x - 8y + 5z - 33 = 0$;

15. $x + y + 2z - 4 = 0$, $2x + y + 3z - 6 = 0$, $x - y - z + 1 = 0$.

17. $B(-2, 1, 4)$;

18. $x - y + 3z - 11 = 0$; **19.** $x + 3y = 0$, $3x - y = 0$;

20. (1) $6x-17y+11z-19=0$; (2) კონაში შემავალი ნებისმიერი სიბრტყე;

21. $x+20y+7z-12=0$, $x-z+4=0$;

22. (1) $15x-3y-26z-6=0$; (2) $x+2y-z+2=0$;

(3) $3x+z-9=0$; **23.** OXZ;

24. (1) $2y-z=0$; (2) $3x-y=0$; (3) $y-3=0$;

25. (1) $1/2$; (2) $25/6\sqrt{14}$;

26. $x+2y-6z+3=0$; **27.** 3; **28.** $2x-2y-z-27=0$;

29. $(3/2,-3/2,-3/2)$; **30.** $(-19/6,-5/6,0)$.

§4. წრფე სივრცეში

$\vec{a} = (p, q, r)$ მიმმართველი ვექტორის მქონე და მოცემულ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გავლებული წრფის **ვექტორულ-პარამეტრული სახის** განტოლებაა:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{a},\ t \in R,$$

სადაც $\vec{r}_0$ არის წრფის M_0 წერტილის რადიუს-ვექტორი, $\vec{r}$ არის წრფის მიმდინარე წერტილის რადიუს-ვექტორი, ხოლო t პარამეტრია.

თუ ამ ტოლობას ჩავწერთ კოორდინატობრივად, მივიღებთ წრფის **პარამეტრული სახის** განტოლებას:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\,p \\ y &= y_0 + t\,q, \quad t \in R. \\ z &= z_0 + t\,r \end{aligned}$$

რადგან $\vec{a}$ არანულოვანი ვექტორია, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობებიდან პარამეტრის გამორიცხვის შედეგად, მივიღებთ წრფის **კანონიკური სახის** განტოლებას:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

წრფე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ორი არაპარალელური სიბრტყის თანაკვეთის წერტილების სიმრავლე, ამიტომ გვაქვს წრფის **ზოგადი სახის** განტოლება:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}$$

სავარჯიშო ამოცანები

1. შეადგინეთ წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, თუ ის გადის:

(1) $M(2,0,3)$ წერტილზე და პარალელურია $\vec{a} = (3,-2,-2)$ ვექტორის;

(2) $A(1,2,3)$ წერტილზე და პარალელურია აბსცისთა ღერძის;

(3) $M(1,2,3)$ და $N(4,4,5)$ წერტილზე.

2. გამოარკვიეთ, $A_1(3,4,7)$, $A_2(2,0,4)$, $A_3(0,-5,1)$ და $A_4(-1,3,-2)$ წერტილებიდან რომელი ეკუთვნის $x = 2 + t$, $y = 1 + 3t$, $z = 5 + 2t$ წრფეს.

3. შეადგინეთ $A_1(3,7,5)$, $A_2(1,2,3)$ და $A_3(3,0,1)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის A_1 წვეროდან გავლებული მედიანის პარამეტრული სახის განტოლება.

4. შეადგინეთ $A_1(1,2,-7)$, $A_2(2,2,-7)$ და $A_3(3,4,-5)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის A_1 წვეროდან გავლებული ბისექტრისის პარამეტრული სახის განტოლება.

5. ჩაწერეთ წრფის განტოლება ზოგადი სახით

(1) $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 3 + 6t$;

(2) $x = 8 + 3t$, $y = -6t$, $z = 1 + 2t$.

6. ჩაწერეთ წრფის განტოლება პარამეტრული სახით

(1) $x + y + 2z - 3 = 0$, $x - y + z - 1 = 0$;

(2) $x + 2y + 4z - 7 = 0$, $2x + y - z - 5 = 0$.

7. შეადგინეთ $A_1(1,-2,-4)$, $A_2(3,1,-3)$ და $A_3(5,1,-7)$ წვეროების მქონე სამკუთხედის A_2 წვეროდან გავლებული სიმაღლის პარამეტრული სახის განტოლება.

8. ჩაწერეთ წრფის განტოლება კანონიკური სახით:

(1) $5x + y + z = 0,\ \ 2x + 3y - 2z + 5 = 0$;

(2) $3x - 2y + z - 2 = 0,\ \ 4x + y - 3z - 2 = 0$.

9. შეადგინეთ წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, თუ ის $A(0,1,-4)$ წერტილზე გადის და $\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + \mathrm{z} - 1 = 0,$ $2\mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 3\mathrm{z} + 6 = 0$ წრფის პარალელურია.

10. აჩვენეთ, რომ შემდეგი წრფეები პარალელურია. იპოვეთ მანძილი მათ შორის:

(1) $x = 1 - 2t,\ y = 3t,\ z = -2 + t$ და

$x = 7 + 4t',\ y = 5 - 6t',\ z = 4 - 2t'$;

(2) $x = 2t,\ y = 0,\ z = -2t$ და

$x + y + z - 3 = 0,\ \ x - y + z - 1 = 0$;

(3) $x + y - 3z + 1 = 0,\ \ x - y + z + 3 = 0$ და

$x + 2y - 5z - 1 = 0,\ \ x - 2y + 3z - 9 = 0$.

11. აჩვენეთ, რომ შემდეგი წრფეები ემთხვევიან ერთმანეთს:

(1) $x = 8 + 3t,\ y = 7 - 2t,\ z = 11 + t$ და

$x = 5 - 6t',\ y = 9 + 4t',\ z = 10 - 2t'$;

(2) $3x + y - 2z - 6 = 0,\ 41x - 19y + 52z - 68 = 0$ და

$x - 2y + 5z - 1 = 0,\ \ 33x + 4y - 5z - 63 = 0$;

(3) $x = -t,\ y = -4 - 5t,\ z = 3 + 3t$ და

$4x + y + 3z - 5 = 0,\ \ 7x - 2y - z - 5 = 0$.

12. აჩვენეთ, რომ შემდეგი წრფეები ერთმანეთს კვეთენ. იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი:

(1) $x = -3t,\ y = 2 + 3t,\ z = 1$ და

$x = 1 + 5t',\ y = 1 + 13t',\ z = 1 + 10t'$;

(2) $x = -2 + 3t,\ y = -1,\ z = 4 - t$ და

$2y - z + 2 = 0,\ \ x - 7y + 3z - 17 = 0$;

(3) $x+z-1=0,\ 3x+y-z+13=0$ და

$x-2y+3=0,\ \ y-2z-8=0$.

13. აჩვენეთ, რომ შემდეგი წრფეები აცდენილია. იპოვეთ მანძილი მათ შორის:

(1) $x=3+t,\ y=1-t,\ z=2+2t$ და

$x=-t',\ y=2+3t',\ z=3t'$;

(2) $x=3-6t,\ y=-1+4t,\ z=t$ და

$x=-2+3t',\ y=4,\ z=3-t'$;

(3) $x+2y-z+1=0,\ 2x-3y+z-4=0$ და

$x+y+z-9=0,\ \ 2x-y-z=0$;

(4) $x=2+3t,\ y=3-2t,\ z=1+2t$ და

$x=-2t',\ y=1+3t',\ z=2-t'$.

პასუხები

1. (1) $\vec{r} = 2i + 3k + t(3i - 2j - 2k)$; (2) $\vec{r} = i + 2j + 3k + t\,i$;

(3) $\vec{r} = i + 2j + 3k + t(3i + 2j + 2k)$;

2. A_1 და A_3; **3.** $x = 3 + t,\ y = 7 + 6t,\ z = 5 + 3t$;

4. $x = 1 + (1 + \sqrt{3})t,\ y = 2 + t,\ z = -7 + t$;

5. (1) $2y - z - 1 = 0,\ 3x - 2y + 1 = 0$;

(2) $y + 3z - 3 = 0,\ 2x + y - 16 = 0$;

6. (1) $x = 2 + 3t,\ y = 1 + t,\ z = -2t$;

(2) $x = 5 - 2t,\ y = -3 + 3t,\ z = 2 - t$;

7. $x = 3 + 3t,\ y = 1 + 15t,\ z = -3 + 19t$;

8. (1) $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-1}{13}$; (2) $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{13} = \dfrac{z-1}{11}$;

9. $x = 8t,\ y = 1 - 5t,\ z = -4 + 2t$;

10. (1) $\sqrt{91\dfrac{3}{14}}$; (2) $\sqrt{3}$; (3) $\sqrt{347}/3$;

11. (1) $(1,1,1)$; (2) $(10,-1,0)$; (3) $(-3,0,4)$;

12. (1) $18/\sqrt{110}$; (2) $31/13$; (3) $16/\sqrt{102}$.

§5. წრფისა და სიბრტყის ურთიერთგანლაგება

ვთქვათ, მოცემულია წრფე კანონიკური სახის განტოლებით

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

და სიბრტყე ზოგადი სახის განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0\,.$$

წრფისა და სიბრტყის **პარალელურობის პირობაა**:

$$Ap+Bq+Cr=0\,.$$

წრფისა და სიბრტყის **მართობულობის პირობაა**:

$$\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}\,.$$

წრფესა და სიბრტყეს შორის α კუთხისათვის გვაქვს:

$$\sin\alpha=\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\,.$$

პირობა იმისა, რომ წრფე სიბრტყეზე ძევს:

$$\begin{cases}Ap+Bq+Cr=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.\end{cases}$$

სავარჯიშო ამოცანები

1. გამოარკვიეთ, მოცემული წრფე მოცემულ სიბრტყეზე მდებარეობს, მისი პარალელურია თუ კვეთს მას. თუ კვეთს, მაშინ იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი:

(1) $x = 2 + 4t,\ y = -1 + t,\ z = 2 - t$ და $4x + y - z + 13 = 0$;

(2) $x = 2 - 3t,\ y = -1 + t,\ z = -2t$ და $x + y - z + 3 = 0$;

(3) $x = t,\ y = -8 - 4t,\ z = -3 - 3t$ და $x + y - z + 5 = 0$;

(4) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{5}$ და $4x + 3y - z + 3 = 0$;

(5) $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ და $3x - y + 2z - 5 = 0$;

(6) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$ და $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

(7) $2x - y + 3z + 4 = 0,\ x - 2y - 2z + 2 = 0$ და
$4x - 5y - z + 8 = 0$;

(8) $2x - 3y - 3z - 9 = 0,\ x - 2y + z + 3 = 0$ და
$x - 2y + z - 1 = 0$;

(9) $3x + 5y - 7z + 16 = 0,\ 2x - y + z - 6 = 0$ და
$5x - z - 4 = 0$.

2. დაადგინეთ, m -ის რა მნიშვნელობისათვის არა აქვს $x = -1 + 3t$, $y = 2 + mt,\ z = -3 - 2t$ წრფეს $x + 3y + 3z - 2 = 0$ სიბრტყესთან საერთო წერტილი.

3. დაადგინეთ, a და d პარამეტრების რა მნიშვნელობისათვის დევს $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ წრფე $ax + y - 2z + d = 0$ სიბრტყეზე.

4. დაადგინეთ, a და c პარამეტრების რა მნიშვნელობისაა $3x-2y+z+3=0,\ 4x-3y+4z+1=0$ წრფე $ax+8y+cz+2=0$ სიბრტყის მართობული.

5. მოცემული $\vec{r}=\vec{r}_1+u\cdot\vec{a}_1+v\cdot\vec{a}_2$ სიბრტყისა და $\vec{r}=\vec{r}_0+t\,\vec{a}$ წრფისათვის, დაადგინეთ უაცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ: (1) წრფე სიბრტყეს არ კვეთს, (2) წრფე ძევს სიბრტყეზე, (3) წრფე კვეთს სიბრტყეს.

6. იპოვეთ $\vec{r}=\vec{r}_0+t\,\vec{a}$ წრფისა და $\vec{r}=\vec{r}_1+u\cdot\vec{a}_1+v\cdot\vec{a}_2$ სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის რადიუს-ვექტორი.

7. გამოარკვიეთ წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა:

(1) $x=2-3t,\ y=7-2t,\ z=-1+4t$ და

$x=1+v,\ y=1+4u+2v,\ z=u-v$;

(2) $x-2y+3z-2=0,\ 3x+y-5z+1=0$ და

$x=4+u+3v,\ y=3+4u+2v,\ z=8u-v$;

(3) $\dfrac{x-1}{10}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$ და

$x=3+10u-2v,\ y=2-4u+3v,\ z=-2+u+2v$.

8. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც კოორდინატთა სათავეზე და $x=1+3t$, $y=-2+4t$, $z=5-2t$ წრფეზე გადის.

9. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $x+3y-2z-4=0,$ $2x-y+3z-1=0$ წრფეზე გადის და პარალელურია წრფის $x=2+3t,\ y=-1+6t,\ z=4t$.

10. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც OZ ღერძზე გადის და პარალელურია წრფის $x=2+t,\ y=2t,\ z=1+3t$.

11. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც $x-y+2z-2=0$ სიბრტყეში დევს და კვეთს წრფეებს: $x=1+t,\ y=2+2t,\ z=4+3t$ და $x=1-t',\ y=4+2t',\ z=-t'$.

12. შეადგინეთ წრფის განტოლება, რომელიც კოორდინატთა სათავეზე გადის და კვეთს წრფეებს: $x=t,\ y=1+4t,\ z=1-3t$ და $x=1+7t',\ y=-8t',\ z=1+5t'$.

13. შეადგინეთ წრფის პარამეტრული სახის განტოლება, რომელიც $3x-2y-3z-7=0$ სიბრტყის პარალელურია, გადის წერტილზე $A(3,-2,-4)$ და კვეთს $x=2+3t,\ y=-4-2t,\ z=1+2t$ წრფეს.

14. იპოვეთ კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის:

(1) $x=1+11t,\ y=2-7t,\ z=5-8t$ და $7x-8y+2z-10=0$;

(2) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$ და $2x-4y+2z-9=0$;

(3) $x+4y-2z+7=0,\ 3x+7y-2z=0$ და $3x+y-z+1=0$.

15. შეადგინეთ $A(1,2,1)$ წერტილიდან $3x+7y-2z+5=0$ სიბრტყეზე დაშვებული მართობი წრფის განტოლება.

16. იპოვეთ $A(2,11,-5)$ წერტილის გეგმილი $x+4y-2z+7=0$ სიბრტყეზე.

17. იპოვეთ $M(6,-5,5)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $2x-3y+z-4=0$ სიბრტყის მიმართ.

18. იპოვეთ $N(4,-5,4)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი იმ სიბრტყის მიმართ, რომელიც $x+y+z-3=0,\ x-y+z-1=0$ და $x+z=0,\ y=0$ წრფეებზე გადის.

19. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $x=2+5t,\ y=3+t,$ $z=-1+2t$ წრფეზე გადის და $4x+3y-z+3=0$ სიბრტყის მართობულია.

20. იპოვეთ $3x-2y-z+15=0$ სიბრტყეზე გეგმილი წრფისა:

(1) $x=1+2t,\ y=3+t,\ z=2+t$;

(2) $x+y+z-5=0,\ 2x-3y+z-4=0$.

21. აჩვენეთ, რომ $x=8+5t,\ y=1+2t,\ z=6+4t$ და $x=11+3t',$ $y=2+t',\ z=4-2t'$ წრფეები იკვეთებიან. შეადგინეთ ამ წრფეებზე აგებული სიბრტყის განტოლება.

22. შეადინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $A(1,2,-1)$ წერტილიდან $x+y-z+1=0$ და $2x+3y=0$ სიბრტყეებისადმი გავლებულ პერპენდიკულარებზეა აგებული.

23. აჩვენეთ, რომ $x=3t,\ y=1-t,\ z=3+2t$ და $x=-1-6t',$ $y=2t',\ z=3-4t'$ წრფეები პარალელურია. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელშიც ეს წრფეები მდებარეობენ.

24. შეადგინეთ $x=t,\ y=2t,\ z=-3t$ და $x=1+5t',\ y=3+4t',$ $z=4+2t'$ წრფეების პარალელური სიბრტყის განტოლება, რომელიც $A(4,-1,3)$ წერტილზე გადის.

25. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $x=-5+4t,$ $y=2+7t,\ z=1+2t$ წრფეზე გადის და $x=t',\ y=1-2t',$ $z=-3t'$ წრფის პარალელურია.

26. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ ის $x+y+z-2=0$ სიბრტყის პარალელურია და $x=2t,\ y=5-t,$ $z=-1-t$ წრფე ამ სიბრტყეზე დევს.

27. შეადგინეთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც $A(1,2,-2)$ წერტილზე გადის და $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$ წრფის მართობულია.

28. იპოვეთ $A(1,2,3)$ წერტილიდან $x=8+3t,\ y=1+t,\ z=6-2t$ წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძე.

29. იპოვეთ მანძილი $P(1,-3,2)$ წერტილიდან $x=1-2t,\ y=1+3t,$ $z=2t$ წრფემდე.

30. შეადგინეთ $D(5,2,4)$ წერტილიდან $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ წრფეზე დაშვებული მართობი წრფის პარამეტრული სახის განტოლება.

31. იპოვეთ:

(1) $P(-3,1,-1)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $4x-3y-13=0,\ y-2z+5=0$ წრფის მიმართ;

(2) $Q(4,3,10)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$ წრფის მიმართ.

32. შეადგინეთ შემდეგი წრფეების საერთო პერპენდიკულარის განტოლება:

(1) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ და $x=-1+3t,\ y=2+2t,\ z=1;$

(2) $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$ და $\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}.$

პასუხები

1. (1) $A(-2,-2,3)$; (2), (6), (8) წრფე სიბრტყის პარალელურია;
(3), (4), (7) წრფე ძევს სიბრტყეზე; (5) $A(2,3,1)$; (9) $A(2,4,6)$;

2. $m=1$;

3. $a=-2,\ d=11$;

4. $a=5,\ d=1$;

5. (1) $\vec{a}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0,\ (\vec{r}_1-\vec{r}_0)\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\neq 0$;

(2) $\vec{a}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0,\ (\vec{r}_1-\vec{r}_0)\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0$; (3) $\vec{a}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\neq 0$;

6. $\vec{r}=\vec{r}_0+\dfrac{(\vec{r}_1-\vec{r}_0)\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{\vec{a}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}\,\vec{a}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\neq 0$;

7. (1) წრფე სიბრტყის პარალელურია; (2) $A(1,1,1)$; (3) წრფე დევს სიბრტყეზე;

8. $16x-17y-10z=0$; **9.** $2x-7y+9z+5=0$;

10. $2x-y=0$; **11.** $x=2t,\ y=2t,\ z=1$;

12. $7x-y+z=0,\ 4x+y-4z=0$;

13. $x=3+5t,\ y=-2-6t,\ z=-4+9t$;

14. (1) 45°; (2) 30°; (6) $\arcsin\dfrac{19}{11\sqrt{7}}$;

15. $x=1+3t,\ y=2+7t,\ z=1-2t$; **16.** $A'(-1,-1,1)$;

17. $M'(-2,7,1)$; **18.** $N'(-2,7,-2)$;

19. $7x-13y-11z+14=0$;

20. (1) $3x-2y-z+15=0,\ \ x+5y-7z-2=0$;

(2) $x+y+z-5=0,\ \ 3x-2y-z+15=0$;

21. $8x-22y+z-48=0$; **22.** $3x-2y+z+2=0$;

23. $x-y-2z+7=0$; **24.** $16x-17y-6z-63=0$;

25. $17x-14y+15z+98=0$;

26. $x+y+z-4=0$; **27.** $4x-3y+2z+6=0$;

28. $A'(5,0,8)$; **29.** $d=2\sqrt{69/17}$;

30. $x=5,\ y=2-t,\ z=4+2t$;

31. (1) $P'(5,-7,3)$; (2) $Q'(2,9,6)$;

32. (1) $18x+22y-5z-14=0,\ 12x-18y+13z+35=0$;

(2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{4}$.

§6. მეორე რიგის წირები

წრეწირი არის სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული თანაბრადაა დაშორებული სიბრტყის მოცემული წერტილიდან (წრეწირის ცენტრი). R -რადიუსიანი წრეწირის განტოლებებია:

ცენტრით $O(a,b)$ წერტილი:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2;$$

ცენტრით კოორდინატთა სათავე:

$$x^2+y^2=R^2.$$

წრეწირის $M(x_0,y_0)$ წერტილზე გავლებული **მხების განტოლებაა:**

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2 \text{ ან } xx_0+yy_0=R^2.$$

ელიფსი არის სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვის სიბრტყის ორ ფიქსირებულ F_1 და F_2 წერტილებამდე (ფოკუსები) მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა. $F_1(-c,0)$ და $F_2(c,0)$ ფოკუსების მქონე ელიფსის კანონიკური სახის განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

a, $(c<a)$ და b – ელიფსის დიდი და მცირე ნახევარღერძებია, $c^2=a^2-b^2$.

ელიფსის ექსცენტრისიტეტია: $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$, თუ $a>b$ და $\varepsilon=\frac{c}{b}<1$, თუ $b>a$.

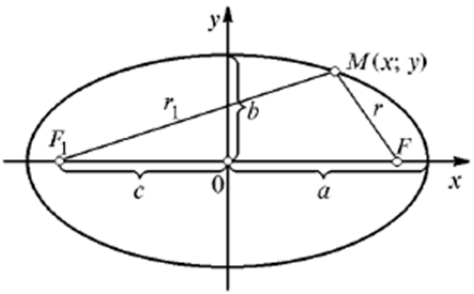
ელიფსის დირექტრისაა: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, თუ $a > b$ და $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$, თუ $b > a$.

ელიფსის რაიმე წერტილის ფოკალური რადიუსები არის ამ წერტილიდან ელიფსის ფოკუსებამდე r_1 და r_2 მანძილები:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x.$$

ელიფსის $M(x_0, y_0)$ წერტილზე გავლებული **მხების განტოლებაა:**

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$



ჰიპერბოლა არის სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვის სიბრტყის ორ ფიქსირებულ F_1 და F_2 წერტილებამდე (ფოკუსები) მანძილების სხვაობა მუდმივი სიდიდეა. $F_1(-c, 0)$ და $F_2(c, 0)$ ფოკუსების მქონე ჰიპერბოლის კანონიკური სახის განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a ნამდვილი ნახევარღერძია, b – წარმოსახვითი ნახევარღერძი, ამასთან $c^2 = a^2 + b^2$.

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

განტოლება განსაზღვრავს კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიული ჰიპერბოლას, რომლის ფოკუსებიც ორდინატთა ღერძზეა მოთავსებული (ამ ჰიპერბოლის დიდი ნახევარღერძია b).

ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაში აგებულ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ და } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ჰიპერბოლებს ერთმანეთის **შეუღლებულ** ჰიპერბოლებს უწოდებენ.

ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი: $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$.

ჰიპერბოლის დირექტრისა: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

ჰიპერბოლის ასიმპტოტები: $y=\pm\frac{b}{a}x$.

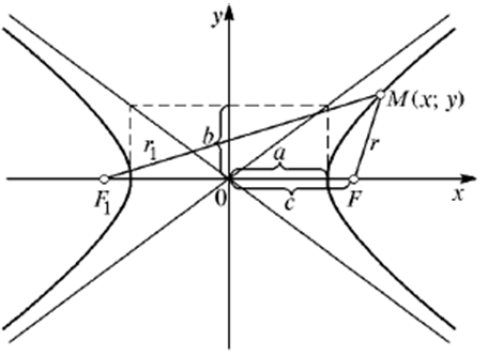
ჰიპერბოლის რაიმე წერტილის ფოკალური რადიუსები არის ამ წერტილიდან ჰიპერბოლის ფოკუსებამდე მანძილები:

$r_1=\varepsilon x+a$ და $r_2=-a+\varepsilon x$ მარჯვენა შტო,

$r_1=-\varepsilon x-a$ და $r_2=a-\varepsilon x$ მარცხენა შტო.

ჰიპერბოლის $M(x_0,y_0)$ წერტილზე გავლებული **მხების განტოლება:**

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$



პარაბოლა არის სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვის სიბრტყის ფიქსირებულ F წერტილამდე (ფოკუსი) და არჩეულ წრფემდე (დირექტრისა) მანძილები ტოლია. $F(\frac{p}{2}, 0)$ ფოკუსისა და $x = -\frac{p}{2}$ დირექტრისის მქონე პარაბოლის კანონიკური სახის განტოლება:

$$y^2 = 2px$$

მისი შტოები მიმართულია ორდინატთა ღერძის მარჯვნივ.

პარაბოლის პარამეტრი: $p > 0$.

პარაბოლის რაიმე წერტილის ფოკალური რადიუსი:
$r = x + p/2$.

პარაბოლა შტოებით ორდინატთა ღერძის მარცხნივ: $y^2 = -2px$

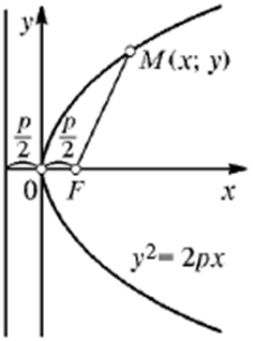
პარაბოლა სიმეტრიის ღერძით – ორდინატთა ღერძი:

$x^2 = 2py$ ზედა ნახევარსიბრტყე,

$x^2 = -2py$ ქვედა ნახევარსიბრტყე.

პარაბოლას $M(x_0, y_0)$ წერტილზე გავლებული **მხების განტოლება:**

$$yy_0 = p(x + x_0)$$



სავარჯიშო ამოცანები

წრეწირი

1. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც $M(2,5)$ წერტილზე გადის და რომლის ცენტრია $O(1,-2)$ წერტილი.

2. წრეწირის განტოლებები ჩაწერეთ კანონიკური სახით:

(1) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$;

(2) $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$;

(3) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$;

4) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$.

3. შეადგინეთ $A(0,1)$, $B(3,0)$, $C(-1,0)$ წერტილებზე გავლებული წრეწირის განტოლება.

4. შეადგინეთ $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 25$ წრეწირის იმ დიამეტრის განტოლება, რომელიც $2x - 5y - 7 = 0$ წრფის მართობულია.

5. შეადგინეთ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ წრეწირისადმი გავლებული მხების განტოლება, თუ ის გადის წერტილზე:
(1) $A(0,4)$; (2) $B(7,0)$; (3) $C(5,3)$.

6. შეადგინეთ $N(7,5)$ წერტილიდან $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$ წრეწირისადმი გავლებული მხების განტოლება.

7. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომლის ერთ-ერთი დიამეტრის ბოლოებია $A(1,4)$ და $B(3,2)$.

8. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება ცენტრით $O(2,-3)$, თუ $6x - 8y - 24 = 0$ წრფე მისი მხებია .

9. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის $M(2,4)$ წერტილზე გადის და ეხება საკოორდინატო ღერძებს .

10. დაადგინეთ შემდეგი პირობებით განსაზღვრულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი:

(1) $(x-1)^2+(y+2)^2 \geq 9$; (2) $1 \leq (x-1)^2+(y+2)^2 \leq 9$;

(3) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2 \leq 25\\(x-4)^2+(y-6)^2 \leq 9\end{cases}$; (4) $\begin{cases}x^2+y^2-4y \leq 0\\|x| \geq 1\end{cases}$;

(5) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y<0\\y<2x\end{cases}$.

11. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის $A(1,2)$ წერტილზე გადის და ეხება წრფეებს:

(1) $x-y+3=0$ და $x-y-1=0$;

(2) $x-2y+2=0$ და $2x+y-2=0$.

12. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის $x-1=0$, $y-1=0$ და $x-y-1=0$ წრფეებს ეხება .

13. შეადგინეთ $x^2+y^2+2x-19=0$ წრეწირისადმი გავლებული იმ მხების განტოლება, რომელიც გადის წერტილზე:

(1) $A(1,1)$; (2) $B(1,4)$; (3) $C(5,2)$.

14. $O(3,-1)$ ცენტრის მქონე წრეწირი $2x-5y+18=0$ წრფეზე 6-ის ტოლი სიგრძის ქორდას ჩამოკვეთს. შეადგინეთ ამ წრეწირის განტოლება.

15. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი რადიუსია $\sqrt{5}$ და $x-2y-1=0$ წრფე მას $A(3,1)$ წერტილში ეხება.

16. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ ის $2x+y-5=0$ და $2x+y+15=0$ პარალელურ წრფეებს ეხება, ამასთან ერთ-ერთს – $A(2,1)$ წერტილში.

17. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც $A(1,0)$ წერტილზე გადის და ეხება ორ პარალელურ $2x+y+2=0$ და $2x+y-18=0$ წრფეთაგან თითოეულს.

18. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, თუ მისი ცენტრი $2x+y=0$ წრფეზე ძევს და ეხება $4x-3y+10=0$ და $4x-3y-30=0$ წრფეებიდან თითოეულს.

19. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც ეხება $7x-y-5=0$ და $x+y+13=0$ ურთიერთგადამკვეთი წრფეებიდან თითოეულს, ამასთან ერთ-ერთს – $A(1,2)$ წერტილში.

20. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და ეხება $x+2y-9=0$ და $2x-y+2=0$ ურთიერთგადამკვეთი წრფეებიდან თითოეულს.

21. შეადგინეთ წრეწირთა განტოლებები, რომელთა ცენტრებიც $4x-5y-3=0$ წრფეზე მდებარეობენ და ეხებიან $2x-3y-10=0$ და $3x-2y+5=0$ წრფეებიდან თითოეულს.

22. შეადგინეთ წრეწირების განტოლებები, რომლებიც ეხებიან $4x-3y-10=0$, $3x-4y-5=0$ და $3x-4y-15=0$ სამი წრფიდან თითოეულს.

23. დაადგინეთ, თუ როგორი მდებარეობა აქვს $A(1,-2)$ წერტილს წრეწირის მიმართ:

(1) $x^2+y^2=1$; (2) $x^2+y^2=5$; (3) $x^2+y^2=9$;

(4) $x^2+y^2-8x-4y-5=0$; (5) $x^2+y^2-10x+8y=0$.

24. შეადგინეთ წრეწირების ცენტრების შემაერთებელი წრფის განტოლება:

(1) $(x-3)^2+y^2=9$ და $(x+2)^2+(y-1)^2=1$;

(2) $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ და $(x+2)^2+(y+5)^2=25$;

(3) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ და $x^2 + y^2 - 6x = 0$;

(4) $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$ და $x^2 + y^2 + 5x + 2y = 1$.

25. შეადგინეთ $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ წრეწირის დიამეტრის განტოლება, თუ ის $5x + 2y - 13 = 0$ წრფის მართობულია.

26. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი:

(1) $A(6,-8)$ წერტილიდან $x^2 + y^2 = 9$ წრეწირამდე;

(2) $A(3,9)$ წერტილიდან $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$ წრეწირამდე;

(3) $A(-7,2)$ წერტილიდან $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$ წრეწირამდე.

27. იპოვეთ $7x - y + 12 = 0$ წრფის $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ წრეწირთან გადაკვეთის წერტილები.

28. გამოარკვიეთ, მოცემული წრფე წრეწირს კვეთს, ეხება თუ არ იკვეთება მასთან:

(1) $y = 2x - 3$ და $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$;

(2) $y = 0{,}5x - 0{,}5$ და $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;

(3) $y = x + 10$ და $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

29. k-ს რა მნიშვნელობისათვის $y = kx$ წრფე $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ წრეწირს: (1) კვეთს; (2) ეხება; (3) არ კვეთს.

30. შეადგინეთ $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 169$ წრეწირის იმ ქორდის განტოლება, რომელიც $A(8{,}5;\ 3{,}5)$ წერტილით შუაზე იყოფა.

31. იპოვეთ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$ წრეწირის იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც $A(1;\ 2)$ წერტილით შუაზე იყოფა.

32. შეადგინეთ წრეწირის განტოლება, რომელიც $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ და $x^2+y^2-6x+12y-35=0$ წრეწირების გადაკვეთის წერტილებზე და $A(1,-1)$ წერტილზე გადის.

33. შეადგინეთ $x^2+y^2+3x-y=0$ და $3x^2+3y^2+2x+y=0$ წრეწირების გადაკვეთის წერტილებზე გავლებული წრფის განტოლება.

34. იპოვეთ $x^2+y^2-10x-10y=0$ და $x^2+y^2+6x+2y-40=0$ წრეწირების სერთო ქორდის სიგრძე.

35. შეადგინეთ $x^2+y^2=5$ წრეწირისადმი $A(-1,2)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება.

36. შეადგინეთ $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ წრეწირისადმი $A(-5,7)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება.

37. დაადგინეთ, თუ რა კუთხით იკვეთებიან $(x-3)^2+(y-1)^2=8$ და $(x-2)^2+(y+2)^2=2$ წრეწირები.

38. დაადგინეთ პირობა იმისა, რომ $(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2=R_1^2$ და $(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2=R_2^2$ წრეწირები მართი კუთხით იკვეთებიან.

39. დაამტკიცეთ, რომ $x^2+y^2-2mx-2ny-m^2+n^2=0$ და $x^2+y^2-2nx+2my+m^2-n^2=0$ წრეწირები მართი კუთხით იკვეთებიან.

40. შეადგინეთ $x^2+y^2=5$ წრეწირისადმი $A(5/3,-5/3)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება.

41. შეადგინეთ $x^2+y^2+2x-19=0$ წრეწირისადმი $A(1,6)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება.

42. იპოვეთ კუთხე $A(4,2)$ წერტილიდან $x^2+y^2=10$ წრეწირისადმი გავლებულ მხებებს შორის.

43. შეადგინეთ $A(2,-3)$ წერტილიდან $(x-1)^2+(y+5)^2=4$ წრეწირისადმი გავლებულ მხებების წრეწირთან შეხების წერტილებზე გავლებული ქორდის განტოლება.

ელიფსი

44. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ:

(1) ფოკუსებს შორის მანძილია 12, ხოლო დიდი ნახევარღერძის სიგრძეა 10;

(2) დიდი ნახევარღერძის სიგრძეა 13, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $5/13$.

45. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ:

(1) მცირე ნახევარღერძიის სიგრძეა $2\sqrt{7}$, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $3/4$;

(2) ნახევარღერძების სიგრძეთა ჯამია 10, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი $4\sqrt{5}$.

46. შემდეგი ელიფსისათვის იპოვეთ ღერძთა სიგრძეები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი:

(1) $4x^2+9y^2=16$; (2) $x^2+4y^2=9$;

(3) $25x^2+36y^2=4$.

47. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ერთ ფოკუსიდან დიდი ღერძის ბოლოებამდე მანძილებია 9 და 3.

48. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ განტოლებით მოცემულ ელიფსზე იპოვეთ წერტილები, რომლებიც მცირე ღერძიდან $\sqrt{7}$-ის ტოლი მანძილით არიან დაშორებულნი.

49. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც 2-ჯერ მეტი მანძილითაა დაშორებული მარცხენა ფოკუსიდან, ვიდრე მარჯვენადან.

50. შეადგინეთ ელიფსის კანონიკური სახის განტოლება, თუ მის დირექტრისებს შორის მანძილია 5, ხოლო ფოკუსებს შორის მანძილი -4.

51. ელიფსის ექსცენტრისიტეტი $2/3$-ის ტოლია. ელიფსის A წერტილის ფოკალური რადიუსია 15. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან ამ ფოკუსის შესაბამის დირექტრისამდე.

52*. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F_1(2,0)$, ამ ფოკუსის შესაბამისი დირექტრისაა $x=8$, ხოლო ექსცენტრისიტეტია $1/2$. იპოვეთ მისი მეორე ფოკუსი და დირექტრისა.

53*. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ფოკუსებია $F_1(1,0)$ და $F_2(0,1)$, ხოლო დიდი ნახევარღერძი 1-ის ტოლია.

54. როგორ არიან განლაგებულნი საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას:

(1) $5x^2+9y^2+30x-18y+9=0$;

(2) $5x^2+9y^2+30x-18y+54=0$;

(3) $y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$;

(4) $x=-2+\sqrt{-5-6y-y^2}$.

55. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი სიმეტრიის ღერძები საკოორდინატო ღერძების პარალელურია და საკოორდინატო ღერძებს ეხება წერტილებში: $A(5,0)$, $B(0,-2)$.

56. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის ორი წვერო $x^2 + 5y^2 = 20$ ელიფსის წვეროებია, ხოლო დარჩენილი ორი წვერო – ელიფსის მცირე ღერძის ბოლოები.

57. იპოვეთ მანძილი $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის მარჯვენა ფოკუსიდან შესაბამის დირექტრისამდე.

58. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ ელიფზე იპოვეთ წერტილები, რომელთა აბსცისაა (-3).

59. შეადგინეთ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ ელიფსის $M(2, -5/3)$ წერტილის შესაბამისი ფოკალური რადიუსების შემცველი წრფეების განტოლებები.

60. იპოვეთ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ელიფსის $M(-4, -2{,}4)$ წერტილის შესაბამისი ფოკალური რადიუსები.

61. იპოვეთ $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ელიფსის წერტილი, საიდანაც მარჯვენა ფოკუსამდე მანძილია 14.

62. იპოვეთ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ ელიფსის წერტილები, საიდანაც მარცხენა ფოკუსამდე მანძილია $2{,}5$.

63. იპოვეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ:

(1) მცირე ღერძი, ფოკუსებიდან, 60°-იანი კუთხით მოჩანს;

(2) ფოკუსებს შორის მანძილი, მცირე ღერძის ბოლოებიდან, მართი კუთხით მოჩანს;

(3) მანძილი დირექტრისებს შორის ფოკუსებს შორის მანძილზე სამჯერ მეტია.

64. დაადგინეთ, ექსცენტრისიტეტის რა მნიშვნელობისათვის იქნება ელიფსის მარჯვენა ფოკუსიდან დიდი ღერძისადმი აღმართული მართობის ელიფსთან გადაკვეთის წერტილისა და ელიფსის ცენტრის შემაერთებელი მონაკვეთი ელიფის მარცხენა და ზედა წვეროების შემაერთებელი მონაკვეთის პარალელური.

65. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, რომლის ღერძებიც საკოორდინატო ღერძების პარალელურია, თუ ის აბსცისთა და ორდინატთა ღერძებს შესაბამისად $A(3,0)$ და $B(0,-4)$ წერტილებში ეხება.

66. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, რომლის ღერძებიც საკოორდინატო ღერძების პარალელურია, თუ ცნობილია, რომ $O(-3,2)$ წერტილი მისი ცენტრია და ის ეხება ორივე საკოორდინატო ღერძს.

67. იპოვეთ $x+2y-7=0$ წრფისა და $x^2+4y^2=25$ ელიფსის გადაკვეთის წერტილები.

68. იპოვეთ $3x+10y-25=0$ წრფისა და $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ ელიფსის გადაკვეთის წერტილები.

69. იპოვეთ $3x-4y-40=0$ წრფისა და $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსის გადაკვეთის წერტილები.

70. გამოარკვიეთ, მოცემული წრფე ელიფსს კვეთს, ეხება თუ არ იკვეთება მასთან:

(1) $2x-y-3=0$ და $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

(2) $2x+y-10=0$ და $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

(3) $3x+2y-20=0$ და $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$.

71. გამოარკვიეთ, $y=-x+m$ წრფე m-ის რა მნიშვნელობისათვის $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსს:

(1) კვეთს; (2) ეხება მას; (3) არ იკვეთება მასთან.

72*. დაადგინეთ პირობა იმისა, რომ $y=kx+m$ წრფე $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ეხება ელიფსს.

73*. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი დიამეტრის ბოლოებზე $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსისადმი გავლებული მხებები ერთმანეთის პარალელურია.

74. შეადგინეთ $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსის იმ მხებთა განტოლებები, რომლებიც $3x+2y+7=0$ წრფის პარალელურია.

75. შეადგინეთ $x^2+4y^2=20$ ელიფსის იმ მხებთა განტოლებები, რომლებიც $2x-2y-13=0$ წრფის მართობულია.

76. იპოვეთ მანძილი $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ ელიფსისადმი $4x-2y+23=0$ წრფის პარალელურად გავლებულ მხებებს შორის.

77. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ ელიფსზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც $2x-3y+25=0$ წრფიდან უმოკლესი მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ ეს მანძილი.

78. შეადგინეთ $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსისადმი გავლებული იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც $A(10/3,5/3)$ წერტილზე გადიან.

79. შეადგინეთ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ელიფსისადმი $A(10,-8)$ წერტილზე გავლებული მხებების ელიფსთან შეხების წერტილების შემაერთებელი ქორდის განტოლება.

80*. შეადგინეთ საკოორდინატო ღერძების პარალელური ღერძების მქონე ელიფსის განტოლება, თუ $3x-2y-20=0$ და $x+6y-20=0$ წრფეები მისი მხებებია.

81*. დაამტკიცეთ, რომ ფოკუსებიდან ელიფსის ნებისმიერ მხებამდე მანძილების ნამრავლი მისი მცირე ნახევარღერძის კვადრატის ტოლია.

82*. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ $F_1(-3,0)$ და $F_1(3,0)$ წერტილები მისი ფოკუსებია, ხოლო $x-y-5=0$ წრფე ეხება მას.

83*. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მისი ფოკუსები კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულნი არიან, მცირე ნახევარღერძია $b=2$ და $3x+10y-25=0$ წრფე მისი მხებია.

84. იპოვეთ $x^2+9y^2=45$ და $x^2+9y^2-6x-27=0$ ელიფსების გადაკვეთის წერტილები.

ჰიპერბოლა

85. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$ ჰიპერბოლისათვის დაადგინეთ:

(1) ნახევარღერძები, (2) ფოკუსები, (3) ექსცენტრისიტეტი, (4) ასიმპტოტები, (5) დირექტრისები.

86. $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{64}=1$ ჰიპერბოლისათვის დაადგინეთ:

(1) ნახევარღერძები, (2) ფოკუსები,

(3) ექსცენტრისიტეტი, (4) ასიმპტოტები, (5) დირექტრისები.

87*. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსებიც კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულად ორდინატთა ღერძზე ძევს, თუ: (1) ფოკუსებს შორის მანძილია $2c=12$ და ექსცენტრისიტეტი $6/5$; (2) ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{3}{4}x$ და დირექტრისებს შორის მანძილი $7\frac{1}{5}$; (3) ასიმპტოტების განტოლებებია $y=\pm\frac{2}{3}x$ და $A(4{,}5;\ \sqrt{13})$ წერტილი მასზე დევს.

88. იპოვეთ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ჰიპერბოლის $A(-5;\ 9/4)$ წერტილის ფოკალური რადიუსები.

89. როგორ არიან განლაგებულნი საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას:

(1) $5x^2-9y^2-30x+18y-9=0$;

(2) $16x^2-25y^2+32x-100y+84=0$;

(3) $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x+5}$;

(4) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$.

90*. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ:

(1) წვეროებს შორის მანძილია 24, ხოლო ფოკუსებია $F_1(-10,2)$ და $F_2(16,2)$;

(2) დირექტრისებს შორის მანძილია 4 და ფოკუსები $F_1(2,3)$ და $F_2(-2,-3)$;

(3) ექსცენტრისიტეტია $\varepsilon = 4/3$, $F(4,0)$ ფოკუსის შესაბამისი დირექტრისაა $4x-9=0$;

(4) ექსცენტრისიტეტია $\varepsilon = 5/4$, $F(0,5)$ ფოკუსის შესაბამისი დირექტრისაა $5y-16=0$.

91*. შეადგინეთ ტოლფერდა (ნახევარღერძების სიგრძეები ერთმანეთის ტოლია) ჰიპერბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(2,0)$ და ასიმპტოტი $x=1$.

92. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ ის $M(-5,3)$ წერტილზე გადის და მისი ექსცენტრისიტეტია $\sqrt{2}$.

93. შეადგინეთ $\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$ ჰიპერბოლის $M(10,-\sqrt{5})$ წერტილის ფოკალური რადიუსების შემცველი წრფეების განტოლებები.

94. იპოვთ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ჰიპერბოლის $M(-5,9/4)$ წერტილის ფოკალური რადიუსები.

95. ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტია $3/2$, დირექტრისა $x=-8$. იპოვეთ მანძილი ჰიპერბოლის 10-ის ტოლი აბსცისის მქონე წერტილიდან მოცემული დირექტრისის შესაბამის ფოკუსამდე.

96. იპოვეთ $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ ჰიპერბოლის ის წერტილები, რომლებიც მარჯვენა ფოკუსიდან $4,5$-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული.

97. იპოვეთ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ჰიპერბოლის ის წერტილები, რომლებიც მარცხენა ფოკუსიდან 7-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული.

98. იპოვეთ $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ ჰიპერბოლის მარცხენა ფოკუსიდან მისი ღერძისადმი აღმართული მართობის ჰიპერბოლასთან გადაკვეთის წერტილებიდან ფოკუსებამდე მანძილები.

99. განსაზღვრეთ ტოლფერდა ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი.

100. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსები ემთხვევა $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსის ფოკუსებს და ექსცენტრისიტეტია $\varepsilon=2$.

101. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსები ემთხვევა $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ელიფსის წვეროებს, ხოლო დირექტრისები ელიფსის ფოკუსებზე გადის.

102*. აჩვენეთ, რომ მანძილი $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ფოკუსიდან მის ასიმპტოტამდე b-ის ტოლია.

103*. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან მის ორ ასიმპტოტამდე მანძილების ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა და უდრის $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

104*. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის ასიმპტოტებითა და მისი ნებისმიერი წერტილიდან ასიმპტოტების პარალელურად გავლებული წრფეებით შემოსაზღვრული პარა-

ლელოგრამის ფართობი მუდმივი სიდიდეა და $\frac{ab}{2}$-ის ტოლია.

105. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული განტოლებებიდან თითოეული განსაზღვრავს ჰიპერბოლას. იპოვეთ მისი ცენტრის კოორდინატები, ნახევარღერძები, ექსცენტრისიტეტი და შეადგინეთ ასიმპტოტებისა და დირექტრისების განტოლებები:

(1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

(2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

106*. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ მისი ექსცენტრისიტეტია $\varepsilon = 5/4$, ფოკუსია $F(5,0)$ და შესაბამისი დირექტრისის განტოლებაა $5x - 16 = 0$.

107*. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ მისი ექსცენტრისიტეტია $\varepsilon = 13/12$, ფოკუსია $F(0,13)$ და შესაბამისი დირექტრისის განტოლებაა $13y - 144 = 0$.

108*. შეადგინეთ $x^2 - y^2 = a^2$ ტოლფერდა ჰიპერბოლის განტოლება ახალ საკოორდინატო სისტემაში, თუ ახალი საკოორდინატო სისტემის ღერძები მისი ასიმპტოტებია.

109*. დაადგინეთ, ქვემოთ მოცემული განტოლებებიდან რომელი შეესაბამება ჰიპერბოლას. იპოვეთ მისი ცენტრი, ნახევარღერძები და შეადგინეთ ასიმპტოტების განტოლებები:

(1) $xy = 18$; (2) $2xy - 9 = 0$; (3) $3xy + 25 = 0$.

110. იპოვეთ $2x - y = 10$ წრფისა და $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილები.

111. იპოვეთ $4x - 3y - 16 = 0$ წრფისა და $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილები.

112. გამოარკვიეთ წრფისა და ჰიპერბოლის ურთიერთმდებარეობა – იკვეთებიან, არ იკვეთებიან თუ წრფე მხებს წარმოადგენს:

(1) $x-y-3=0$ და $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$;

(2) $x-2y+1=0$ და $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$;

(3) $7x-5y=0$ და $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

113. იპოვეთ m-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=2{,}5x+m$ წრფე $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ პარაბოლას:

(1) კვეთს; (2) ეხება მას; (3) არ იკვეთება მასთან.

114*. დაადგინეთ პირობა იმისა, რომ $y=kx+m$ წრფე $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლას ეხება.

115*. დაამტკიცეთ, რომ ჰიპერბოლის დიამეტრის ბოლოებზე გავლებული მხები წრფეები ერთმანეთის პარალელურია.

116. შეადგინეთ $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ ჰიპერბოლისადმი გავლებული იმ მხების განტოლება, რომელიც $4x+3y-7=0$ წრფის მართობულია.

117. შეადგინეთ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ ჰიპერბოლისადმი გავლებული იმ მხების განტოლება, რომელიც $10x-3y+9=0$ წრფის პარალელურია.

118. შეადგინეთ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$ ჰიპერბოლისადმი $2x+4y-5=0$ წრფის პარალელური მხებების განტოლებები და გამოთვალეთ მანძილი მათ შორის.

119. $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ ჰიპერბოლაზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც $3x+2y+1=0$ წრფიდან უმოკლესი მანძილითაა დაშორებული. გამოთვალეთ ეს მანძილი.

120. შეადგინეთ $A(-1,-7)$ წერტილიდან გამოსული $x^2-y^2=16$ ჰიპერბოლის მხების განტოლება.

121. შეადგინეთ $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$ ჰიპერბოლისადმი $A(1,-10)$ წერტილიდან გავლებული მხებების მასთან შეხების წერტილების შემაერთებელი ქორდის განტოლება.

122. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, რომელიც $A(\sqrt{6},3)$ წერტილზე გადის და ეხება $9x+2y-15=0$ წრფეს (ჰიპერბოლის ღერძები საკოორდინატო ღერძებს ემთხვევა).

123. შეადგინეთ ჰიპერბოლის განტოლება, რომელიც $5x-6y-16=0$ და $13x-10y-48=0$ წრფეებს ეხება (ჰიპერბოლის ღერძები საკოორდინატო ღერძებს ემთხვევა).

124*. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ელიფსისა და $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილები მართკუთხედის წვეროებს წარმოადგენენ. შეადგინეთ მისი გვერდების განტოლებები.

125*. აჩვენეთ, რომ ჰიპერბოლის ფოკუსები მისი ნებისმიერი მხები წრფის სხვადასხვა მხარეზე მდებარეობენ.

126.** აჩვენეთ, რომ ჰიპერბოლის ფოკუსებიდან მის ნებისმიერ მხებამდე მანძილების ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა და b^2-ის ტოლია.

127. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური სახის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(3,0)$ და $2x-y-4=0$ წრფე ეხება მას.

128. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური სახის განტოლება, თუ ცნობილია, რომ $15x+16y-36=0$ წრფე ეხება მას და მისი დიდი ღერძია $2a=8$.

129*. დაამტკიცეთ, რომ ჰიპერბოლის რაიმე M წერტილში გავლებული მხები წრფე F_1M და F_2M ფოკალურ რადიუსებთან ტოლი სიდიდის კუთხეებს ადგენს და F_1MF_2 კუთხის შიგნით გადის.

პარაბოლა

130. იპოვეთ $y^2=24x$ პარაბოლის ფოკუსი და შეადგინეთ მისი დირექტრისის განტოლება.

131. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(-7,0)$ წერტილი და დირექტრისის განტოლებაა $x-7=0$.

132. შედგინეთ პარაბოლის განტოლება, რომელიც: (1) სიმეტრიულია აბსცისთა ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სისტემის სათავეზე და $A(1,-4)$ წერტილზე; (2) სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, ფოკუსი $F(0,2)$ წერტილშია მოთავსებული და წვერო კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა.

133. შეადგინეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელიც: (1) სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, გადის კოორდინატთა სათავეზე და $A(6,-2)$ წერტილზე; (2) სიმეტრიულია აბსცისთა ღერძის მიმართ, ფოკუსი $F(3,0)$ წერტილშია მოთავსებული და წვერო კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა.

134. $y^2=4{,}5x$ პარაბოლის M წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილია $9{,}125$. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე.

135. იპოვეთ წრფისა და პარაბოლის გადაკვეთის წერტილები:

(1) $x+y-3=0$, $y^2=4x$;

(2) $3x+4y-12=0$, $y^2=-9x$;

(3) $3x-2y+6=0$, $y^2=-6x$.

136*. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(-3,1)$, ხოლო დირექტრისა $y+7=0$.

137. შეადგინეთ $y^2=6x$ პარაბოლისადმი $A(4,5)$ წერტილიდან გავლებული მხებების განტოლებები.

138*. დაადგინეთ პირობა იმისა, რომ $y=kx+b$ წრფე $y^2=2px$ პარაბოლას ეხება.

139*. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, რომლის წვეროა $A(1,-2)$ და: (1) სიმეტრიულია $x-1=0$ წრფის მიმართ და გადის წერტილზე $B(2,0)$; (2) სიმეტრიულია $y+2=0$ წრფის მიმართ და გადის წერტილზე $B(2,0)$.

140. ჰორიზონტის მიმართ მახვილი კუთხით გასროლილი ქვა, მოძრაობს რა პარაბოლაზე, საწყისი მდებარეობიდან 24-ის ტოლ მანძილზე დაეცა. გამოთვალეთ პარაბოლის პარამეტრი, თუ დედამიწის ზედაპირიდან ქვის მიერ მიღწეული მაქსიმალური სიმაღლეა 6.

141. იპოვეთ პარაბოლის წვერო, პარამეტრი და ღერძის მიმართულება, თუ მისი განტოლებაა:

(1) $y^2+10x+2y-9=0$;

(2) $y^2+6x+14y+43=0$;

(3) $y^2+8x+16=0$; (4) $y=x^2-6x$.

142. როგორ არიან განლაგებულნი საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილები, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ პირობას:

(1) $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \le 1 \\ x^2 > 2(y-1) \end{cases}$; (2) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(x-1)^2}{9} > 1 \\ (y-1)^2 < 4(x-1) \end{cases}$.

143*. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, რომლის ფოკუსია $F(0,-3)$, გადის კოორდინატთა სათავეზე და მისი სიმეტრიის ღერძია ორდინატთა ღერძი.

144. იპოვეთ $y^2 = 20x$ პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის აბსცისაა 7.

145. იპოვეთ $y^2 = 12x$ პარაბოლის იმ წერტილის ფოკალური რადიუსი, რომლის ორდინატაა 6.

146. იპოვეთ $y^2 = 16x$ პარაბოლის ის წერტილი, რომლის ფოკალური რადიუსია 13.

147. შეადგინეთ პარაბოლის განტოლება, თუ მისი ფოკუსია $F(-7,0)$ და დირექტრისის განტოლება $x-7=0$.

148. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული თითოეული განტოლება განსაზღვრავს პარაბოლას. იპოვეთ მისი წვერო, პარამეტრი და შეადგინეთ დირექტრისის განტოლება:

(1) $y^2 = 4x - 8$; (2) $y^2 = 4 - 6x$;

(3) $x^2 = 6y + 2$; (4) $x^2 = 2 - y$.

149. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული თითოეული განტოლება განსაზღვრავს პარაბოლას. იპოვეთ მისი წვერო და პარამეტრი:

(1) $y = \dfrac{1}{4}x^2 + x + 2$; (2) $y = 4x^2 - 8x + 7$;

(3) $y = -\dfrac{1}{6}x^2 + 2x - 7$.

150. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული თითოეული განტოლება განსაზღვრავს პარაბოლას. იპოვეთ მისი წვერო და პარამეტრი:

(1) $x = 2y^2 - 12y + 14$;

(2) $x = \frac{1}{4}y^2 + y$;

(3) $x = -y^2 + 2y - 1$.

151. იპოვეთ $x + y - 3 = 0$ წრფისა და $x^2 = 4y$ პარაბოლის გადაკვეთის წერტილები.

152. იპოვეთ $3x + 4y - 12 = 0$ წრფისა და $y^2 = -9x$ პარაბოლის გადაკვეთის წერტილები.

153. იპოვეთ $3x - 2y + 6 = 0$ წრფისა და $y^2 = 6x$ პარაბოლის გადაკვეთის წერტილები.

154. გამოარკვიეთ, როგორი ურთიერთმდებარეობა აქვთ პარაბოლასა და წრფეს: წრფე კვეთს პარაბოლას; წრფე ეხება პარაბოლას; წრფე არ კვეთს პარაბოლას:

(1) $x - y + 2 = 0$ და $y^2 = 8x$;

(2) $8x + 3y - 15 = 0$ და $x^2 = -3y$;

(3) $5x - y - 15 = 0$ და $y^2 = -5x$.

155. იპოვეთ k პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y = kx + 2$ წრფე $y^2 = 4x$ პარაბოლას: (1) კვეთს; (2) ეხება მას; (3) არ კვეთს.

156*. დაადგინეთ პირობა იმისა, რომ $y = kx + b$ წრფე $y^2 = 2px$ პარაბოლას ეხება.

157*. დაამტკიცეთ, რომ $y^2 = 2px$ პარაბოლისადმი გაივლება ერთადერთი მხები, რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $k \neq 0$.

158. შეადგინეთ $y^2 = 8x$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც $2x + 2y - 3 = 0$ წრფის პარალელურია.

159. შეადგინეთ $x^2 = 16y$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც $2x + 4y + 7 = 0$ წრფის მართობულია.

160. შეადგინეთ $y^2 = 12x$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც $3x - 2y + 30 = 0$ წრფის პარალელურია. იპოვეთ მანძილი მხებსა და მოცემულ წრფეს შორის.

161. $y^2 = 64x$ პარაბოლაზე იპოვეთ წერტილი, რომელიც უმოკლესი მანძილითაა დაშორებული $4x + 3y - 14 = 0$ წრფიდან. იპოვეთ ეს მანძილი.

162. შეადგინეთ $A(2,9)$ წერტილიდან $y^2 = 36x$ პარაბოლისადმი გავლებული მხებების განტოლებები.

163. შეადგინეთ $A(5,9)$ წერტილიდან $y^2 = 5x$ პარაბოლისადმი გავლებული მხებების მასთან შეხების წერტილების შემაერთებელი ქორდის განტოლება.

164. $P(-3,12)$ წერტილიდან $y^2 = 10x$ პარაბოლისადმი გავლებულია მხებები. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან შეხების წერტილების შემაერთებელ ქორდამდე.

165. იპოვეთ $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ ელიფსისა და $y^2 = 24x$ პარაბოლის გადაკვეთის წერტილები.

166. იპოვეთ $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ ჰიპერბოლის და $y^2 = 3x$ პარაბოლის გადაკვეთის წერტილები.

167. იპოვეთ $y = x^2 - 2x + 1$ და $x = y^2 - 6y + 7$ პარაბოლების გადაკვეთის წერტილები.

168*. $y^2 = 25x$ პარაბოლის ფოკუსიდან გამოსული სინათლის სხივი, რომელიც აბსცისთა ღერძთან α მახვილ კუთხის ადგენს, პარაბოლასთან გადაკვეთის წერტილში მისადმი აირეკლება. შეადგინეთ არეკლილი სხივის შემცველი წრფის განტოლება, თუ $tg\alpha = 3/4$.

169*. დაამტკიცეთ, რომ საერთო ღერძისა და ფოკუსის მქონე ორი პარაბოლა მართი კუთხით იკვეთება, თუ ფოკუსი მათ წვეროებს შორისაა მოქცეული.

პასუხები

1. $(x-1)^2+(y+2)^2=50$;

2. (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$; (2) $(x+1)^2+(y+3)^2=10$;

(3) $(x-2)^2+(y+1)^2=5$; (4) $(x+3)^2+(y-4)^2=25$;

3. $(x-3)^2+(y-5)^2=25$; **4.** $5x+2y-7=0$;

5. (1) $2x-5y+16=0$; (2) $5x+y-34=0$;

(3) $3x+4y-27=0$; **6.** $3x-4y-41=0$;

7. $(x-2)^2+(y-3)^2=8$; **8.** $(x-2)^2+(y+3)^2=1{,}44$;

9. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$, $(x-10)^2+(y-10)^2=100$;

11. (1) $x^2+(y-1)^2=2$, $(x-2)^2+(y-3)^2=2$;

(2) $(x-1{,}4)^2+(y-4{,}2)^2=5$, $(x-0{,}6)^2+(y-1{,}8)^2=0{,}2$;

12. $(x-1-1/\sqrt{2})^2+(y-1-1/\sqrt{2})^2=0{,}5$,

$(x-1+1/\sqrt{2})^2+(y-1+1/\sqrt{2})^2=0{,}5$,

$$\left(x-\frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{(2+\sqrt{2})^2},$$

$$\left(x-\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{(2-\sqrt{2})^2};$$

13. (1) არ გაივლება; (2) $x+2y-9=0$; (3) $x+2y-9=0$ და $2x-y-8=0$;

14. $(x-3)^2+(y+1)^2=38$; **15.** $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ და $(x-2)^2+(y-3)^2=5$;

16. $(x+2)^2+(y+1)^2=20$; **17.** $(x-5)^2+(y+2)^2=20$ და $(x-9/5)^2+(y-22/5)^2=20$;

18. $(x-1)^2+(y+2)^2=16$; **19.** $(x+6)^2+(y-3)^2=50$ და $(x-29)^2+(y+2)^2=800$;

20. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ და $(x-22/5)^2+(y+31/5)^2=289/5$;

21. $(x-2)^2+(y-1)^2=81/13$ და $(x+8)^2+(y+7)^2=25/13$;

22. $(x+10/7)^2+(y+25/7)^2=1$ და $(x-30/7)^2+(y-5/7)^2=1$;

23. (1) წრეწირის გარეთ; (2) წრეწირზე; (3) წრეწირის შიგნით; (4) წრეწირზე; (5) წრეწირის შიგნით;

24. (1) $x+5y-3=0$; (2) $x+2=0$; (3) $3x-y-9=0$; (4) $y+1=0$;

25. $2x-5y+19=0$;

26. (1) 7; (2) 17; (3) 2;

27. $A(-1,5)$ და $B(-2,-2)$;

28. (1) კვეთს წრეწირს; (2) ეხება წრეწირს; (3) არ კვეთს წრეწირს;

29. (1) $|k|<0,75$; (2) $k=\pm 0,75$; (3) $|k|>0,75$;

30. $11x-7y-69=0$; **31.** $2\sqrt{5}$;

32. $x^2+y^2+6x-9y-17=0$; **33.** $7x-4y=0$; **34.** 10;

35. $x-2y+5=0$; **36.** $3x-4y+43=0$; **37.** 90°;

38. $(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2=R_1^2+R_2^2$;

40. $x-2y-5=0$ და $2x-y-5=0$;

41. $2x+y-8=0$ და $x-2y+11=0$;

42. 90°; **43.** $x+2y+5=0$;

44. (1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; (2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$;

45. (1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$; (2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$;

46. (1) $a=2,\ b=4/3,\ e=\sqrt{5}/3$; (2) $a=3,\ b=3/2,\ e=\sqrt{3}/2$;

(3) $a=1/3,\ b=2/5,\ e=\sqrt{11}/45$;

47. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$; **48.** $M(\pm 4;\pm 2{,}25)$;

50. $\frac{x^2}{5}+y^2=1$; **51.** $22{,}5$;

52. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\ F(-2,0),\ x=-8$;

53. $3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0$;

54. (1) ელიფსი $5(x+3)^2+9(y-1)^2=45$;

(2) წერტილი $M(-3,1)$;

(3) ნახევარელიფსი $16(x+3)^2+9(y-1)^2=144,\ y\le 1$;

(4) ნახევარწრეწირი $(x+2)^2+(y+3)^2=4,\ x\ge -2$;

55. $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$; **56.** 16; **57.** b^2/c;

58. $A(-3,-8/5),\ B(-3,\ 8/5)$; **59.** $5x+12y+10=0,\ x-2=0$;

60. $r_1=2{,}6$ და $r_2=7{,}4$; **61.** $A(-5,\ 3\sqrt{3}),\ B(-5,\ -3\sqrt{3})$;

62. $A(-2,\ \sqrt{21}/2),\ B(-2,\ -\sqrt{21}/2)$;

63. (1) $\sqrt{3}/2$; (2) $\sqrt{2}/2$; (3) $\sqrt{3}/3$; **64.** $\varepsilon=\sqrt{2}/2$;

65. $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$; **66.** $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$;

67. $A(4,\ 3/3)$, $B(3,\ 2)$; **68.** $A(3,\ 8/5)$, წრფე ეხება ელიფსს;

69. წრფე ელიფსს არ კვეთს;

70. (1) წრფე და ელიფსი იკვეთებიან; (2) წრფე და ელიფსი არ იკვეთებიან; (3) წრფე ეხება ელიფსს;

71. (1) $|m|<5$-თვის, წრფე და ელიფსი იკვეთებიან;

(2) $m=\pm 5$-თვის, წრფე ეხება ელიფსს;

(3) $|m|>5$-თვის, წრფე და ელიფსი არ იკვეთებიან;

72. $k^2a^2+b^2=m^2$; **74.** $3x+2y-10=0$ და $3x+2y+10=0$;

75. $x+y-5=0$ და $x+y+5=0$;

76. $d=24\sqrt{5}/5$; **77.** $A(-3,\ 2)$, $d=\sqrt{13}$;

78. $x+y-5=0$ და $x+4y-10=0$; **79.** $4x-5y-10=0$;

80. $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$; **82.** $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$; **83.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$;

84. $A(3,\ 2)$, $B(3,\ -2)$;

85. (1) $a=5,\ b=12$; (2) $F_1(13,0),\ F_2(-13,0)$; (3) $\varepsilon=13/5$;

(4) $y=\frac{12}{5}x,\ y=-\frac{12}{5}x$; (5) $x=\frac{25}{13},\ x=-\frac{25}{13}$;

86. (1) $a=15,\ b=8$; (2) $F_1(0,17),\ F_2(0,-17)$; (3) $\varepsilon=17/8$;

(4) $y=\frac{8}{25}x,\ y=-\frac{8}{25}x$; (5) $y=\frac{64}{17},\ y=-\frac{64}{17}$;

87. (1) $-\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{25}=1$; (2) $-\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$; (3) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

88. $r_1=2\frac{1}{4},\ r_2=10\frac{1}{4}$;

89. (1), (2) ჰიპერბოლა; (3), (4) ჰიპერბოლის შტო;

90. (1) $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$;

(2) $(2\sqrt{13}-4)x^2+(2\sqrt{13}-9)y^2-12xy+26\sqrt{13}-52=0$;

(3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$; (4) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$;

91. $(x-1)(y+1)=0{,}5$ და $(x-1)(y-1)=-0{,}5$;

92. $x^2-y^2=16$. **93.** $x-4\sqrt{5}y+10=0$ და $x-10=0$;

94. $r_1=2{,}25$, $r_2=10{,}25$. **95.** 27. **96.** $A(10;\,4{,}5)$ და $B(10;\,-4{,}5)$. **97.** $A(-6;\,4\sqrt{3})$ და $A(-6;\,-4\sqrt{3})$;

98. $25/12$ და $53/12$; **99.** $\varepsilon=\sqrt{2}$; **100.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$;

101. $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$; **105.** (1) $O(2,-3)$, $a=3$, $b=4$, $\varepsilon=5/3$, დირექტრისები: $5x-1=0$ და $5x-19=0$, ასიმპტოტები: $4x-3y-17=0$ და $4x+3y+1=0$; (2) $O(-5,1)$, $a=8$, $b=6$, $\varepsilon=1{,}25$, დირექტრისები: $x=-11{,}4$ და $x=1{,}4$, ასიმპტოტები: $3x+4y+11=0$ და $3x-4y+19=0$; **106.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$;

107. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$; **108.** $xy=\frac{a^2}{2}$ – ძველი სისტემის ღერძების (-45°)-ზე მობრუნებისას და $xy=-\frac{a^2}{2}$ – ძველი სისტემის ღერძების (45°)-ზე მობრუნებისას. **109.** (1) $O(0,0)$, $a=b=6$, ასიმპტოტები: $x=0$ და $y=0$; (2) $O(0,0)$, $a=b=3$, ასიმპტოტები: $x=0$ და $y=0$; (3) $O(0,0)$, $a=b=5$, ასიმპტოტები: $x=0$ და $y=0$. **110.** $A(6;\,2)$ და $B(14/3;\,-2/3)$;

111. $A(25/4;\,3)$, წრფე ეხება ჰიპერბოლას;

112. (1) წრფე ეხება ჰიპრბოლას; (2) წრფე ჰიპერბოლას ორ წერტილში კვეთს; (3) წრფე და ჰიპერბოლა ერთმანეთს არ კვეთს;

113. (1) $|m|>4{,}5$ -თვის წრფე კვეთს ჰიპერბოლას;

(2) $m=\pm 4{,}5$ -თვის წრფე ეხება ჰიპერბოლას;

(3) $|m|<4{,}5$ -თვის წრფე და ჰიპერბოლა არ იკვეთებიან;

114. $k^2a^2-b^2=m^2$; **116.** $3x-4y-10=0$, $3x-4y+10=0$;

117. $10x-3y-32=0$, $10x-3y+32=0$; **118.** $x+2y-4=0$,

$x+2y+4=0$, $d=8/\sqrt{5}$; **119.** $M(-6,3)$, $d=11/\sqrt{13}$;

120. $5x-3y-16=0$, $13x+5y+48=0$; **121.** $2x+5y-16=0$;

122. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{45}=1$, $\frac{3x^2}{10}-\frac{4y^2}{45}=1$; **123.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$;

124. $x=-4$, $x=4$, $y=-1$ და $y=1$; **127.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$;

128. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; **130.** $F(6,0)$, $x=-6$;

131. $y^2=-28x$; **132.** (1) $y^2=16x$; (2) $x^2=8y$;

133. (1) $x^2=-18y$; (2) $y^2=12x$; **134.** 10;

135. (1) $(-6,9)$, $(2,1)$; (2) $(-4,6)$; (3) არ იკვეთებიან;

136. $(x+3)^2=16(y+3)^2$; **137.** $3x-4y+8=0$ და

$x-2y+6=0$; **138.** $p=2bk$; **139.** (1) $(x-1)^2=\frac{1}{2}(y+2)$;

(2) $(y+2)^2=4(x-1)$; **140.** 12;

141. (1) $(0{,}1\ ;-1)$, $p=-5$, ღერძი აბსცისთა ღერძის თანამიმართულია; (2) $(1\ ,-7)$, $p=-3$, ღერძი აბსცისთა ღერძის თანამიმართულია; (3) $(-2,0)$, $p=-4$, ღერძის მიმართულება ემთხვევა აბსცისთა ღერძის უარყოფით მიმართულებას;

(4) $(3,-9)$, $p=1/2$, ღერძი ორდინატთა ღერძის თანამი-
მართულია. **143.** $x^2=-12y$; **144.** 12; **145.** 6; **146.** $A(9,12)$,
$B(9,-12)$; **147.** $y^2=-28x$;
148. (1) $A(2,0)$, $p=2$, $x-1=0$; (2) $A(2/3,0)$, $p=3$,
$6x-13=0$; (3) $A(0,-1/3)$, $p=3$, $6x+11=0$; (4) $A(0,2)$,
$p=1/2$, $4y-9=0$; **149.** (1) $A(-2,1)$, $p=2$; (2) $A(1,3)$,
$p=1/8$; (3) $A(6,-1)$, $p=3$; **150.** (1) $A(-4,3)$, $p=1/4$;
(2) $A(1,2)$, $p=2$; (3) $A(0,1)$, $p=1/2$;
151. $A(2,1)$, $B(-6,9)$; **152.** $A(-4,6)$, წრფე ეხება პარაბოლას;
153. წრფე და პარაბოლა არ იკვეთებიან;
154. (1) ეხება პარაბოლას; (2) პარაბოლას ორ წერტილში კვეთს;
(3) პარაბოლას არ კვეთს; **155.** (1) $k<1/2$; (2) $k=1/2$;
(3) $k>1/2$; **156.** $p=2bk$; **158.** $x+y+2=0$;
159*. $2x-y-16=0$; **160.** $d=2\sqrt{13}$; **161.** $A(9,-24)$, $d=10$;
162. $3x-y+3=0$ და $3x-2y+12=0$; **163.** $5x-18y+25=0$;
164. $d=174/13$; **165.** $A(6,12)$ და $B(6,-12)$; **166.** $A(10,\sqrt{30})$,
$B(10,-\sqrt{30})$, $C(2,\sqrt{6})$, $D(2,-\sqrt{6})$; **167.** $A(2,1)$, $B(-1,4)$,
$C((3+\sqrt{13})/2,(7+\sqrt{13})/2)$, $D((3-\sqrt{13})/2,(7-\sqrt{13})/2)$;
168. $y-18=0$.

§7. გეომეტრიული გარდაქმნები

სიბრტყის გარდაქმნა: პარალელური გადატანა. ღერძული სიმეტრია. ცენტრული სიმეტრია. მობრუნება

სიბრტყის გარდაქმნას, რომლის დროსაც მისი ყოველი წერტილი ერთი და იმავე მიმართულებით ერთსა და იმავე მანძილზე გადაადგილდება, სიბრტყის **პარალელური გადატანა** ეწოდება. თუ $\vec{a} = (p, q)$ ვექტორის გასწვრივ $\mathrm{T}_{\vec{a}}$ პარალელური გადატანის დროს $A(x, y)$ წერტილი $A'(x', y')$ წერტილზე აისახება, მაშინ:

$$x' = x + p$$
$$y' = y + q$$

პარალელურ გადატანას უძრავი წერტილი არ აქვს.

სიბრტყის გარდამნას, რომლის დროსაც სიბრტყის ყოველი A წერტილი ამავე სიბრტყის რაიმე l ღერძის მიმართ სიმეტრიულ A' წერტილზე აისახება, **ღერძული სიმეტრია** ეწოდება.

თუ $A(x, y)$ და $A'(x', y')$ წერტილები სიმეტრიულები არიან:

OX ღერძის მიმართ, მაშინ

$$x' = x$$
$$y' = -y$$

OY ღერძის მიმართ, მაშინ

$$x' = -x$$
$$y' = y$$

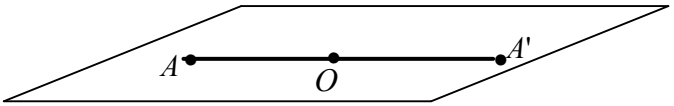
$y = kx + b$ განტოლებით მოცემული წრფის მიმართ, მაშინ

$$x' = \frac{1-k^2}{1+k^2} \cdot x$$

$$y' = \frac{2}{1+k^2} \cdot x + y \cdot$$

ღერძული სიმეტრიის დროს ღერძის წერტილები უძრავნი არიან. ასევე უძრავნი იქნებიან სიმეტრიის ღერძის მართობული წრფეები.

გარდაქმნას, რომელიც სიბრტყის ყოველი A წერტილს შეუსაბამებს ისეთ A' წერტილს, რომ სიბრტყის რაიმე O წერტილზე გავლებული AA' მონაკვეთი ამ წერტილით შუაზე იყოფა



ეწოდება **ცენტრული სიმეტრია** ცენტრით O.

თუ $A(x,y)$ და $A'(x',y')$ წერტილები სიმეტრიულები არიან:

O კოორდინატთა სათავის მიმართ, მაშინ

$$x' = -x$$

$$y' = -y \ ,$$

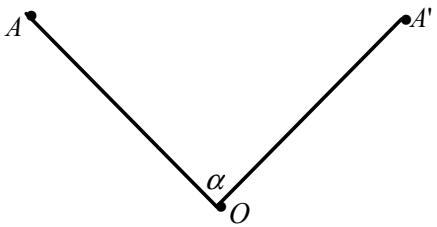
$O(a,b)$ წერტილის მიმართ, მაშინ

$$x' = -x + 2a$$

$$y' = -y + 2b \ .$$

ცენტრული სიმეტრიის ცენტრი მისი უძრავი წერტილია. სხვა უძრავი წერტილები ამ გარდაქმნას არ აქვს.

სიბრტყის R_O^{α} გარდაქმნას, რომლის დროსაც მისი ყოველი A წერტილი მოცემული O წერტილის გარშემო საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ერთსა და იმავე α კუთხეზე მობრუნდება, O ცენტრის გარშემო **მობრუნება** ეწოდება.



თუ $A'(x', y')$ წერტილი $A(x, y)$ წერტილისაგან მისი α კუთხეზე მობრუნებით მიიღება:

ა) კოორდინატთა სათავის გარშემო, მაშინ

$$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$
$$y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha;$$

ბ) $O(a, b)$ წერტილის გარშემო, მაშინ

$$x' = (x - a) \cdot \cos\alpha - (y - b) \cdot \sin\alpha$$
$$y' = (x - a) \cdot \sin\alpha + (y - b) \cdot \cos\alpha.$$

სავარჯიშო ამოცანები

1. პარალელური გადატანის დროს $A(1, 1)$ წერტილი $B(-1, 0)$ წერტილში გადადის. რომელ წერტილში გადავა კოორდინატთა სათავე?

2. იპოვეთ $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ წრეწირის ანასახი $\vec{a} = (2,-3)$ ვექტორის გასწვრივ პარალელური გადატანისას.

3. იპოვეთ, $\vec{a} = (5,6)$ ვექტორის გასწვრივ პარალელური გადატანისას, $4x - 3y - 2 = 0$ წრფის ანასახისა და $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ წრეწირის გადაკვეთის წერტილები.

4. აჩვენეთ, რომ $\angle ACB$ კუთხის სიდიდე არ შეიცვლება მისი $\vec{a} = (1,-2)$ ვექტორის გასწვრივ პარალელური გადატანის დროს, სადაც $A(0, 1)$, $B(3,-2)$ და $C(2,-3)$.

5. იპოვეთ $A(2,-3)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილები აბსცისთა და ორდინატთა ღერძების მიმართ.

6. იპოვეთ $A(5,-1)$ და $B(3,-2)$ წერტილებით განსაზღვრული მონაკვეთის აბსცისთა ღერძის მიმართ სიმეტრიული მონაკვეთის ბოლოები.

7. იპოვეთ $M(4,-2)$ წერტილის, აბსცისთა და ორდინატთა ღერძების მიმართ სიმეტრიულ წერტილებს შორის მანძილი.

8. იპოვეთ $O(6, 3)$ წერტილის მიმართ ABC სამკუთხედის სიმეტრიული სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები, თუ $A(2,1)$, $B(5,1)$ და $C(2,5)$.

9. იპოვეთ წერტილი, რომლის მიმართაც სიმეტრიულები არიან $A(6,-4)$ და $B(1,-2)$ წერტილები.

10. იპოვეთ სიმეტრიის ცენტრის კოორდინატები, თუ მას $M(1,\ 2,-4)$ წერტილი $M'(3,4,-6)$ წერტილში გადაჰყავს.

11. დაადგინეთ A წერტილის კოორდინატები, თუ ის $B(2,6,-8)$ წერტილის ანასახია, $O(1,0,1)$ სიმეტრიის ცენტრის მქონე ცენტრული სიმეტრიის დროს.

12. იპოვეთ $P(1,-1,2)$ წერტილის ანასახი ცენტრალური სიმეტრიის დროს იმ წერტილის მიმართ, რომელიც წარმოადგენს $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$ და $2x-3y+2z-9=0$ სიბრტყეების გადაკვეთის წერტილს.

13. იპოვეთ $O(-2,\ 3)$ წერტილის მიმართ $A(-3,\ 5)$ და $B(-6,\ 1)$ წერტილების მობრუნებით მიღებული A' და B' წერტილები, თუ მობრუნება მოხდა $\alpha = 45^\circ$-ზე.

14. იპოვეთ A და B წერტილების კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ $O(1,-3)$ ცენტრის გარშემო მათი მობრუნებით მიღებული წერტილებია, შესაბამისად, $A'(3,\ 1)$ და $B'(1,\ 2)$ და მობრუნება მოხდა α კუთხეზე, სადაც $\cos\alpha = 4/5$ და $\sin\alpha = -3/5$.

15. იპოვეთ $P(1,-2)$ და $Q(1,1)$ წერტილების ანასახები შემდეგი გარდაქმნის დროს:

(ა) $R_O(90^\circ)$; (ბ) $R_O(30^\circ)$.

16. იპოვეთ მობრუნების კუთხე, თუ ამ გარდაქმნით $A(-3/5,\ 4/5)$ წერტილი $B(-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$ წერტილზე აისახება.

17. ჩაწერეთ მატრიცულად შემდეგი ფორმულებით მოცემული გარდაქმნა:

$$x' = 3x + 7y$$
$$y' = 4x + 8y\ .$$

18. შეადგინეთ $R_O(45^\circ)$ გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა და დაადგინეთ $E(4,-3)$ წერტილის ანასახი ამ გარდაქმნის დროს.

19. იპოვეთ $O(-3,5)$ წერტილის მიმართ $\vec{AB}$ ვექტორის $\alpha = 60^\circ$-ზე მობრუნებით მიღებული $\vec{A'B'}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ $A(-2,5)$ და $B(-6,1)$.

20*. იპოვეთ O ცენტრისა და R რადიუსის მქონე წრეწირის ანასახი არანულოვანი $\vec{a}$ ვექტორის გასწვრივ პარალელური გადატანისას.

21*. აჩვენეთ, რომ თუ სამკუთხედს აქვს სიმეტრიის ღერძი, მაშინ ის ამ სამკუთხედის ერთ-ერთ წვეროზე გადის.

22*. შეიძლება თუ არა, რომ სამკუთხედს ჰქონდეს სიმეტრიის ცენტრი?

23*. სიმეტრიის რამდენი ცენტრი აქვს ფიგურას, რომელიც შედგება ორი პარალელური წრფისაგან? სად მდებარეობენ ისინი?

24. აჩვენეთ, რომ ერთი და იმავე ცენტრის გარშემო α და β კუთხეებზე მობრუნებათა კომპოზიცია წარმოადგენს იმავე ცენტრის მიმართ მობრუნებას $\alpha+\beta$ კუთხეზე.

25. აჩვენეთ, რომ $A(1,3)$ და $B(4,-1)$ ბოლოების მქონე მონაკვეთის სიგრძე, $\vec{a}=(2,-3)$ ვექტორის გასწვრივ პარალელური გადატანის დროს, არ იცვლება.

26. იპოვეთ კოორდინატთა სათავის მიმართ $A(-4,5)$ და $B(3,-2)$ წერტილების მობრუნებით მიღებული A' და B' წერტილები, თუ:

ა) მობრუნება მოხდა 90°-ით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით;

ბ) მობრუნება მოხდა 90°-ით საათის ისრის მიმართულებით.

27. აჩვენეთ, რომ პარალელური გადატანის გარდაქმნა ინახავს მანძილს ორ წერტილს შორის.

28. აჩვენეთ, რომ პარალელური გადატანისას წრფე მის პარალელურ წრფეში გადადის.

29. აჩვენეთ, რომ პარალელური გადატანისას სიბრტყე მის პარალელურ სიბრტყეში გადადის.

30*. აჩვენეთ, რომ პარალელურ გადატანათა კომპოზიცია პარალელური გადატანაა.

31*. შეადგინეთ $Ax + By + C = 0$ განტოლებით მოცემული სიმეტრიის ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიის გარდაქმნის ფორმულები.

32*. გამოარკვიეთ, რა ფიგურაზე აისახება პარალელური გადატანის დროს (პასუხი დაასაბუთეთ): პარალელოგრამი, სამკუთხედი, ტრაპეცია?

33*. აჩვენეთ, რომ სიბრტყის (სივრცის) ყველა პარალელური გადატანათა სიმრავლე, პარალელურ გადატანათა კომპოზიციის მიმართ, წარმოადგენს ჯგუფს. არის თუ არა ეს ჯგუფი აბელური?

34*. გამოარკვიეთ, ღერძული სიმეტრიის დროს რა ფიგურაზე აისახება:

ა) ტოლფერდა სამკუთხედი, თუ სიმეტრიის ღერძი მის ფუძეზე დაშვებული სიმაღლეა;

ბ) ურთიერთგადამკვეთ წრფეთა წყვილი, თუ სიმეტრიის ღერძია ამ წრფეებით შექმნილ ვერტიკალურ კუთხეთა ბისექტრისა;

გ) წრეწირი, თუ სიმეტრიის ღერძია ამ წრეწირის დიამეტრი;

დ) პარალელურ წრფეთა წყვილი, თუ სიმეტრიის ღერძია ამ წრფეთა მართობული რაიმე წრფე;

ე) პარალელურ წრფეთა წყვილი, თუ სიმეტრიის ღერძია ამ წრფეთა პარალელური რაიმე წრფე.

35*. აჩვენეთ, რომ ორი ცენტრალური სიმეტრიის კომპოზიცია პარალელურ გადატანას წარმოადგენს.

36*. აჩვენეთ, რომ პარალელური გადატანისა და ცენტრალური სიმეტრიის კომპოზიცია ცენტრალური სიმეტრიაა.

37*. რა კუთხეს ადგენენ ერთმანეთთან წრფე და მისი ანასახი სიბრტყის α კუთხეზე მობრუნების დროს (პასუხი დაასაბუთეთ)?

38*. რა ფიგურაზე აისახება სიბრტყის α კუთხეზე მობრუნების დროს:

ა) ტოლგვერდა სამკუთხედი;

ბ) სხივი;

გ) ნახევარსიბრტყე;

დ) პარალელურ წრფეთა წყვილი;

ე) კუთხე;

ვ) კვადრატი?

39*. აჩვენეთ, რომ კოორდინატთა სათავის გარშემო ნებისმიერი ორი მობრუნება კომუტაციურია.

40. აჩვენეთ, რომ O ცენტრის გარშემო $R_O(\alpha)$ მობრუნება მატრიცულად ჩაიწერება სახით:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

პასუხები

1. $O'(-2,-1)$; **2.** $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$; **3.** არ იკვეთებიან;

4. $A \to A'(1,-1)$, $B \to B'(4,-4)$, $C \to C'(3,-5)$. ვინაიდან,

$\vec{AC} = (2,-4) = \vec{A'C'}$ და $\vec{AB} = (3,-3) = \vec{A'B'}$, ამიტომ

$\angle ACB = \angle A'C'B'$;

5. $A_X(2,3)$, $A_Y(-2,-3)$; **6.** $A'(5,1)$ და $B'(3,2)$; **7.** $d = 4\sqrt{5}$;

8. $A'(10,\ 5)$, $B'(7,\ 5)$ და $C'(10,\ 1)$;

9. $O(3{,}5;\ -3)$; **10.** $O(2,\ 3,-5)$; **11.** $A(0,-6,10)$; **12.** იპოვეთ

$P'(5,\ 0,-2)$; **13.** $A'(-3\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$, $B'(-\sqrt{2},\ -3\sqrt{2})$;

14. $A(14/5,\ -2/5)$, $B(3/5,\ -4/5)$; **15.** (ა) $P'(2,\ 1)$ და

$Q'(-1,1)$, (ბ) $P'\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2},\ \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)$ და $Q'\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;

16. $arctg\ (1/7)$; **17.** $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

18. $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$, $E'(7\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$;

19. $\vec{A'B'} = (-2+2\sqrt{3},\ -2-2\sqrt{3})$; **22.** არა;

23. უსასრულოდ ბევრი; **26.** (ა) $B'(2,\ 3)$, $A'(-5,-4)$; (ბ) $A'(5,\ 4)$,

$B'(-2,\ -3)$;

31. $\begin{cases} x' = x - \dfrac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2} \\ y' = y - \dfrac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}, \end{cases}$ **32.** პარალელოგრამზე,

სამკუთხედზე, ტრაპეციაზე; **33.** შეამოწმეთ ჯგუფის აქსიომები.

სავარჯიშო ამოცანები

1. იპოვეთ $\vec{c}$ ვექტორის გაშლა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებად

(1) $\vec{a}=(4,-2)$, $\vec{b}=(3,5)$, $\vec{c}=(1,-7)$;

(2) $\vec{a}=(5,4)$, $\vec{b}=(-3,0)$, $\vec{c}=(19,8)$;

(3) $\vec{a}=(-6,2)$, $\vec{b}=(4,7)$, $\vec{c}=(9,-3)$.

იპოვეთ $\vec{c}$ ვექტორის კოორდინატები $\vec{e_1}=\vec{a}$, $\vec{e_2}=\vec{b}$ ბაზისში.

2. შეიძლება თუ არა ვექტორთა შემდეგი სამეული ავიღოთ ბაზისად:

(1) $\vec{e_1}=(-3,0,2)$, $\vec{e_2}=(2,1,-4)$, $\vec{e_3}=(11,-2,-2)$;

(2) $\vec{e_1}=(1,0,7)$, $\vec{e_2}=(-1,2,4)$, $\vec{e_3}=(3,2,1)$;

(3) $\vec{e_1}=(5,-1,4)$, $\vec{e_2}=(3,-5,2)$, $\vec{e_3}=(-1,-13,-2)$.

3. აჩვენეთ, რომ $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორები ქმნიან ბაზისს. იპოვეთ $\vec{d}$ ვექტორის კოორდინატები ამ ბაზისში, თუ $\vec{a}=(2,1,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,2)$, $\vec{c}=(3,-2,1)$ და $\vec{d}=(-8,9,-1)$.

4. იპოვეთ $\vec{a}=8i+10j$ ვექტორის კოორდინატები $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ ბაზისში, სადაც $\vec{e_1}=2i-j-k$, $\vec{e_2}=3i+2j-k$, $\vec{e_3}=1+3j+k$.

5. იპოვეთ $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $C(3, 0)$ და $D(2, -5)$ წერტილების ახალი კოორდინატები საკოორდინატო სისტემაში, რომელიც მიიღება საკოორდინატო სისტემის პარალელური გადატანით, თუ ახალი კოორდინატთა სისტემის სათავეა $O'(6,-1)$.

6. ვთქვათ, $M(3, 4)$ წერტილის კოორდინატები პარალელური გადატანის დროს გახდა -2 და -5. იპოვეთ ახალი საკოორდინატო სისტემის სათავის კოორდინატები ძველ საკოორდინატო სისტემაში.

7. ძველი საკოორდინატო სისტემის x და y კოორდინატები ახალი სისტემის x' და y' კოორდინატებთან დაკავშირებულია ფორმულებით:

$$x = x'+2y'-3, \quad y = -5x'+3y'+2.$$

იპოვეთ ახალი საკოორდინატო სისტემის სათავის ძველი კოორდინატები.

8. დაადგინეთ $A(-4, 5)$, $B(3, -2)$, $C(x, y)$ წერტილების კოორდინატები, თუ საკოორდინატო სისტემას მოვაბრუნებთ:

(1) მართ კუთხეზე, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით;

(2) მართ კუთხეზე, საათის ისრის მიმართულებით;

(3) გაშლილ კუთხეზე.

9*. შეადგინეთ კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის ფორმულები, თუ საკოორდინატო სისტემას 60°-იან კუთხეზე მოვაბრუნებთ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით და ახალი საკოორდინატო სისტემის სათავეა $O'(5, -3)$.

10. იპოვეთ $A(0, 1)$, $B(3,0)$, $C(1, 2)$ წერტილების კოორდინატები ახალ საკოორდინატო სისტემაში, თუ ის მიიღება 45° კუთხეზე მობრუნებით და ახალი საკოორდინატო სისტემის სათავეა $O'(-2, 3)$.

11. ძველი სისტემიდან ახალ საკოორდინატო სისტემებაზე გადასვლის ფორმულებია:

$$x = x'+y'+z'-1\,,\quad y = x'+2y'+3z'+2\,,\quad z = x'+3y'+4z'+1\ .$$

იპოვეთ ახალი საკოორდინატო სისტემის O' სათავის კოორდინატები.

12*. კოორდინატთა გარდაქმნა მოცემულია ფორმულებით:

$$x = \frac{2}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z'\,,\quad y = \frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'\,,\quad z = -\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'\,.$$

იპოვეთ:

(1) $A(0,1,1)$, $B(1,1,1)$ და $C(-3,1,4)$ წერტილების ძველი კოორდინატები;

(2) $A(4,1,-3)$, $B(5,1,1)$ და $C(1,2,3)$ წერტილების ახალი კოორდინატები.

13. ჩაწერეთ მატრიცული სახით მოცემული გარდაქმნა კოორდინატობრივად:

(1) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

(2) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix};$$

(3) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

14*. აჩვენეთ, რომ წერტილის გარშემო ყველა მობრუნებათა სიმრავლე მობრუნებათა კომპოზიციის ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს ჯგუფს.

15*. აჩვენეთ, რომ გამრავლების ოპერაციის მიმართ მატრიცთა შემდეგი სიმრავლე არის ჯგუფი:

(1) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in R, \quad a^2 + b^2 > 0\right\}$;

(2) $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in Q, \quad a^2 + b^2 > 0\right\}$;

(3) $\left\{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in R\right\}$.

გამოარკვიეთ, რომელი მათაგნია აბელური ჯგუფი. იპოვეთ შებრუნებული გარდაქმნები, თუკი ისინი არსებობენ.

პასუხები

1. (1) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$; (2) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; (3) $\vec{c} = -\frac{3}{2}\ \vec{a}$; (1) $\vec{c} = (1, -1)$;

(2) $\vec{c} = (2, -3)$; (3) $\vec{c} = (-\frac{3}{2}, 0)$;

2. (1) არა; (2) კი; (3) არა; **3.** $\vec{d} = (2, 3, -5)$; **4.** $\vec{a} = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$;

5. $A(-5, 3)$, $B(-9, 5)$, $C(-3, 1)$ და $D(-4, -4)$; **6.** $O'(5, 9)$;

7. $O'(-3, 2)$; **8.** (1) $A(-5, -4)$, $B(2, 3)$, $C(-y, x)$; (2) $A(5, 4)$,

$B(-2, -3)$, $C(y, -x)$; (3) $A(4, -5)$, $B(-3, 2)$, $C(-x, -y)$;

9. $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 5$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 3$;

10. $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(-3\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$;

11. (1) $O'(-1, 2, 1)$; (2) $\vec{e}_1' = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2' = (1, 2, 3)$, $\vec{e}_3' = (1, 3, 4)$;

12. უნდა შევამოწმოთ, რომ ორთონორმირებული ბაზისი ორთო-ნორმირებულ ბაზისში გადადის; (1) $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 1)$ და $C(0, 1, 5)$; (2) $A(5, 1, 0)$, $B(3, 3, 3)$ და $C(3, 1, 2)$.

§ 8. მეორე რიგის წირთა კლასიფიკაცია

განვიხილოთ ზოგადად მეორე რიგის ალგებრული განტოლება:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

წირი მეორე რიგისაა ნიშნავს, რომ a_{11}, a_{12}, a_{22} კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც არანულოვანია. ამ კოეფიციენტებს უფროსი კოეფიციენტები ეწოდება, კოეფიციენტებს a_{12}, a_{22} – წრფივი კოეფიციენტები, ხოლო a_{32} – თავისუფალი წევრი.

განვიხილოთ სიდიდეები

$$a_{12} + a_{22}\,,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ და } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

სადაც გვაქვს სიმეტრია $a_{ij} = a_{ji}$, ანუ განვიხილოთ

$$\mathrm{I}_1 = a_{11} + a_{22}\,,\ \mathrm{I}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ და } \mathrm{I}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ეს სიდიდეები არიან (1) განტოლების ინვარიანტები კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ. ეს ნიშნავს შემდეგს: (1) განტოლება ჩაწერილია რაღაც მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. თუ ამ სისტემიდან გადავალთ ახალ საკოორდინატო სისტემაზე, მაშინ (1) განტოლება საზოგადოდ შეიცვლება. შეიცვლებიან კოეფიციენტებიც a_{ij}, მაგრამ სიდიდეები I_1, I_2, I_3 თურმე იგივე რჩება.

(1) განტოლებით მოცემულ წირს აქვს სიმეტრიის ცენტრი კოორდინატებით (x_0, y_0) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x_0, y_0 ცვლადების მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

დეტერმინანტი

$$\mathrm{I}_2 \neq 0$$

და ამიტომ სიმეტრიის ცენტრის კოორდინატები (x_0, y_0) ამ სისტემის ერთადერთი ამონახსნია.

საკოორდინატო სისტემის α კუთხით მობრუნებისას, სადაც

$$ctg2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

(როცა $a_{12} \neq 0$) მეორე რიგის წირის ზოგადი განტოლება (1) გადადის შემდეგ განტოლებაში, სადაც კოეფიციენტი xy ნამრავლთან გახდება ნული

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0.$$

მეორე რიგის წირების გეომეტრიული დახასიათება და განლაგება სავსებით განისაზღვრება მისი I_1, I_2 და I_3, ინვარიანტების მნიშვნელობებით.

მეორე რიგის წირს ეწოდება

ელიფსური ტიპის, თუ $\mathrm{I}_2 > 0$,

ჰიპერბოლური ტიპის, თუ $\mathrm{I}_2 < 0$,

პარაბოლური ტიპის, თუ $\mathrm{I}_2 = 0$.

ვიგულისხმოთ, რომ მეორე რიგის წირის ზოგად (1) განტოლებაში ინვარიანტი $\mathrm{I}_1 > 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ამას მივაღწევთ (–1)-ზე გამრავლებით.

ელიფსური ტიპის წირი ($\mathrm{I}_2 > 0$) წარმოადგენს ელიფსს, როცა $\mathrm{I}_3 < 0$, არის წერტილი (გადაგვარებული ელიფსი), როცა

$I_3 = 0$ და არის ცარიელი სიმრავლე (ანუ წარმოსახვითი ელიფსი), როცა $I_3 > 0$.

ჰიპერბოლური ტიპის წირი ($I_2 < 0$) წარმოადგენს ჰიპერბოლას, თუ $I_3 \neq 0$ და თანამკვეთ წრფეთა წყვილს, როცა $I_3 = 0$.

პარაბოლური ტიპის წირი ($I_2 = 0$) წარმოადგენს პარაბოლას, თუ $I_3 \neq 0$ და პარალელურ წრფეთა წყვილს ან ცარიელ სიმრავლეს, როცა $I_3 = 0$.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი:

მაგალითი 1.

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0 \text{ (ა)}$$

აქ კოეფიციენტებია

$$a_{11} = 2\ ,\ a_{12} = -2\ ,\ a_{22} = 5\ ,\ a_{13} = -1/2\ ,\ a_{23} = 5/2\ ,\ a_{33} = -4\ .$$

ინვარიანტები: $I_1 = 7,\ I_2 = 6,\ I_3 = -131/4$.

რადგან $I_2 \neq 0$, ამიტომ ამ წირს აქვს ერთადერთი სიმეტრიის ცენტრი.

წირი არის ელიფსური ტიპის, რადგან $I_2 > 0$.

ეს წირი ელიფსია, რადგან $I_3 < 0$.

ვიპოვოთ სიმეტრიის ცენტრის კოორდინატები, ამისათვის ამოვხსნათ წრფივი სისტემა:

$$\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 - 1/2 = 0 \\ -2x_0 + 5y_0 + 5/2 = 0 \end{cases}.$$

მივიღებთ $x_0 = -5/12$, $y_0 = -2/3$, ე.ი. სიმეტრიის ცენტრია წერტილი $(-5/12;\ -2/3)$.

გავამატრივოთ ეს განტოლება. ჯერ გვინდა მოვკლათ წრფივი წევრები. ამისათვის მოვახდინოთ პარალელური გადატანა

$$\begin{cases} x = x' - 5/12 \\ y = y' - 2/3 \end{cases}.$$

ჩავსვათ x და y-ის მნიშვნელობები წირის საწყის (ა) განტოლებაში, მივიღებთ

$$2x'^2 - 4x'y' + 5y'^2 - 131/24 = 0. \qquad (ბ)$$

ახლა გვინდა გავანულოთ კოეფიციენტი $x'y'$-თან. ამისათვის მოვახდინოთ მობრუნება კუთხით

$$ctg\,2\alpha = \frac{2-5}{-4} = \frac{3}{4}.$$

ამ დროს

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} = \frac{3}{5},$$

ამიტომ

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos^2 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos^2 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

ამიტომ ამ კუთხით მობრუნებას აქვს სახე

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}.$$

ჩავსვათ (ბ) განტოლებაში, მივიღებთ

$$x''^2 + 6y''^2 = 131/24.$$

$131/24$ -ზე გაყოფით გვაქვს

$$\frac{x''^2}{131/24}+\frac{y''^2}{131/144}=1 \quad .$$

საბოლოოდ მივიღეთ ელიფსის კანონიკური სახის განტოლება.

მაგალითი 2. განტოლება

$$8x^2+24xy+y^2-56x+18y-55=0$$

არის ჰიპერბოლური ტიპის, რადგან $\mathrm{I}_2=-136<0$.

ეს წირი არის თანამკვეთ წრფეთა წყვილი, რადგან ინვარიანტი

$$\mathrm{I}_3=\begin{vmatrix} 8 & 12 & -28 \\ 12 & 1 & 9 \\ -28 & 9 & -55 \end{vmatrix}=0.$$

მაგალითი 3. განტოლება

$$x^2+2xy+y^2+2x+y=0$$

წირი არის პარაბოლური ტიპის, რადგან $\mathrm{I}_2=0$

ეს წირი არის პარაბოლა, რადგან $\mathrm{I}_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}=-1/4\neq 0$.

სავარჯიშო ამოცანები

1. გამოარკვიეთ, ქვემოთ მოცემულ წირებს შორის რომელი წარმოადგენს ცენტრალურ წირს (აქვს ერთადერთი ცენტრი), რომელს არ გააჩნია ცენტრი და რომელს აქვს უსასრულო რაოდენობის ცენტრი:

(1) $3x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 12y - 7 = 0$;

(2) $4x^2 + 5xy + 3y^2 - x + 9y - 12 = 0$;

(3) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$;

(4) $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y - 11 = 0$;

(5) $x^2 - 2xy + 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$;

(6) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$;

(7) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$;

(8) $4x^2 - 6xy - 9y^2 + 3x - 7y + 12 = 0$.

2. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული წირები ცენტრალური წირებია და იპოვეთ მათი ცენტრები:

(1) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$;

(2) $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$;

(3) $9x^2 - 4xy - 7y^2 - 12 = 0$;

(4) $2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$.

3. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემულ წირებს აქვთ ცენტრების უსასრულო რაოდენობა. შეადგინეთ ცენტრების გეომეტრიული ადგილის განტოლებები:

(1) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36y + 20 = 0$;

(2) $4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y - 21 = 0$;

(3) $25x^2 - 10xy + y^2 + 40x - 8y + 7 = 0$.

4. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოცემული წირები ცენტრალური წირებია. მოახდინეთ კოორდინატთა სისტემის სათავის წირის ცენტრში პარალელური გადატანა:

(1) $3x^2 - 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$;

(2) $6x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$;

(3) $4x^2 + 6xy + y^2 - 10x - 10 = 0$;

(4) $4x^2 + 2xy + 6y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$.

5*. m და n პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის იქნება

$$mx^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + ny - 13 = 0$$

განტოლებით მოცემული წირი:

(1) ცენტრალური; (2) ცენტრის არ მქონე;

(3) უსასრულოდ ბევრი ცენტრის მქონე.

6*. k პარამეტრის რა მნიშვნელობებისთვის,

$4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 1 = 0$ წირს, $y = kx$ წრფე:

(1) კვეთს ერთ წერტილში; (2) ეხება;

(3) კვეთს ორ წერტილში; (4) არ კვეთს.

7. შეადგინეთ მეორე რიგის წირის განტოლება, თუ მისი ცენტრია კოორდინატთა სისტემის სათავე, გადის $M(6,-2)$ წერტილზე და $x - 2 = 0$ წრფეს $N(2,0)$ წერტილში ეხება.

8. შეადგინეთ მეორე რიგის წირის განტოლება, თუ მისი ცენტრია $P(1,-2)$ წერტილი, გადის $Q(0,-3)$ წერტილზე და აბსცისთა ღერძს ეხება კოორდინატთა სათავეში.

პასუხები

1. (1), (2), (5), (8) – ერთადერთი ცენტრი; (3), (7) ცენტრი არ აქვს; (4), (6) უსასრულოდ ბევრი ცენტრი;

2. (1) $O(3,-2)$; (2) $O(0,-5)$; (3) $O(0,\ 0)$; (4) $O(-1,3)$;

3. (1) $x-3y-6=0$; (2) $2x+y-2=0$; (3) $5x-y+4=0$;

4. (1) $9x^2-18xy+6y^2+2=0$; (2) $6x^2+4xy+y^2-7=0$;

(3) $4x^2+6xy+y^2-5=0$; (4) $4x^2+2xy+6y^2+1=0$;

5. (1) $m\neq 4$, n ნებისმიერია; (2) $m=4$, $n\neq 6$; (3) $m=4$, $n=6$;

6. (1) $k=2$; (2) $k_1=-1$, $k_2=5$; (3) $k\neq 2$ და $(-1)<k<5$;

(4) $k<-1$ ან $k>5$; **7.** $x^2-8y^2-4=0$;

8. $x^2+xy+y^2+3y=0$

დანართი

ქვემოთ მოცემულ მაგალითებში მოცემული მეორე რიგის წირებისათვის დავადგინოთ: მეორე რიგის წირის ტიპი; კოორდინატთა კანონიკური სისტემა; წირის კანონიკური სახის განტოლება. (შევნიშნოთ, რომ ეს თემა კავშირია ისეთ საკითხებთან, როგორიცაა: სიმეტრიული მატრიცით მოცემული კვადრატული ფორმა, მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები).

მაგალითი: $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

ამოხსნა: გვაქვს $a_{11} = 5$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = 8$, $a_{13} = -16$, $a_{23} = -28$, $a_{32} = 80$.

ამიტომ წირის ინვარიანტები

$$\mathrm{I}_1 = 13 > 0,\ \mathrm{I}_2 = 36 > 0,\ \mathrm{I}_3 = -1296 < 0.$$

რადგან $\mathrm{I}_2 > 0$ და I_2, I_3-ს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ, წირი არის ელიფსი.

ამიტომ მოცემული განტოლება მიიყვანება სახემდე

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_2} = 0,$$

სადაც λ_1, λ_2 კვადრატული ნაწილის შესაბამისი მახასიათებელი რიცხვებია.

ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ

$$\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3'' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}'' \end{vmatrix} = \mathrm{I}_2'' a_{33}'' = \mathrm{I}_2 a_{33}'',$$

ანუ თავისუფალი წევრი იქნება $\frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_2}$.

წირის განტოლების შესაბამისი კვადრატული ფორმის მატრიცის მახასიათებელი განტოლებაა

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ანუ $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$. ფესვებია $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$.

გავიხსენოთ კვადრატული ფორმის მიყვანა კანონიკურ სახემდე. ეს ხდება ბაზისის გარდაქმნით იმ ორთოგონული მატრიცით, რომლის სვეტები ფორმის საკუთრივი ვექტორებია.

ბაზისის ამ გარდაქმნით კვადრატული ნაწილი $5x^2 + 4xy + 8y^2$ მიიღებს სახეს $4x'^2 + 9y'^2$ (ანუ xy-თან კოეფიციენტი განულდება და კვადრატებთან კოეფიციენტები საკუთრივი რიცხვებია).

როგორც ვიცით, პარალელური გადატანით, რომლის დროსაც სათავე გადადის წირის ცენტრში, წრფივი ნაწილი $-32x - 56y$ აღარ გვექნება, ხოლო კვადრატული წევრების კოეფიციენტები არ შეიცვლება. ახალი თავისუფალი წევრი ინვარიანტებით ასე გამოისახება:

$$a'_{33} = \mathrm{I}_3 : \mathrm{I}_2 = -\frac{1296}{36} = -36.$$

ანუ ახალ x', y' ცვლადებში წირს ექნება განტოლება

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

36-ზე გაყოფით მიიღება კანონიკური განტოლება

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} - 1.$$

ცენტრის კოორდინატები, როგორც ვიცით, არის შემდეგი სისტემის ამონახსნი:

$$\begin{cases} 5x+2y-16=0 \\ 2x+8y-28=0 \end{cases} \text{ ანუ } O'(2,3).$$

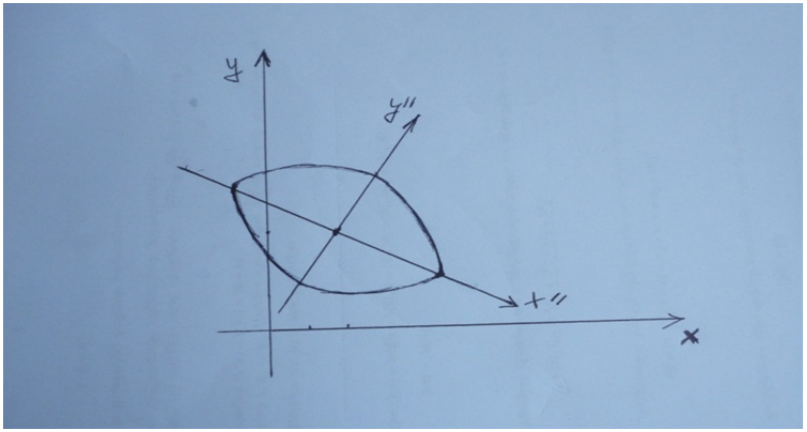
კანონიკური სისტემის საკოორდინატო ღერძების e_1', e_2' მგეზავებად უნდა ავიღოთ ერთეულოვანი საკუთრივი ვექტორები, e_1'-ის კოორდინატებს გავიგებთ შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)x+a_{12}y=0 \\ (a_{12}x+(a_{22}-\lambda_1)y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

ანუ $\begin{cases} x+2y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ და $e_1'=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

e_2'-ს ანალოგიურად გამოვთვლით, თუმცა e_2'-ად შეიძლება ავიღოთ e_1'-ის მართობული ვექტორი $e_2'=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

ახლა, რადგან ვიცით ელიფსის ცენტრი, კანონიკური განტოლება და ღერძები, შეგვიძლია ეს ელიფსი დავხატოთ კიდეც.



მაგალითი: $F(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$. წირის ინვარიანტებია $I_1 = 5 > 0$, $I_2 = 0$, $I_3 = -225 < 0$.

რადგან $I_2 = 0$, $I_3 < 0$, წირი არის პარაბოლა.

მახასიათებელი ფესვებია $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, ე.ი. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

$$\operatorname{ctg}2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = 2.$$

ამიტომ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

მოცემული განტოლება დაიყვანება სახეზე

$$\lambda_2 y''^2 + \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\, x'' = 0.$$

ანუ $\lambda_2 y''^2 + 2a''_{13}x'' = 0$, სადაც $|a''_{13}| = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}$.

ეს გვაქვს იქიდან, რომ $a''_{22} = I''_1 = I_1$ და

$$I_3 = I''_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a''_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a''_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a''_{22}a''^2_{13}.$$

ანუ $|a''_{13}| = 3\sqrt{5}$ და რადგან $\lambda_2 = 5$, უნდა მივიღოთ

$$y''^2 = 6\frac{\sqrt{5}}{5}x''.$$

მართლაც, გარდაქმნით

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

$F(x,y) = 0$ მიიღებს სახეს

$$F'(x'y') = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) +$$

$$+4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 7 = 0$$

ანუ

$$F'(x', y') = 5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0.$$

როგორც ვხედავთ, y^2-ის კოეფიციენტი უდრის მახასიათებელ რიცხვს 5-ს. x^2-ის კოეფიციენტი ნულია. იხ. ზემოთ $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5$.

მოვახდინოთ საკოორდინატო ღერძების პარალელური გადატანა, რათა გავანულოთ წევრი $-2\sqrt{5}y' + 7$, ანუ $F'(x', y')$-ში, რაც დარჩება, მივიყვანოთ პარაბოლის განტოლებამდე. ვთქვათ, სათავე გადადის (x_0, y_0) წერტილში, ანუ გვაქვს ახალი კოორდინატები (x'', y'')

$$\begin{cases} x' = x'' + x_0 \\ y' = y'' + y_0 \end{cases}$$

ანუ

$$F''(x'', y'') = 5(y'' + y_0)^2 - 6\sqrt{5}(x'' + x_0) - 2\sqrt{5}(y'' + y_0) + 7 = 0.$$

გავანულოთ წევრი $-2\sqrt{5}y' + 7$ ნიშნავს, რომ ბოლო განტოლებაში y''-ის კოეფიციენტი და თავისუფალი წევრი უნდა იყოს 0.

$$F''(x'', y'') = 0 \quad \text{ანუ} \begin{cases} 10y_0 - 2\sqrt{5} = 0 \\ 5{y_0}^2 - 6\sqrt{5}x_0 - 2\sqrt{5}y_0 + 7 = 0 \end{cases}$$

ამონახნია $(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, ანუ პარაბოლას წვეროს კოორდინატები (x', y')-ში არის $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$, ამიტომ ახალ (x'', y'') კოორდინატებში განტოლება მიიღებს სახეს

$$F''(x'', y'') = 5(y'' + \frac{\sqrt{5}}{5})^2 - 6\sqrt{5}\left(x'' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) - 2\sqrt{5}(y'' + \frac{\sqrt{5}}{5}) + 7 = 0$$

ანუ

$$F''(x'', y'') = 5y''^2 - 6\sqrt{5}x'' = 0.$$

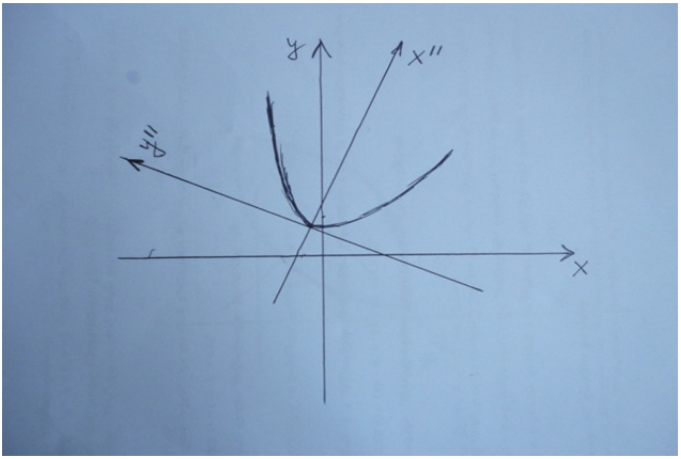
საბოლოდ გვაქვს პარაბოლის კანონიკური სახის განტოლება

$$y''^2 = 6\frac{\sqrt{5}}{5}x''.$$

პარაბოლას წვეროს, ანუ კანონიკური საკორდინატო სისტემის სათავის, კოორდინატები (x', y') სისტემაში არის $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$, ხოლო (x, y)-კოორდინატებში გავიგებთ ზემოთმოყვანილი გარდაქმნით

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = -1/5 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 3/5. \end{cases}$$

ახლა შგვიძლია პარაბოლის დახატვაც.



სავარჯიშო ამოცანები

განსაზღვრეთ მეორე რიგის წირის ტიპი. იპოვეთ მისი კანონიკური განტოლება, კანონიკურ კოორდინატთა სისტემა და დახატეთ წირი:

1. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;

2. $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$;

3. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$;

4. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;

5. $8x^2 + 6xy - 26y^2 - 12x + 11y = 0$;

6. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

7. $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$;

8. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$;

9. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;

10. $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$;

11. $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 2 = 0$;

12. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20x + 30y + 16 = 0$;

13. $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0$;

14. $4x^2 + 4xy + y^2 + 16x + 8y + 15 = 0$.

პასუხები

1. პარაბოლა, $y'^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'(3,2)$, $e'_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$,
$e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

2. თანამკვეთი წრფეები $x - y - 1 = 0,\ x - 4y + 2 = 0.$

3. პარალელური წრფეები $2x - 3y + 1 = 0,\ 2x - 3y - 2 = 0.$

4. ელიფსი, $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$, $O'\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$,
$e'_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

გამომცემლობის რედაქტორი **მარიკა ერქომაიშვილი**
კომპ. უზრუნველყოფა **ლალი კურდღელაშვილი**
გარეკანის დიზაინერი **ნინო ებრალიძე**

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel: 995(32) 225 14 32
www.press.tsu.edu.ge

მალხაზ ბაკურაძე რუსლან სურმანიძე **ამოცანათა კრებული გეომეტრიაში**