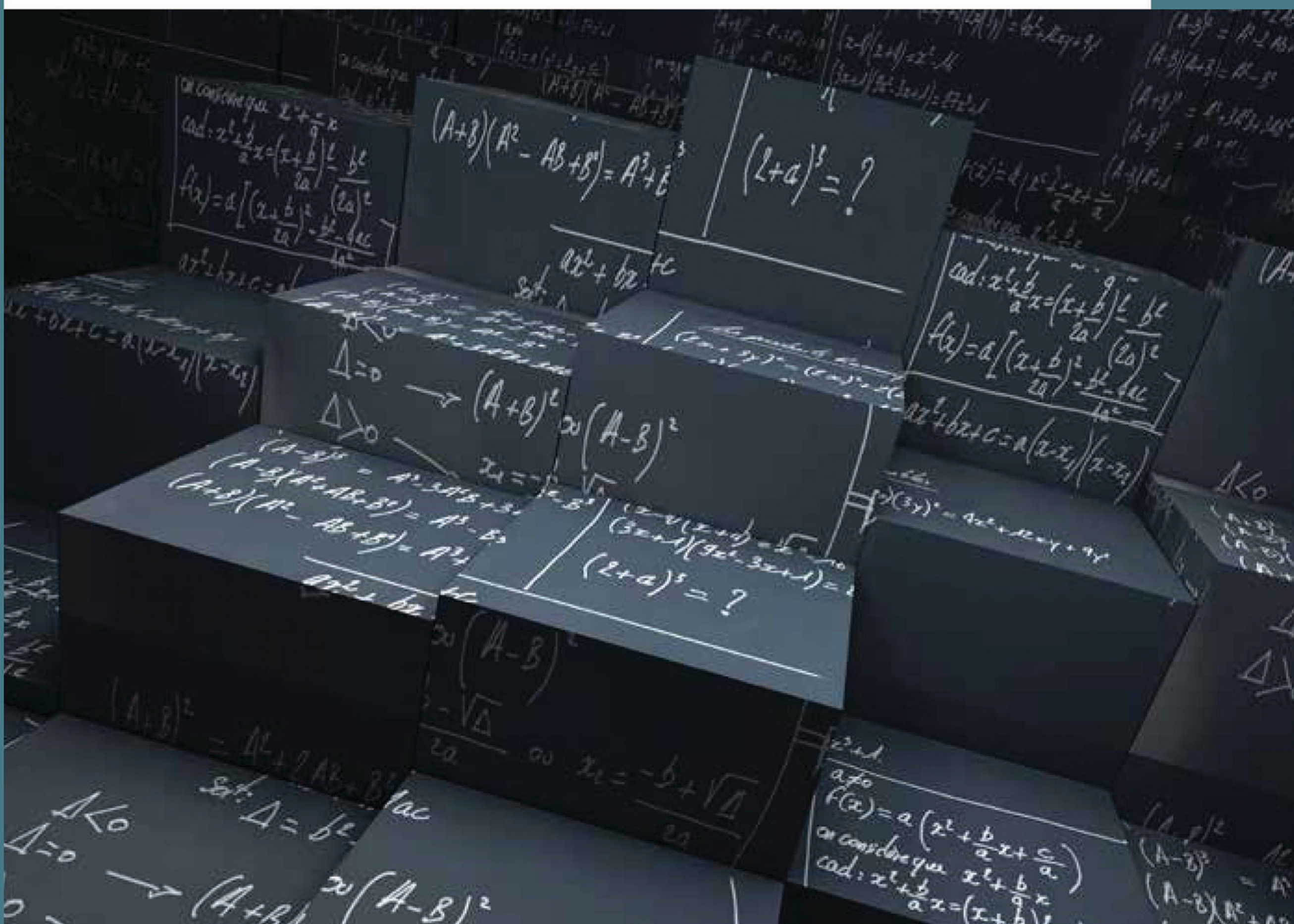
მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი

№5 2018

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი

დაარსდა 2013 წელს;
მიეძღვნა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
95 წლის იუბილეს.

ჩვენი მიზანია მასწავლებლებსა და მოსწავლეებში მათემატიკური ცოდნის პოპულარიზაცია, მათემატიკის მასწავლებელთა პროფესიული ზრდის ხელშეწყობა, მოსწავლეთა ჩართვა მათემატიკის ლამაზ სამყაროში მოგზაურობისა და საინტერესო ამოცანების ამოხსნის პროცესში; მოგაწვდით ინფორმაციას ჩვენი წარმატებული კურსდამთავრებულების საქმიანობისა და მომავალი სტუდენტების პერსპექტივების შესახებ.

უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

სარჩევი

სარჩევი

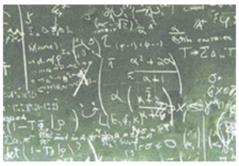
ჟურნალი „მათემატიკა“

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“ დაარსდა 2013 წელს, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით. ჟურნალის შექმნის იდეა ფაკულტეტის დეკანს — რამაზ ბოჭორიშვილს ეკუთვნის.

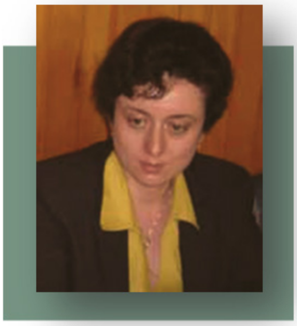
ჟურნალის მთავარი რედაქტორია თეიმურაზ ვეფხვაძე, მთავარი რედაქტორის მოადგილე — ომარ ფურთუხია.

ჟურნალში რამდენიმე განყოფილებაა, რომლებსაც სარედაქციო საბჭოს წევრები ხელმძღვანელობენ: „მათემატიკური სკოლები“ (ჯონდო შარიქაძე) — წარმოაჩენს იმ ქართველ მეცნიერებს, რომლებმაც დიდი წვლილი შეიტანეს ქართული მათემატიკური სკოლების ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში; „ქართველი ავტორები“ (გია გიორგაძე) — პოპულარულ ენაზე გადმოიცემა მასალა მათემატიკური ცნებებისა და პრობლემების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ; „თარგმანი“ (ილია თავხელიძე) — უცხოელი ავტორების სამეცნიერო-პოპულარული სტატიები; „მეთოდიკა“ (თეიმურაზ ვეფხვაძე, ქეთევან შავგულიძე) — მასალა, რომელიც ხელს შეუწყობს მასწავლებელთა პროფესიულ ზრდას; „მოსწავლეები“ (თენგიზ კოპალიანი) — მასალა, რომელიც განკუთვნილია მოსწავლეებში მათემატიკის პოპულარიზაციისთვის, მათემატიკური ოლიმპიადების მიმოხილვა, საინტერესო ამოცანები მოსწავლეებისთვის; „სტუდენტები“ (თინათინ დავითაშვილი) — წარმოაჩენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ სტუდენტებს; „კურსდამთავრებულები“ (როლანდ ომანაძე) — წარმოგვიდგენს მათემატიკის დეპარტამენტის წარმატებულ კურსდამთავრებულებს; „თსუ“ (რამაზ ბოჭორიშვილი, თინათინ დავითაშვილი) — დაეხმარება ახალგაზრდებს სამომავლო კარიერის დაგეგმვაში; იბეჭდება მასალა, რომელიც აღწერს სასწავლო პროგრამებს, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ჩატარებულ საინტერესო ღონისძიებებს; რუბრიკით „ჩვენი ამაგდარი პედაგოგები“ წარმოგიდგენთ ჩვენს ღვაწლმოსილ პროფესორებს.

ჟურნალი გამოდის წელიწადში ერთხელ და ვრცელდება მთელი საქართველოს მასშტაბით მათემატიკის სამეცნიერო ცენტრებში, უნივერსიტეტებში, სკოლებში. ყოველი ნომრის გამოსვლის შემდეგ იმართება პრეზენტაცია და მოწვეულ სტუმრებს ურიგდებათ საჩუქრად. ჟურნალი იღებს სტატიებს ჩამოთვლილი განყოფილებების მიხედვით და, დადებითი რეცენზიის მიღების შემთხვევაში, იბეჭდება. სტატიის წარმოდგენისას დაცულ უნდა იქნეს ავტორებისათვის განკუთვნილი ინსტრუქციის მოთხოვნები.



გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები



ნატალია ჩინჩალაძე

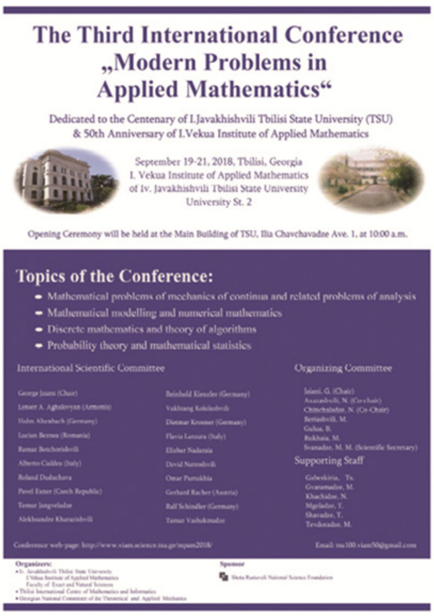
ასოცირებული პროფესორი
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, მექანიკის კათედრა
chinchaladze@gmail.com

პროფესორი გიორგი ჯაიანი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, მექანიკის კათედრა
george.jaiani@gmail.com

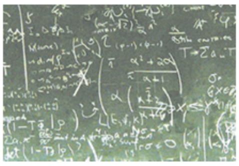
მიძღვნილი ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის დაარსებიდან 100 და ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დაარსებიდან 50 წლისთავისადმი

19-21 დეკემბერს, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის (თსუ) ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში ჩატარდა III საერთაშორისო კონფერენცია „გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები“, რომელიც მიეძღვნა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის დაარსებიდან 100 და ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დაარსებიდან 50 წლისთავს.



კონფერენცია გახსნა ინსტიტუტის დირექტორმა, პროფესორმა გიორგი ჯაიანმა. კონფერენციის მონაწილეებს წარმატებული მუშაობა უსურვა თსუ ადმინისტრაციის ხელმძღვანელმა, ქალბატონმა ნუნუ ოვსიანიკოვამ. დამსწრე საზოგადოებას მიესალმა და ინსტიტუტსა და უნივერსიტეტს საიუბილეო თარიღი მიულოცეს პროფესორებმა პაველ ექსნერმა (Dopler Institute for Mathematical Physics and Applied Mathematics, Prague, Czech Rep.; President of the European Mathematical Society), დიტმარ კრიონერმა (University of Freiburg, Germany), ჰოლმ ალტენბახმა (Otto-von-Guericke-University Magdeburg, Germany), რაინჰოლდ კინცლერმა (University of Bremen, Germany), ალბერტო ჩალდეამ (Universita di Basilica, Italy), ფლავია ლანძარამ (Rome University “La Sapienza”, Italy), რალფ მაიერმა (Mathematisches Institut, Universitaet Goettingen, Germany) და რამაზ აბესაძემ (თსუ პაატა გუგუშვილის სახელობის ეკონომიკის ინსტიტუტი). ამ უკანასკნელმა ინსტიტუტს გადასცა საიუბილეო ადრესი. ბუქარესტის უნივერსიტეტის პროფესორმა, რუმინეთის მეცნიერებათა აკადემიის სიმიონ სტოილოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორმა ლუსიენ ბეზნეამ (რუმინეთი), იუბილეებთან დაკავშირებით, ბუქარესტის უნივერსიტეტისა და სტოილოვის ინსტიტუტის ჯილდოები — საპატიო დიპლომები გადასცა, შესაბამისად, თსუ-ის უნივერსიტეტის ადმინისტრაციის ხელმძღვანელს, პროფესორ ნუნუ ოვსიანიკოვას და ინსტიტუტის დირექტორს, პროფესორ გიორგი ჯაიანს. ამ უკანასკნელს გადასცა აგრეთვე მოსწავლეთა 59-ე საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადის მედლის (კლუჟი, რუმინეთი, 2018) სასაჩუქრე ასლი. გაიმართა კონცერტი უნივერსიტეტის სტუდენტური ფოლკლორული ანსამბლების — „გორდელა“, „თბილისი“ და ქართული ცეკვების ქორეოგრაფიული ანსამბლის მონაწილეობით.

კონფერენციის თემატიკა განეკუთვნებოდა გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემებს, რომლებიც აქტუალურია საქართველოსთვის, განსაკუთრებით პრაქტიკაში გამოყენების თვალსაზრისით, ამასთან, თავისი მნიშვნელობით ეხმიანება თანამედროვე საერთაშორისო ტრენდებს წმინდა და გამოყენებით მათემატიკასა და მექანიკაში. პროექტი მიზნად ისახავდა მათემატიკისა და მექანიკის მიმართულებით მომუშავე მეცნიერების თანამშრომლობის გაღრმავებას და ახალი კონტაქტების დამყარებას, უახლესი შედეგების ურთიერთგაზიარებას. კონფერენციის მუშაობაში მონაწილეობას იღებდნენ როგორც მექანიკის დარგში მომუშავე მათემატიკოსები და ინჟინრები, ასევე ანალიზის მონათესავე საკითხებზე მომუშავე მათემატიკოსები.



პროგრამით განსაზღვრული იყო გახსნის (პაველ ექსნერი), დახურვის (დიტმარ კრონერი), 14 პლენარული და 20 სექციური მოხსენება. გარდა ამისა, გახსნის ცერემონიაზე გაკეთდა ორი მიმოხილვითი მოხსენება, რომელთაგან ერთი მიეძღვნა გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის დაარსებიდან 50 წლის იუბილეს (გიორგი ჯაიანი), მეორე 100 წლის მანძილზე მათემატიკის განვითარებას თსუ-ში (მომხსენებელი თამაზ თადუმაძე, თანაავტორი ომარ ფურთუხია).

თსუ გამომცემლობის მიერ გამოცემულ იქნა ბროშურები: „გმი 50" (ქართულად) და „VIAM 50" (ინგლისურად). მათში მოცემულია ინსტიტუტის მოკლე ისტორია, რომელსაც ახლავს ცალკეული მიმართულებებით სამეცნიერო-კვლევითი მუშაობის მოკლე მიმოხილვა. ქართულ და ინგლისურ ენებზე გამოიცა აგრეთვე ბროშურა „ადამიანი გაკვეთილი" (შემდგენლები: მარინე ვეკუა, ილია თავხელიძე), რომელიც მიეძღვნა ინსტიტუტის დამაარსებელსა და პირველ დირექტორს — ილია ვეკუას.

ოფიციალურ სადილზე უცხოელ მეცნიერებს გადაეცათ საიუბილეო თარიღთან დაკავშირებული სამახსოვრო მედლები.

დახურვაზე უცხოელი მონაწილეების სახელით გამოსულმა დიტმარ კრიონერმა მაღალი შეფასება მისცა როგორც კონფერენციის ორგანიზაციულ, ასევე სამეცნიერო დონეს და ხაზი გაუსვა მის მნიშვნელობას.

სრული ინფორმაცია კონფერენციის თაობაზე განთავსებულია ვებგვერდზე:
http://www.viam.science.tsu.ge/mpam2018/
ვებგვერდის განახლება ხდებოდა კონფერენციის მომზადება-ჩატარების პროცესში.

მაქსიმუმის პრინციპის აღმოჩენა

რევაზ გამყრელიძე

საქართველოს და რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი, ლენინური პრემიის ლაურეატი; მინიჭებული აქვს საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ა.რაზმაძის სახელობის პრემია და თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ივანე ჯავახიშვილის სახელობის მედალი.

1. დროის მიხედვით ოპტიმალური ამოცანის ფორმულირება

მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესზე, ნიცაში, 1970 წელს ლ.ს. პონტრიაგინმა პლენარული მოხსენება გააკეთა დიფერენციალურ თამაშთა თეორიაში. მაგალითად მან განიხილა თვითმფრინავი-მდევრის მარტივი მათემატიკური მოდელი. მოხსენების შემდეგ პროფ. ა. გროთენდიკმა მას დაუსვა რიტორიკული კითხვა: მოხსენების ფუნდამენტურმა, მათემატიკურმა ნაწილმა აუდიტორიაზე ღრმა შთაბეჭდილება მოახდინა — აღნიშნა გროთენდიკმა, მაგრამ თეორიას აქვს მეორე, გამოყენებითი მხარე და გრძნობდა თუ არა მორალურ პასუხისმგებლობას პონტრიაგინი საბჭოთა მილიტარისტული პოლიტიკის გამო? პონტრიაგინის პასუხი იყო პირდაპირი და უხეში: ნებისმიერი ინტელექტუალური საკითხი განვითარებულ საზოგადოებაში ღიად უნდა განიხილებოდეს. პროფ. გროთენდიკის ლოგიკას თუ გავყვებით, თქვა პონტრიაგინმა, მაშინ უარი უნდა ვთქვათ აბსტრაქტულ ალგებრაზეც, რადგან კრიპტოგრაფია, რომელიც სასრული ველების თეორიას ეფუძნება, უფრო დიდ კორელაციაშია მილიტარიზმთან, ვიდრე განხილული დიფერენციალური თამაშები.

ლ.ს.პონტრიაგინი მეოცე საუკუნის ერთ-ერთი წამყვანი მეცნიერი იყო მსოფლიოში. იგი გამორჩეული სპეციალისტი იყო ალგებრული ტოპოლოგიის და ტოპოლოგიური ალგებრის. ორმოცდაათიანი წლების შუაში მან საბოლოოდ უარი თქვა ტოპოლოგიაზე, რასაც არასდროს აღარ დაბრუნებია და მთელი ძალისხმევა მიმართა საინჟინრო ამოცანების მათემატიკური საკითხების დამუშავებისაკენ. ვ.ა. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში მან დააარსა სემინარი, სადაც მომხსენებლად ხშირად იწვევდა ინჟინერ-თეორეტიკოსებს, რადგან თვლიდა, რომ საინჟინრო ამოცანების ინჟინრული მხარის ცოდნა აუცილებელი იყო შესაბამისი ამოცანების ადეკვატური მათემატიკური აპარატის შესაქმნელად. სემინარის მუშაობის პროცესში მალევე გამოიკვეთა ორი მათემატიკური პრობლემა, ერთ-ერთმა წარმოშვა დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების სინგულარული შეშფოთების ზოგადი თეორია, ხოლო მეორემ მიგვიყვანა მაქსიმუმის პრინციპის აღმოჩენასთან და ოპტიმალური მართვის თეორიის შექმნასთან.

სწრაფქმედების მიმართ ზოგადი ოპტიმალურობის პირობის ფორმულირება პონტრიაგინმა შეძლო კონკრეტული მართვის სამი პარამეტრის მქონე მეხუთე რიგის სისტემის კვლევის შედეგად. მართვის ეს სისტემა აღწერდა თვითმფრინავის ოპტილურ მანევრს და ამ ამოცანის ანალიზი პონტრიაგინს სამხედრო ინჟინრებმა სთხოვეს. ეს მოხდა 1955 წლის ადრე გაზაფხულზე. სისტემა მართვის ორ პარამეტრზე წრფივად იყო დამოკიდებული და მათი მოდული იყო შემოსაზღვრული, რის გამოც თავიდანვე ნათელი იყო, რომ ამოცანის ამოხსნა კლასიკური გზით, ე.ი. როგორც ვარიაციული ამოცანის შესაბამისი ეილერის განტოლებით, შეუძლებელი იქნებოდა. ამოცანა ძალზე სპეციფიკური იყო, რის გამოც პონტრიაგინი მივიდა დასკვნამდე, რომ მის

ამოსახსნელად საჭირო იყო ზოგადი ხასიათის ახალი მიდგომა. მახსოვს, ნახევრად ხუმრობით მან თქვა, რომ „საჭიროა ახალი ვარიაციათა აღრიცხვის აგება“. საბოლოოდ მან ჩამოაყალიბა შემდეგი ზოგადი ოპტიმალური ამოცანა.

n-განზომილებიან $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$-თვის ($T$ ზედა ინდექსად, ყველგან ქვემოთ, ტრანსპონირებულს აღნიშნავს) განვიხილოთ „მდგომარეობათა სივრცეში“ განსაზღვრული r-მართვის

$$u = (u^1, u^2, \ldots, u^r)^T \in U \subset \mathbb{R}^r$$

პარამეტრით და

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), f = (f^1, f^2, \ldots, f^n)^T \qquad (1)$$

n-ავტონომიური სისტემით მოცემული მართვის ობიექტი. თავიდან განიხილეს შემთხვევა, როდესაც u-მართვის ვექტორი მნიშვნელობებს იღებდა U ღია სიმრავლეში. ჩაკეტილი U-ს შემთხვევა, რომელიც მნიშვნელოვანია გამოყენებების თვალსაზრისით, გამოკვლეულ იქნა მოგვიანებით. მართვის პარამეტრის აღმნიშვნელი სიმბოლო u, რომელიც დამკვიდრდა და დღემდე გამოიყენება სამეცნიერო ლიტერატურაში, რუსული სიტყვა „управление“-დან მოდის.

ოპტიმალური მართვის ამოცანის ფორმულირება. მოცემული $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ სასაზღვრო მნიშვნელობებისათვის ვიპოვოთ $u(t) \in U, t \in [t_0, t_1]$ მართვა, რომელიც x_0 ფაზურ წერტილს გადაიყვანს x_1 ფაზურ წერტილში მოძრაობის

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t))$$

კანონით.

ამრიგად, მივედით დროის მიმართ ისეთი ოპტიმალური მართვის $u(t)$ ფუნქციის და შესაბამისი $x(t), t_0 \le t \le t_1]$ ოპტიმალური ტრაექტორიის პოვნაზე, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ სასაზღვრო პირობებს:

$$x^i(t) = f^i\big(x(t), u(t)\big), x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_{1,} \quad i = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

და გადასვლის დრო არის მინიმალური:

$$t_1 - t_0 = min.$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ ზოგადი ოპტიმალური ამოცანა, რომელიც ახდენს ნებისმიერი ინტეგრალური ტიპის ფუნქციონალის მინიმიზაციას, ადვილად დაიყვანება დროის მიხედვით ოპტიმალურ ამოცანაზე და აგრეთვე, ამ უკანასკნელის ამოხსნით ადვილად გადავლახავთ ზოგადი ოპტიმალური ამოცანის ყველა სირთულეს.

პირველი და ყველაზე მნიშვნელოვანი ნაბიჯი ამოცანის საბოლოო ამოხსნისაკენ გადადგა ლ.ს.პონტრიაგინმა ამოცანის დასმიდან სამი დღის შემდეგ, უფრო ზუსტად, ორი უძილო ღამის შემდეგ. მძიმე უძილობის მდგომარეობაში მყოფი და მწოლიარე, იგი, ჩვეულებრივ, ინტენსიურად ფიქრობდა ხოლმე მათემატიკურ პრობლემებზე. უძილობამ განსაკუთრებით იჩინა თავი მისი სიცოცხლის უკანასკნელ წლებში, რის გამოც იღებდა დიდი რაოდენობით ბარბიტურატებს. თავისი საოცარი გეომეტრიული ინტუიციის წყალობით, მარტივი მოსაზრებებიდან გამომდინარე, პირველი რიგის ვარიაციის ქვემოთ მოყვანილი განტოლების ორადობის თვისების გათვალისწინებით ჩამოაყალიბა აუცილებელი პირობა დამხმარე

$$\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$$

კოვექტორული ფუნქციის შემოღებით, რომელიც აკმაყოფილებს (1)-ის შეუღლებულ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\big(x(t), u(t)\big), i = 1, \ldots, n, \Leftrightarrow \frac{d\psi}{dt} = -\psi \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), u(t)\big).$$

ეს იყო ოპტიმალური მართვის თეორიაში ზოგადი სახის შეუღლებული სისტემის პირველი გამოყენება, რომელმაც გადამწყვეტი როლი ითამაშა მთელი თეორიის შემდგომ განვითარებაში. ფაქტობრივად, ოპტიმალური მართვის თეორიაში პონტრიაგინმა პირველმა ააგო, როგორც ახლა მას უწოდებენ, ვექტორული ველების ჰამილტონური ლიფტი ოპტიმალური ამოცანის მდგომარეობათა სივრცის კომხებ ფიბრაციაში, ე.ი. მან ააგო ამოცანის ფაზური სივრცე.

2. აუცილებელი პირობების თავდაპირველი სახე

აუცილებელი პირობები, რომლებიც მათი გააზრებისთანავე პონტრიაგინმა სემინარზე წარმოადგინა, თავმოყრილია შემდეგ გამოსახულებებში:

$$\left.\begin{array}{lr}\frac{dx(t)}{dt} = f\big(x(t),u(t)\big), x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1, & (3.1)\\ \frac{d\psi}{dt} = -\psi\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),u(t)\big), & (3.2)\\ \psi(t)\frac{\partial f(x(t),u(t))}{\partial u^j} = 0, & (3.3)\\ u(t)\in U, \forall t\in[t_0,t_1], j=1,\dots,r. & \end{array}\right\} (3)$$

ზემოთ მოყვანილი ტოლობების არსი მდგომარეობს იმაში, რომ, თუ $x(t), u(t)$ ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია, მაშინ არსებობს $\psi(t)$ კოვექტორული ფუნქცია, ისეთი, რომ $\psi(t), x(t), u(t), t_0 \le t \le t_1$ არის (3.1)-(3.2) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი და ნებისმიერი t-სათვის ამ ამონახსნების გასწვრივ სრულდება (3.3) r-სასრული რაოდენობის ტოლობები.

მოყვანილ დებულებაში იგულისხმება, რომ მართვის U შესაძლო მნიშვნელობები ღიაა, თუმცა, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, პონტრიაგინისათვის თავიდანვე ნათელი იყო, რომ დებულება სამართლიანი უნდა ყოფილიყო გაცილებით ფართო კლასის U-სათვის, რომელიც თავის თავში შეიცავდა როგორც ღია U-ს, ასევე მის ჩაკეტვასაც.

მოვიყვან პონტრიაგინის საკმაოდ მარტივ და გეომეტრიულ მოსაზრებას, რომლიდანაც გამომდინარეობს (3) ტოლობები.

განვიხილოთ $u(t)$ მართვის ნებისმიერი დასაშვები ვარიაცია:

$$\delta u(t) = ((\delta u^1 t),\dots,\delta u^r(t))^T, u(t) + \\ +\delta u(t)\epsilon U, t_0\le t\le t_1.$$

თუ შესაბამისი ტრაექტორიის ვარიაციას δu-ს მიმართ ტეილორის მწკრივად გავშლით და მწკრივში კვადრატული და უფრო მაღალი რიგის წევრებს უგულებელვყოფთ, მივიღებთ:

$$\delta x(t) = \big(\delta x^1(t),\dots,\delta x^n(t)\big)^T, t_0\le t\le t_1$$

ოპტიმალური ტრაექტორიის პირველ (წრფივ) ვარიაციას, რომელიც აკმაყოფილებს სტანდარტულ წრფივ ვარიაციულ განტოლებას:

$$\frac{d}{dt}\delta x = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),u(t)\big)\delta x + \\ +\frac{\partial f}{\partial u}\big(x(t),u(t)\big)\delta u(t), \delta x(t_0)=0. \qquad (4)$$

$\{\delta u(t), t_0\le t\le t_1\} \mapsto \delta x(t_1)$ ასახვა იძლევა წრფივ ოპერატორს $\delta u(t), t_0\le t\le t_1$ ვარიაციების წრფივი სივრციდან $\mathbb{R}^n$ მდგომარეობათა სივრცეში. რადგან u-ს დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე ჩავთვალეთ ღიად, ამიტომ $\delta u(t)$ დასაშვები ვარიაციების სიმრავლე იქნება ნებისმიერი (უბან-უბან მუდმივი) ფუნქცია. აქედან,

$$L = x(t_1) + \{\delta x(t_1)|\delta x(t_0)=0\} = \\ = x(t_1)+\Gamma\subset\mathbb{R}^n \qquad (5)$$

იქნება $x(t_1)$-ზე გამავალი სიბრტყე $\mathbb{R}^n$-ში. რადგან $x(t), t_0\le t\le t_1$ ოპტიმალურია, თეორემიდან არაცხადი ფუნქციის შესახებ გამომდინარეობს, რომ:

$$dimL = dim\Gamma \le \mathrm{n}-1.$$

ამიტომ არსებობს $\chi=(\chi_1,\dots,\chi_n)$ (არანულოვანი) კოვექტორი, რომელიც Γ-ს ორთოგონალურია:

$$\chi\delta x(t_1) = \sum_{\alpha=1}^{n}\chi_\alpha\delta x^\alpha(t_1) = 0\ \forall\,\delta x(t_1)\in\Gamma.$$

ეს უკანასკნელი არის გეომეტრიული პირობა, საიდანაც (3) განტოლებები უშუალოდ გამომდინარეობენ, თუ $\delta x(t_1)$-ს გამოვსახავთ $\delta u(t)$-თი, რაც, უშუალოდ, (4) სისტემის ინტეგრებით მიიღება. ამ მიზნის მისაღწევად განვიხილოთ:

$$\frac{d}{dt}\delta x = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),u(t)\big)\delta x$$

ერთგვაროვანი სისტემის შესაბამისი $\Phi(t)$ ფუნდამენტური და მისი შებრუნებული $\Psi(t) = \Phi^{-1}(t)$ მატრიცები. ისინი აკმაყოფილებენ მატრიცულ განტოლებათა შემდეგ სისტემებს:

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),u(t)\big)\Phi, \\ \frac{d}{dt}\Psi = -\Psi\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),u(t)\big). \qquad (6)$$

(4) არაერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნი $\delta x(t_0)=0$ სასაზღვრო პირობებში წარმოიდგინება:

$$\delta x(t) = \Phi(\mathrm{t})\int_{t_0}^{t}\Psi(\tau)\frac{\partial f}{\partial u}\big(x(\tau),u(\tau)\big)\,\delta u(\tau)d\tau,$$

$$t\in[t_0,t_1]$$

სახით, საიდანაც:

$$\chi\delta x(t_1) = \chi\Phi(\mathrm{t}_1)\int_{t_0}^{t_1}\Psi(\tau)\frac{\partial f}{\partial u}\big(x(\tau),u(\tau)\big)\,\delta u(\tau)d\tau = \\ = 0, \forall\delta u(\tau). \qquad (7)$$

n-განზომილებიანი

$$\psi(t) = \big(\psi_1(t),\dots,\psi_n(t)\big) = \chi\Phi(t_1)\Psi(t), \\ t_0\le t\le t_1$$

ვექტორი არანულოვანია და (6)-ის თანახმად აკმაყოფილებს:

$$\frac{d}{dt}\psi = -\psi\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),u(t)\big)$$

დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც (3) სისტემის მეორე განტოლების შეუღლებულია. ამრიგად, (7) ტოლობა გადაიწერება:

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi(\tau)\frac{\partial f}{\partial u}\big(x(\tau),u(\tau)\big)\,\delta u(\tau)d\tau = 0 \qquad (8)$$

სახით. რადგან $\delta u(t), t_0 \leq t \leq t_1$ მართვის ვარიაცია ნებისმიერი ვექტორული ფუნქციაა, მივიღებთ (3) სისტემის მესამე განტოლებას და, ამრიგად, ზემოთ ჩამოყალიბებულ ოპტიმალურობის პირობას. (3) სისტემიდან მიიღება კლასიკურ ვარიაციათა აღრიცხვაში ცნობილი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება ლაგრანჟის ამოცანისათვის.

3. მეორე ვარიაცია

როგორც კი (3.1)-(3.3) განტოლებები იქნა მიღებული, პონტრიაგინმა მთელი თავისი არსით გამოიცნო $\psi(t)$ კოვექტორული ფუნქციისა და (2) შეუღლებული სისტემის მნიშვნელობა ამოცანისათვის. საზოგადოდ, (3.3) განტოლება მან განიხილა, როგორც (3.1)-(3.2) სისტემიდან r რაოდენობის მართვის $u^1,\dots,u^r$ პარამეტრების გამომრიცხველი პირობა. ამით შესაძლებელი გახდა $2n$-რიგის განტოლებათა სისტემა x-სათვის $x(t_0) = x_0$ საწყისი პირობით და ψ-სათვის ნებისმიერი არანულოვანი საწყისი მნიშვნელობისათვის ცალსახად ამოხსნილიყო. ამ სახის ყველა ამონახსნი გამოცხადდა ოპტიმალური ამოცანის ექსტრემალებად, რომელთა შორის უნდა ვეძებოთ ოპტიმალური ამონახსნი.

პონტრიაგინის უნიკალური იდეა მართვის პარამეტრების გამორიცხვის უნივერსალური პროცედურის შესახებ, რომელსაც, საწყისი პირობების შემთხვევაში, ამოცანა დაჰყავს $2n$ განტოლებათა სისტემის ექსტრემალების პოვნაზე, გამომჟღავნდა მაქსიმუმის პრინციპის საბოლოო ვარიანტში, რომელიც მან ამ თემაზე გაკეთებული მოხსენებიდან რამდენიმე თვის შემდეგ ჩამოაყალიბა. ამგვარ ფორმულირებამდე პონტრიაგინი მივიდა სემინარებზე საკითხის რამდენჯერმე განხილვის შემდეგ.

ერთ-ერთი მოხსენების შემდეგ პონტრიაგიმა მე და ვ.ბ.ბოლტიანსკის, როგორც მის ყოფილ ასპირანტებს, გვთხოვა დავინტერესებულიყავით პრობლემით და ჩავრთულიყავით კვლევებში. ბოლტიანსკის ეჭირა მეცნიერ-თანამშრომლის თანამდებობა დიფერენციალური განტოლებების განყოფილებაში, რომელსაც პონტრიაგინი ხელმძღვანელობდა და ფორმალურად ითვლებოდა პონტრიაგინის თანაშემწედ: ეხმარებოდა მას ყოველდღიურ გამოთვლებსა და ხელნაწერების რედაქტირებაში, მე კი განყოფილების ახალგაზრდა წევრი ვიყავი.

პრობლემისადმი პონტრიაგინისეული ხედვა ადრეულ ეტაპზე ასეთი იყო. განვიხილოთ (3.1) მართვის სისტემა და, ნაცვლად ფიქსირებული სასაზღვრო პირობებისა, დავაფიქსიროთ მხოლოდ x_0 საწყისი წერტილი. ავიღოთ ნებისმიერი (არანულოვანი) $\psi(t_0) = \psi_0 \neq 0$ საწყისი მნიშვნელობა და ამოვხსნათ $2n + r$ განტოლებისაგან შემდგარი $2n + r$ რაოდენობის x^i, ψ_j, u^k უცნობებზე დამოკიდებული (3.1)-(3.3) სისტემა იმ პირობით, რომ მოძრაობა იწყება ექსტრემალის გასწვრივ x_0საწყისი წერტილით. ეს შესაძლებელია, რადგან r მართვის პარამეტრი გამოირიცხება სისტემიდან (3.3) თანადობის გამო. ამრიგად, დარჩება $2n$ განტოლება, რომლებიც დამოკიდებულია $x^i, u^k 2n$-რაოდენობის უცნობზე და აკმაყოფილებენ $x(t_0) = x_0, \psi(t_0) = \psi_0$ სასაზღვრო პირობებს. რადგან (3.2) შეუღლებული სისტემა წრფივია ψ-ს მიმართ, $\psi(t)$ ფუნქცია განისაზღვრება მუდმივი სკალარული მამრავლის სიზუსტით, ამიტომ $\psi(t_0)$-ს ნორმირებაა შესაძლებელი და, ამრიგად, მიიღება ψ-ს საწყის მნიშვნელობათა $n-1$-განზომილებიანი სფერო, რომელიც, თავის მხრივ, იძლევა ექსტრემალების $n-1$-პარამეტრიზებულ ოჯახს, რომლებიც x_0 წერტილში იწყებიან.

ამ სცენარის თანახმად, პროგრამის საბოლოო მიზანი იყო (3.1)-(3.3) სისტემის ამონახსნის, ე.ი. $\psi(t), x(t);\ x(t_0) = x_0, \psi(t_0) = \psi_0$ ექსტრემალის გამოსახვა ψ_0 საწყისი მნიშვნელობის საშუალებით. ახლა ეს ამოცანა მართვის უმარტივესი ამოცანაა, მაგრამ, როცა ჯერ კიდევ არ იყო ჩამოყალიბებული მაქსიმუმის პრინციპი, რაიმე არატრივიალურ შედეგზე ფიქრი პრაქტიკულად შეუძლებელი იყო.

მე პონტრიაგინის გეომეტრიული მიდგომის შთაბეჭდილების ქვეშ ვიყავი და გადავწყვიტე მიმესადაგებინა იგი მეორე რიგის მიახლოებისათვის. გადაწყდა, რომ პონტრიაგინი და ბოლტიანსკი მართვადობის პრობლემებზე იმუშავებდნენ, ხოლო მე კი ამოცანის მეორე ვარიაციის შესწავლას დავიწყებდი. ამ ერთობლივმა ძალისხმევამ მიგვიყვანა მაქსიმუმის პრინციპის აღმოჩენამდე.

ოპტიმალობის აუცილებელი პირობა, რომელიც გამოსახულია (3.1)-(3.3) განტოლებებით, მიღებულია ამოცანის პირველი რიგის (რწფივი) აპროქსიმაციით. ის დამოკიდებული არ არის „ზოგად მდგომარეობაზე“, რომელიც პონტრიაგინმა მხოლოდ (3.3) „სასრული განტოლების“ ინტერპრეტაციის დროს გამოიყენა, როგორც გამორიცხვის რეგულარული პროცედურა. ჩემ მიერ განხილული მეორე ვარიაცია თავიდანვე მოითხოვდა „ზოგად მდგომარეობას“, რისგანაც თავის დაღწევა მხოლოდ თეორიის ბოლო ეტაპზე მოხდა, ბოლტიანსკის მიერ მაქსიმუმის პრინციპის დამტკიცების შემდეგ. ამ ეტაპზე მართვის პარამეტრის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე კვლავ ღიად იგულისხმებოდა.

განვიხილოთ ოპტიმალური ამოცანის „ზოგადი მდგომარეობის“ ნებისმიერი $x(t), u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ ისეთი ამონახსნი, რომლისთვისაც L სიბრტყეს (5)-დან მაქსიმალური განზომილება აქვს:

$$dimL = dim\Gamma = \mathrm{n} - 1,$$

ხოლო $x(t)$-ს ტრაექტორია გადაკვეთს L-ს $x(t_1)$ წერტილში ტრანსვერსალურად (იგი არ ეხება L-ს). მაშასადამე, L მდებარეობს $\mathbb{R}^n$-ის ორ სხვადასხვა ნახევარსივრცეში: $\mathbb{R}^n_-$-ში მანამ, სანამ $x(t)$ გადაკვეთს L-ს და $\mathbb{R}^n_+$-ში — გადაკვეთის შემდეგ. $\delta u(t)$ მეორე ვარიაცია პირველი რიგით წაანაცვლებს $x(t_1)$ ბოლო წერტილს L ჰიპერსიბრტყეში: $x(t_1) + \delta x(t_1) \in L$. $\Delta x(t_1)$ ნაზრდი არაწრფივად არის დამოკიდებული δu-ზე და, საზოგადოდ, Γ სივრცის გარეთ მდებარეობს:

$$x(t_1) + \Delta x(t_1) \in \mathbb{R}^n_- \text{ ან } x(t_1) + \Delta x(t_1) \in \mathbb{R}^n_+.$$

ამის შემდეგ, ქვემოთ, $\delta x(t)$ პირველ ვარიაციას აღვნიშნავთ $\delta_1 x(t)$-თი. დავუშვათ, K იმ წრფივი ოპერატორის ბირთვია, რომელიც მართვის პარამეტრების შეშფოთებების სივრცეს, როდესაც $t = t_1$, ასახავს $x(t)$-ს პირველი ვარიაციების სივრცეში და წარმოიდგინება ასეთი სახით:

$$\{\delta u(t), t_0 \leq t \leq t_1\} \mapsto \delta x(t_1) =$$

$$= \Phi(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Psi(\tau) \left\| \frac{\partial f^i}{\partial u^j}\big(x(\tau), u(\tau)\big) \right\| \delta\, u(\tau) d\tau.$$

$x(t)$-ს მეორე ვარიაცია — $\delta_2 x(t), t_0 \leq t \leq t_1$ განვსაზღვროთ როგორც:

$$\frac{d}{dt}\delta_2 x = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), u(t)\big)\delta_2 x +$$

$$+Q\big(\delta u(\tau), \delta u(\tau)\big), \delta_2 x(t_0) = 0$$

წრფივ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნი, სადაც Q არის ვექტორულმნიშვნელობიანი ინტეგრალი $\delta u(t)$, $t_0 \leq t \leq$ $\leq t_1$-ს მიმართ მწკრივად გაშლის კვადრატულ წევრში. მისი გამოთვლა შესაძლებელია. იგი წარმოადგენს $\Delta x(t)$-ს $\delta u(t)$-ს მიმართ ტეილორის მწკრივის კვადრატულ წევრს. მიღებული განტოლება (4)-საგან განსხვავდება მხოლოდ არაერთგვაროვანი წევრით. ბოლო $x(t_1)$ წერტილის მეორე რიგით წანაცვლება მოიცემა $\delta_1 x(t_1) + \delta_2 x(t_1)$ ვექტორით.

„ზოგადი მდგომარეობის“ $x(t), t_0 \leq t \leq t_1$ ოპტიმალური ტრაექტორიისათვის მნიშვნელოვანი გეომეტრიული ფაქტი მდგომარეობს დებულებაში იმის შესახებ, რომ K ბირთვზე მისი ბოლო წერტილის მეორე რიგის წანაცვლება ეკუთვნის $\mathbb{R}^n_-$-ს:

$$x(t_1) + \delta_1 x(t_1) + \delta_2 x(t_1) \in \mathbb{R}^n_- \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t_1) + \delta_2 x(t_1) \in \mathbb{R}^n_- \forall \delta u \in K.$$

ამრიგად, მივდივართ დასკვნამდე, რომ (3.1)-(3.3) სისტემას აუცილებელი პირობის სახით ემატება მეორე რიგის პირობა, რომელიც მდგომარეობს შემდეგი $\delta u \in K$-ს მიმართ ინტეგრალური კვადრატული ფორმის არადადებითობაში, იმ დაშვებით, რომ L-ის ტრანსვერსალური $\psi(t_1)$ კოვექტორი მიმართულია საჭირო მხარეს ($\mathbb{R}^n_+$-საკენ):

$$\psi(t_1)\delta_2 x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \psi(\tau) Q\big(\delta u(\tau), \delta u(\tau)\big)\, d\tau \leq$$

$$\leq 0, \forall \delta u \in K.$$

ამ ინტეგრალური კვადრატული ფორმის თვისებების კვლევის შედეგად მივედი დასკვნამდე, რომ K-ზე ამ ფორმის არადადებითობა იწვევს K-ზე მისი სინგულარული ნაწილის

არადადებითობას, საიდანაც გამომდინარეობს მეორე რიგის ოპტიმალურობის პირობის საბოლოო ფორმულირება: ნებისმიერი „ზოგადი მდგომარეობის“ $x(t), u(t), t_0 \leq t \leq t_1$ ოპტიმალური ამონახსნი აკმაყოფილებს (3) პირველი რიგის პირობებს და ამასთან,

$$v^* \left\| \psi(t) \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \big(x(\tau), u(\tau)\big) \right\| v \leq 0,$$

$$\forall v \in \mathbb{R}^r, \forall t \in [t_0, t_1]$$

კვადრატული ფორმა წერტილობრივად არადადებითია ნებისმიერი $v \subset \mathbb{R}^r$-სათვის.

4. მაქსიმუმის პრინციპის საბოლოო სახე

მიღებულ (3.1)-(3.3), (8) ოპტიმალურობის განტოლებებში სიმბოლოების მდგრადი განმეორება გარკვეული კანონზომიერებით შეიმჩნევა. კერძოდ,

$$H(\psi, x, u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x, u) = \psi f(x, u) \qquad (9)$$

სამი ψ, x, u ცვლადის ფუნქცია და მისი წარმოებული ყოველ გამოსახულებაში გვხვდება. ეს საშუალებას გვაძლევს (3.1)-(3.3) გადავწეროთ ქვემოთ მოყვანილი (10.1) ჰამილტონური სისტემის სახით (9) ჰამილტონიანით და დამატებითი (10.2)-(10.3) პირობებით:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Psi}\big(\psi(t), x(t), u(t)\big), \\ \frac{d\psi(t)}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\big(\psi(t), x(t), u(t)\big) \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u^j}\big(\psi(t), x(t), u(t)\big) = 0,$$

$$\forall t \in [t_0, t_1], j = 1, \ldots, r, \qquad (10.2)$$

$$v^* \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial u^i \partial u^j} \big(\psi(t), x(t), u(t)\big) \right\| v \leq$$

$$\leq 0, \forall v \in \mathbb{R}^r. \qquad (10.3)$$

ამრიგად, „ზოგადი მდგომარეობის“ ექსტრემალები არიან (10.1) ჰამილტონური სისტემის ამონახსნები და, (10.2)-ის თანახმად, წარმოადგენენ u მართვის პარამეტრების მიმართ (9) ჰამილტონიანის სტაციონარულ წერტილებს. გარდა ამისა, (10.3)-დან გამომდინარეობს, რომ იმ რეგულარული ექსტრემალებისათვის, რომელთათვისაც (10.3) ფორმა განსაზღვრულია, H ფუნქცია აღწევს u-ს მიმართ თავის ლოკალურ მაქსიმუმს. ორი, (10.2) და (10.3) დამოუკიდებელი ტოლობა შესაძლებელია გაერთიანდეს ერთ პირობად:

$$H\big(\psi(t), x(t), u(t)\big) =$$

$$= max_{v \in O_t} H(\psi(t), x(t), v), \qquad (10.4)$$

სადაც O_t არის $u(t)$-ს მიდამო. გარდა ამისა, (10.1)-(10.2) განტოლებებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\frac{dH}{dt}\big(\psi(t), x(t), u(t)\big) =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial \psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} = 0.$$

ადვილი საჩვენებელია აგრეთვე, რომ $H\big(\psi(t), x(t), u(t)\big)$ ფუნქცია უწყვეტია t-ს მიმართ $u(t)$ მართვის ნახტომის წერტილებშიც კი. მაშასადამე, იმის გათვალისწინებით, რომ $x(t)$ ტრაექტორია ტრანსვერსალურია L-ის $x(t_1)$ წერტილში, ვიღებთ:

$$H\big(\psi(t), x(t), u(t)\big) \equiv const =$$

$$= \psi(t_1) f(x(t_1), u(t_1)) > 0. \qquad (11)$$

მას შემდეგ, რაც (10.1)-(10.3) განტოლებები დავწერეთ, პონტრიაგინი მიხვდა, რომ მართვის პარამეტრთა გამორიცხვის მეთოდი, რომელსაც ის ეძებდა, ნაპოვნია! მან (10.4) ლოკალური მაქსიმუმის პირობა მთელ U-ზე გლობალური პირობით შეცვალა, ე.ი. ქვემოთ მოყვანილი (12) „პონტრიაგინის მაქსიმუმის პირობით“, რომელმაც U სიმრავლის მიმართ ყველა სახის შეზღუდვა მოხსნა:

$$H\big(\psi(t), x(t), u(t)\big) =$$

$$= max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u) = const \geq 0. \qquad (12)$$

ამრიგად, იგი მივიდა მაქსიმუმის პრინციპის საბოლოო ფორმულირებაზე (10.1) ჰამილტონური სისტემის და მაქსიმუმის (12) პირობის გათვალისწინებით, ამასთან, „ზოგადი მდგომარეობის“ და U სიმრავლეზე დამატებითი პირობის დადების გარეშე.

მაქსიმუმის პრინციპი. *ვთქვათ, მოცემულია:*

$$\dot{x} = f\big(x(t), u(t)\big), x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$u = (u^1, u^2, \ldots, u^r) \in U \subset \mathbb{R}^r$$

მართვის განტოლება, სადაც U დასაშვებ მართვათა ნებისმიერი სიმრავლეა. შემოვიტანოთ ამოცანის:

$$H(\psi,x,u)=\psi f(x,u)=\sum_{\alpha=1}^{n}\Psi\psi_{\alpha}f^{\alpha}(x,u)$$

ჰამილტონის ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია სამ ცვლადზე: $\psi(t)=(\psi_1(t),\dots,\psi_n(t))$ კოვექტორზე და ორ — x,u ვექტორზე. თუ $u(t),t_0\le t\le t_1$ დროის მიხედვით ოპტიმალური მართვაა, ხოლო $x(t),t_0\le t\le t_1$ ოპტიმალური ტრაექტორიაა დროის მიხედვით:

$$\frac{dx}{dt}=f(x(t),u(t)),\quad t_0\le t\le t_1;t_1-t_0=min,$$

მაშინ არსებობს ისეთი არანულოვანი კოვექტორული $\psi(t)$ ფუნქცია, რომ:

$$\psi(t),x(t),u(t),t_0\le t\le t_1$$

იქნება შემდეგი (13.1) ჰამილტონური სისტემის ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს (13.2) პირობებს:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial\Psi}\big(\psi(t),x(t),u(t)\big),\\ \frac{d\psi(t)}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x}\big(\psi(t),x(t),u(t)\big),\end{aligned}\right\}\qquad(13.1)$$

$$\left.\begin{aligned}&H\big(\psi(t),x(t),u(t)\big)=\\ &=max_{u\in U}H(\psi(t),x(t),u)=const\ge 0\\ &\forall t\in[t_0,t_1].\end{aligned}\right\}\qquad(13.2)$$

ამ ფორმულირებაში მაქსიმუმის (13.2) პირობა არის არა მარტო u მართვის პარამეტრის გამორიცხვის უნივერსალური მეთოდი, არამედ იგი ახორციელებს ლეჟანდრის გარდაქმნას, რომელიც მდგომარეობათა სივრცის (x,u) ცვლადებს გადაიყვანს ფაზური სივრცის (ψ,x) ცვლადებში.

5. მაქსიმუმის პრინციპის სიმპლექტური ინვარიანტობა

მაქსიმუმის პრინციპის სრული დამტკიცება მისი ჩამოყალიბებიდან დაახლოებით ერთი წლის შემდეგ მოხერხდა. არ ჩავუღრმავდები მისი დამტკიცების ისტორიის დეტალებს, აღვნიშნავ მხოლოდ, რომ გადამწყვეტი როლი თეორემის დამტკიცებაში ითამაშა ბოლტიანსკის მიერ შემოღებულმა „ნემსისებრი ვარიაციის“ ცნებამ მართვის ფუნქციისათვის. ეს ვარიაცია 0-ის ტოლია დროის ინტერვალზე თითქმის ყველგან, გარდა ზოგიერთი სეგმენტისა, რომელთა საერთო სიგრძე საკმაოდ მცირეა, ამ სეგმენტებზე კი ვარიაცია იღებს ნებისმიერ დასაშვებ მნიშვნელობას. გარდა ამისა, ამ ქვესეგმენტების კომბინაცია ამოზნექილი სიმრავლეა, როგორიც არ უნდა იყოს U. ეს იყო ბოლტიანსკის ფუნდამენტური წვლილი თეორიაში. თეორემის დასამტკიცებლად ბოლტიანსკი იყენებდა ორივე ტიპის ვარიაციას, რის გამოც U სიმრავლისათვის გარკვეული შეზღუდვები მაინც რჩებოდა. თუმცა სემინარზე მისი მოხსენების შემდეგ პონტრიაგინი მიხვდა, რომ თეორემის დამტკიცება შესაძლებელი იყო ჩვეულებრივი ვარიაციის გარეშე. სწორედ ასეთი სახით გამოვაქვეყნეთ (ბოლტიანსკი, გამყრელიძე, პონტრიაგინი) მაქსიმუმის პრინციპის საბოლოო დამტკიცება და იმავე სახით წარადგინა პონტრიაგინმა შედეგი მათემატიკური საზოგადოების წინაშე მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესზე, ედინბურგში, 1958 წელს. ნემსისებრი ვარიაცია და მისი მრავალი განზოგადება გახდა მაქსიმუმის პრინციპის და მაღალი რიგის ამოცანებში ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების დამტკიცების სტანდარტული გზა. მოგვიანებით, რამდენიმე წლის შემდეგ, მივიღე მაქსიმუმის პრინციპის ახალი დამტკიცება, რომელიც სრულიად განსხვავებულ (მართვის მცოცავი რეჟიმი) მოსაზრებებზე იყო დაფუძნებული. ეს დამტკიცება მოყვანილია ჩემს სახელმძღვანელოში [1].

დროთა განმავლობაში არ შეცვლილა მაქსიმუმის პრინციპის ფორმულირება, რადგან თავისი არსით იგი ინვარიანტულია. მიუხედავად მოჩვენებითი ანალიზურობისა, თეორემა ღრმა გეომეტრიული ფაქტი და სრულად სიმპლექტიკური ინვარიანტია. მაქსიმუმის პრინციპი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც „სიმპლექტიზაციის ფუნქტორი“: მდგომარეობათა სივრცეზე დასმული ოპტიმალური ამოცანიდან გადასვლა ფაზურ სივრცეში განხილულ ამოცანაზე.

იმისათვის, რომ მაქსიმუმის პრინციპი ინვარიანტული ფორმით გადაიწეროს, საჭიროა საწყისი მართვის სისტემა დაიწეროს „მდგომარეობათა ინვარიანტული“ სახით M გლუვ მრავალსახეობაზე:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=f(x,u),x\in M,u\in U,\\ &f_u:x\mapsto f(x,u)\in TM,x\in M,u\in U\end{aligned}\right\}$$

და ვექტორული ველების f_u ოჯახი განვიხილოთ როგორც H_u სკალარულ ფუნქციათა ერთობლიობა $\pi:T^{*}M\to M$ კომხებ ფიბრაციაზე, რომლებიც წრფივია ფიბრაციის ფენებზე:

$f_u = H_u \in C^\infty(T^*M), H_u$ — წრფივი ფუნქციაა ფენებზე.

სკალარულ ფუნქციათა H_u ერთობლიობა წარმოქმნის T^*M-ზე ჰამილტონური ვექტორული ველების $\vec{H}_u$ ოჯახს, რომელიც აკმაყოფილებს სტანდარტულ

$$i_{H_u}\omega = dH_u$$

თანადობას, სადაც ω კანონიკური სიმპლექტიკური ფორმაა T^*M-ზე. ამრიგად, მივიღეთ (13.1) მაქსიმუმის პრინციპის ჰამილტონური სისტემა. $\vec{H}_u$ ველი არის M მრავალსახეობაზე განსაზღვრული f_u ვექტორული ველის კანონიკური ატანა T^*M კომხებ ფიბრაციაზე, ე.ი. ის წარმოქმნის T^*M-ზე ფენობრივ (ფენების შემნახველ) ნაკადს, რომელიც ნებისმიერ T_x^*M ფენას წრფივად გადასახავს $T^*_{e^{tf}u_{(x)}}M$ ფენაში:

$$e^{t\vec{H}_u}: T_x^*M \to T^*_{e^{tf}u_{(x)}}M, x \in M.$$

მაქსიმუმის პრინციპის თანახმად, ამოცანის ექსტრემალები არიან არასტაციონარული $\vec{H}_{u(t)}$ ჰამილტონური ველის ისეთი $\xi(t)$ ტრაექტორიები, რომლებიც მაქსიმუმის

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \vec{H}_{u(t)}(\,\xi(t), H_{u(t)}(\xi(t)) =$$
$$= max_{v\in U} H_v(\xi(t)), t_0 \le t \le t_1$$

პირობას აკმაყოფილებენ.

$$H_{u(t)}(\xi) = max_{v\in U} H_v(\xi), \xi \in O \subset T^*M$$

მაქსიმუმის პირობიდან გამომდინარე, თუ $O \subset T^*M$ არეზე გამოვრიცხავთ u პარამეტრს H_u ოჯახიდან, მაშინ, როგორც ამ გამორიცხვის შედეგს, მივიღებთ H სკალარულ ფუნქციას (პარამეტრის გარეშე), ამოცანის *მასტერ-ჰამილტონიანს*, რომელიც, ოპტიმალური ამოცანის O-ზე განხილვის შემთხვევაში, დაიყვანება ფიქსირებული $\vec{H}$ ჰამილტონური ვექტორული ველის ტრაექტორიების შესწავლაზე:

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \vec{H}(\xi(t)),$$
$$\pi\xi(t_0) = x_0, H(\xi(t)) \equiv const \ge 0.$$

ვარიაციათა აღრიცხვის რეგულარული ამოცანები ამ შემთხვევის ტიპიური მაგალითებია. ფაქტობრივად, თავდაპირველად, პრობლემის ამოხსნის ამგვარი სურათი ჰქონდა პონტრიაგინს მხედველობაში.

გეომეტრიული მიდგომის შესანიშნავი თვისებაა ის ფაქტი, რომ იგი გამოსადეგია პრაქტიკულად ყველა საინტერესო შემთხვევაში, მათ შორის არარეგულარული ამოცანებისთვისაც. ოპტიმალური ამოცანიდან შესაძლებელია აიგოს არაწრფივი ბმულობა T^*M-ზე, რომელიც წარმოშობს ამოცანის მნიშვნელოვან ინფინიტიზიმალურ ინვარიანტებს და ისინი არატრივიალურები არიან რეგულარულ შემთხვევაშიც, კერძოდ, შესაძლებელია ოპტიმალური ამოცანის ბმულობის ტენზორის მიღება. თუ შევეცდებით მისგან მივიღოთ მდგომარეობათა M მრავალსახეობის გლობალური ინვარიანტები, მაგალითად, ეილერის მახასითებელი კლასი გამოვსახოთ ოპტიმალური ამოცანის ბმულობის საშუალებით (გაუს-ბონე-ჩერნის ფორმულის შესაძლო განზოგადება), აუცილებლად მივალთ პონტრიაგინის და ჩერნის მახასიათებელი კლასების კლასიკური თანადობების განზოგადებამდე, რადგან მახასიათებელი კლასების ეს კლასიკური ფორმულები მიღებულ იქნა სპეციალურ შემთხვევაში, კერძოდ, რიმანის მეტრიკით M-ზე მდებარე წირის სიგრძის მინიმიზაციის გზით. ამრიგად, პონტრიაგინის ორი უდიდესი აღმოჩენა მათემატიკაში, რომლებიც მისი სამეცნიერო მოღვაწეობის სხვადასხვა პერიოდში მოხდა, მჭიდროდ და მოულოდნელად დაუკავშირდა ერთმანეთს.

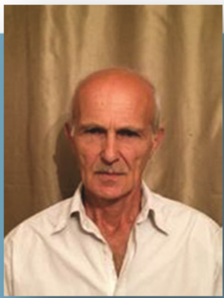
ასეთია მოკლე ისტორია იმ აღმოჩენისა, რომელიც დაახლოებით ნახევარი საუკუნის წინ დაიწყო სამხედრო-საჰაერო ძალების ინჟინრის ორი მოკრძალებული მოხსენებით სემინარზე. ამ იდეებმა გააღვივეს პონტრიაგინის გენიალური ნიჭი. შედეგად მივიღეთ ახალი მათემატიკური დისციპლინა, რომელიც ჩამოყალიბდა, როგორც მათემატიკის ახალი ფუნდამენტური დარგი და განაზოგადა კლასიკურ ვარიაციათა აღრიცხვის მეთოდები. ამასთან, მას ძალა შესწევს ამოხსნას რიგი პრაქტიკული ამოცანები.

ლიტერატურა

1. რ. გამყრელიძე. *ოპტიმალური მართვის თეორიის საფუძვლები.* ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი, 2017.

ავტორის ელექტრონული მისამართი: *gam@ipsun.ras.ru*

რა არის ტენზორი?



ვახტანგ ლომაძე

მათემატიკის დეპარტამენტი,
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ტენზორი არის ჩვეულებრივი ვექტორის განზოგადება. როგორც ვექტორი წარმოიდგინება კოორდინატების მეშვეობით მოცემული ბაზისის მიმართ, ასევე ტენზორიც წარმოიდგინება კოორდინატების მეშვეობით და როგორც ვექტორის კოორდინატები გარდაიქმნებიან ბაზისის შეცვლისას, ასევე ტენზორის კოორდინატებიც ექვემდებარებიან გარკვეული კანონით გარდაქმნას. განსხვავება იმაშია, რომ ვექტორის კოორდინატები ქმნიან ერთგანზომილებიან მასივს, მაშინ, როცა ტენზორის კოორდინატებისგან შედგენილი მასივი მრავალგანზომილებიანია. ტენზორული აღრიცხვა განავითარა იტალიელმა მათემატიკოსმა გრეგორიო რიჩიმ დაახლოებით 1890 წელს. 1900 წელს მან გამოსცა წიგნი თავის მოწაფე ლევი-ჩივიტასთან ერთად სათაურით „აბსოლუტური დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდები და მათი გამოყენებები“. ამ წიგნის მეშვეობით ტენზორული აღრიცხვა მისაწვდომი გახდა ბევრი მათემატიკოსისთვის და ფიზიკოსებისთვისაც. განსაკუთრებული პოპულარობა მოიპოვა ტენზორებმა მას შემდეგ, რაც აინშტაინმა თავისი ზოგადი ფარდობითობის თეორია მთლიანად ტენზორების ენაზე ჩამოაყალიბა. ტენზორის ცნება გამოიყენება მათემატიკის და ფიზიკის მრავალ დარგში და, უნდა აღინიშნოს — ინჟინერიაშიც.

წარმოდგენილ სტატიაში ჩვენ მოვიყვანთ ტენზორის სამ ფორმალურ განსაზღვრებას. პირობითად, მათ „ალგებრულ“ განსაზღვრებას, „გეომეტრიულს“ და „ფიზიკურს“ ვუწოდებთ. წმინდა მათემატიკური თვალსაზრისით, ალგებრული მიდგომა უდავოდ უფრო აღმატებულია. იგი ეფუძნება ტენზორული ნამრავლის ზოგად კონსტრუქციას და კარგად წარმოგვიდგენს, თუ რა არის ტენზორი. თუმცა ფიზიკოსები ალბათ თავიანთ მიდგომას ამჯობინებენ. მათთვის ტენზორი არის მათემატიკური ობიექტი, რომელიც კოორდინატთა სისტემისგან დამოუკიდებელია; თვითონ იგი არ იცვლება კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, მაგრამ მისი კოორდინატები იცვლებიან გარკვეული, წინასწარ განსაზღვრული, კანონით. ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ ტენზორი წარმოიშვა როგორც ჩვეულებრივი (სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის) ვექტორის განზოგადება. მაგრამ, მას შემდეგ, რაც შემოღებულ იქნა წრფივი (ანუ ვექტორული) სივრცის ცნება, უნდა ითქვას, რომ, პირუკუ, ტენზორი შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც ვექტორის კერძო შემთხვევა. მართლაც, ყოველი ორი არაუარყოფითი p და q რიცხვისთვის, (p,q) ტიპის ტენზორები V წრფივ სივრცეზე — ეს არის ელემენტები (ანუ ვექტორები) წრფივი სივრცისა, რომელსაც კანონიკური გზით ღებულობენ V სივრცისგან და რომელსაც აღნიშნავენ $\otimes_q^p(V)$ სიმბოლოთი.

ვიგულისხმებთ, რომ მკითხველმა იცის, რა არის (აბსტრაქტული) წრფივი სივრცე და ბაზისი, და კიდევ წრფივი ასახვები. ყველგან ტექსტში წრფივი სივრცე ნიშნავს ნამდვილ *სასრულგანზომილებიან* წრფივ სივრცეს (რასაკვირველია, ვისაც სურს, ნამდვილ რიცხვთა ველის მაგივრად შეუძლია აიღოს ნებისმიერი ველი და განიხილოს წრფივი სივრცეები ამ ველზე).

შესავალი

ამ თავის მიზანია, რომ მკითხველს შევახსენოთ რამდენიმე ფაქტი წრფივი ალგებრიდან და დავაფიქსიროთ აღნიშვნები.

როგორც ცნობილია, მატრიცას, ჩვეულებრივ, განსაზღვრავენ, როგორც რიცხვებისგან შემდგარ მართკუთხა ცხრილს, რომლის კომპონენტები დანომრილია ნატურალურ რიცხვთა წყვილებით. ჩვენ ვუშვებთ, რომ მატრიცაში ინდექსებად შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ნებისმიერი სასრული სიმრავლეები. თუ I და J სასრული სიმრავლეებია, მაშინ $I \times J$ ზომის მატრიცა არის $\left(a_{ij}\right)_{i \in I, j \in J}$ სახის რიცხვთა ერთობლიობა, ანუ ელემენტი $\mathbb{R}^{I \times J}$ სიმრავლიდან.

ამ დაშვებით შესაძლებელი ხდება კანონიკურად განვსაზღვროთ კრონეკერის ნამრავლი. მართლაც, ვთქვათ, I, J, K, L სასრული სიმრავლეებია და, ვთქვათ, $A = \left(a_{ij}\right)$ და $B = (b_{kl})$, შესაბამისად, $I \times J$ და $K \times L$ ზომის მატრიცებია. მაშინ ამ ორი მატრიცის კრონეკერის (ანუ ტენზორული) ნამრავლი არის მატრიცა, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$A \otimes B = \left(a_{ij} b_{kl}\right)_{(i,k)(j,l)}.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ მატრიცის ზომაა $(I \times K) \times (J \times L)$. ანალოგიურად განისაზღვრება სამი ან მეტი მატრიცის კრონეკერის ნამრავლი.

ცხადია, თუ როგორ უნდა განისაზღვროს კრონეკერის ხარისხები. ყოველი A მატრიცისთვის, მისი კრონეკერის ხარისხები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$A^{\otimes p} = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{p}.$$

გვინდა აღვნიშნოთ, რომ, თუ A არის $I \times J$ ზომის მატრიცა, მაშინ იგი განსაზღვრავს წრფივ ასახვას

$\mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^I$, $x \mapsto Ax$, რომელიც ასევე A ასოთი აღინიშნება და პირიქით!

შეთანხმება: ვთქვათ, $A = \left(a_{ij}\right)$ არის კვადრატული მატრიცა, რომელსაც გააჩნია შებრუნებული A^{-1}. მაშინ ელემენტს, რომელიც A^{-1} მატრიცაში (i, j) პოზიციაზეა, ჩვენ აღვნიშნავთ a^{ij}-ით. ასე რომ, A^{-1}= (a^{ij}).

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს V წრფივი სივრცე და, ვთქვათ, e=$(e_i)_{i \in I}$ არის მისი ბაზისი. ყოველი x ვექტორი ერთადერთი გზით გამოისახება:

$$x = \sum_{i \in I} x^i e_i,$$

როგორც ბაზისის ვექტორების წრფივი კომბინაცია; x^i კოეფიციენტებს ეწოდება x-ის კოორდინატები მოცემულ ბაზისში. მათი ერთობლიობა აღვნიშნოთ $x(e)$-ით და, ამრიგად, $x(e)$= $(x^i)_{i \in I}$. ბაზისის მნიშვნელობაა ის, რომ მისი მეშვეობით მყარდება იზომორფიზმი $V \cong \mathbb{R}^I$; იგი მოიცემა $x \mapsto x(e)$ ასახვით.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ბაზისი და, ვთქვათ, გვინდა იგი შევცვალოთ ახალი f=$(f_i)_{i \in I}$ ბაზისით. „ძველი“ ბაზისიდან ახალზე გადასვლის $A = \left(a_{ij}\right)$ მატრიცა განისაზღვრება ფორმულით:

$$f_i = \sum_j a_{ji} e_j \qquad (i \in I).$$

„გადასვლის“ ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$f = A^{tr} e.$$

აქედან ადვილად ვღებულობთ, რომ:

$$e = (A^{-1})^{tr} f.$$

ანუ, ახალი ბაზისიდან ძველზე გადასვლის მატრიცა არის A^{-1}= (a^{ij}).

ლემა 1. დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} V & = & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^I & \xrightarrow[A^{-1}]{} & \mathbb{R}^I \end{array},$$

სადაც ვერტიკალური ისრები აღნიშნავენ იზომორფიზმებს ინდუცირებულთ e და f ბაზისების მიერ, კომუტაციურია.

დამტკიცება: უნდა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი x ვექტორისთვის ადგილი აქვს ტოლობას $x(f)$=$A^{-1}x(e)$. გვექნება:

$$x = \sum_k x^k e_k = \sum_k x^k \left(\sum_i a^{ik} f_i\right) = \sum_i \left(\sum_k a^{ik}\right) f_i,$$

რაც ამტკიცებს ლემას. ■

ყოველ $V \to \mathbb{R}$ წრფივ ასახვას ჰქვია წრფივი ფუნქციონალი V-ზე. წრფივი ფუნქციონალების სივრცეს ხშირად აღნიშნავენ V^* სიმბოლოთი და მას დუალურ სივრცეს უწოდებენ. ყოველ e=$(e_i)_{i \in I}$ ბაზისთან ასოცირდება დუალური სივრცის $e^* = (e^i)_{i \in I}$ ბაზისი. იგი განისაზღვრება ფორმულებით:

$$e^i\left(e_j\right) = \delta_{ij},$$

და მას დუალურ ბაზისს ეძახიან. ის რომ e^* მართლაც ბაზისია, ადვილი დასანახია. აღსანიშნავია, რომ:

$$x=\sum_i x^i e_i \ \Rightarrow \ e^i(x)=x^i \, .$$

ლემა 2. განვიხილოთ $e^*=(e^i)_{i\in I}$ და $f^*=(f^i)_{i\in I}$ ბაზისები, რომლებიც დუალურია მოცემული ბაზისების. მაშინ e^* ბაზისიდან f^* ბაზისში გადასვლის მატრიცა ტოლია $(A^{-1})^{tr}$-ის.

დამტკიცება: უნდა ვაჩვენოთ, რომ $f^i=\sum_j a^{ij}\, e^j$. რომ დავრწმუნდეთ ამ ფორმულის სამართლიანობაში, ვამოქმედოთ ეს ორი ფუნქციონალი e_k-ზე. გვექნება:

$$f^i(e_k)=f^i\left(\sum_j a^{jk} f_j\right)=a^{ik}\,,$$
$$\left(\sum_j a^{ij}\, e^j\right)(e_k)=a^{ik}.$$

ლემა დამტკიცებულია. ■

შემდეგი ლემა უშუალოდ გამომდინარეობს წინა ორი ლემიდან.

ლემა 3. დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} V^* & = & V^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^I & \xrightarrow[A^{tr}]{} & \mathbb{R}^I \end{array},$$

სადაც ვერტიკალური ისრები აღნიშნავენ იზომორფიზმებს ინდუცირებული e^* და f^* ბაზისების მიერ, კომუტაციურია.

შეთანხმება: ბაზისს მოცემულ V სივრცეში აქვს ქვედა ინდექსები, ხოლო კოორდინატებს ამ ბაზისში — ზედა ინდექსები და, პირიქით, დუალურ ბაზისს V^* სივრცეში აქვს ზედა ინდექსები, ხოლო კოორდინატებს მასში — ქვედა ინდექსები.

1. ტენზორული ნამრავლი

ვთქვათ $V_1, \ldots, V_r$ და W წრფივი სივრცეებია. ასახვას $f : V_1\times\ldots\times V_r \longrightarrow W$ ჰქვია მულტიწრფივი, თუ იგი წრფივია ყოველი არგუმენტის მიმართ ანუ, თუ ყოველი k-თვის

$$f(v_1,\ldots,(v_k'+v_k''),\ldots,v_r)=f(v_1,\ldots,v_k',\ldots,v_r)+$$
$$+f(v_1,\ldots,v_k'',\ldots,v_r),$$
$$f(v_1,\ldots,av_k,\ldots,v_r)=af(v_1,\ldots,v_k,\ldots,v_r).$$

ასეთი ასახვების სიმრავლეს აღვნიშნავთ $ML(V_1,\ldots,V_r\,;W)$ გამოსახულებით. აი, რამდენიმე მაგალითი:

1) სკალარული ნამრავლი $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$;
2) მატრიცათა ნამრავლი $\mathbb{R}^{l\times m}\times\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{l\times n}$;
3) det: $\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ სვეტების (ან სტრიქონების) მიმართ;
4) სკალარის და ვექტორის ნამრავლი $\mathbb{R}\times V\to V$;
5) ვექტორული ნამრავლი $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$;
6) შერეული ნამრავლი $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$;
7) (ჩვეულებრივი) გამრავლება $\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$;
8) სკალარული ნამრავლი $V^*\times V\to\mathbb{R}$.

განსაზღვრება. ვთქვათ $V_1, \ldots, V_r$ წრფივი სივრცეებია. ტენზორული ნამრავლი $V_1\otimes\ldots\otimes V_r$ — ეს არის წრფივი სივრცე, წარმოქმნილი სიმბოლოებით $v_1\otimes\ldots\otimes v_r$, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ (და *მხოლოდ შემდეგ*) თანაფარდობებს:

$$v_1\otimes\ldots\otimes(v_k'+v_k'')\otimes\ldots\otimes v_r=$$
$$=v_1\otimes\ldots\otimes v_k'\otimes\ldots\otimes v_r+\ v_1\otimes\ldots\otimes v_k''\otimes\ldots\otimes v_r,$$
$$v_1\otimes\ldots\otimes av_k\otimes\ldots\otimes v_r=a(v_1\otimes\ldots\otimes v_k\otimes\ldots\otimes v_r).$$

ეს თანაფარდობები ნიშნავს ზუსტად იმას, რომ კანონიკური ასახვა $\mu : V_1\times\ldots\times V_r\to W$, განსაზღვრული ფორმულით

$$\mu(v_1,\ldots,v_r)=v_1\otimes\ldots\otimes v_r,$$

არის მულტიწრფივი. გამომდინარე იქიდან, რომ სხვა თანაფარდობებს არა აქვთ ადგილი, ტენზორულ ნამრავლს ამ ასახვასთან ერთად აქვს შემდეგი *უნივერსალური* თვისება: ყოველი წრფივი W სივრცისთვის, მულტიწრფივი ასახვები:

$$V_1\ldots\times V_r\to W$$

არიან ურთიერთცალსახა თანადობაში წრფივ ასახვებთან:

$$V_1\otimes\ldots\otimes V_r\ \to W,$$

და ეს თანადობა მყარდება μ-ს მეშვეობით:

$$L(V_1\otimes\ldots\otimes V_r\,,W)\ \cong ML\,(V_1,\ldots,V_r\,;W),\, f\to f\circ\mu.$$

შენიშვნა. გვინდა ხაზი გავუსვათ იმას, რომ ტენზორული ნამრავლი დიდად განსხვავდება პირდაპირი ნამრავლისგან.

თეორემა 1. ვთქვათ $V_1, \ldots, V_r$ წრფივი სივრცეებია და, ვთქვათ, (e_{1,i_1}) , ..., (e_{r,i_r}) მათი ბაზისები. მაშინ სიმბოლოები:

$$\{e_{1,i_1}\otimes\cdots\otimes e_{r,i_r} \,|\, i_1,\ldots,i_r\}$$

ქმნიან $V_1\otimes\cdots\otimes V_r$ სივრცის ბაზისს.

დამტკიცება: ავაგოთ W წრფივი სივრცე, რომლის ბაზისია $(e_{1,i_1},\ldots,e_{r,i_r})$ სახის მიმდევრობები, და განვიხილოთ ასახვა:

$$\left(\sum_{i_1} a_{1,i_1} e_{1,i_1}, \dots, \sum_{i_r} a_{r,i_r} e_{r,i_r}\right) \mapsto \sum_{(i_1,\dots,i_r)} a_{1,i_1} \dots a_{r,i_r} (e_{1,i_1}, \dots, e_{r,i_r}).$$

ეს არის მულტიწრფივი ასახვა $V_1 \times \dots \times V_r \to W$ და, მაშასადამე, იგი გვაძლევს წრფივ ასახვას: $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \to W$.

მეორე მხრივ, არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი წრფივი ასახვა საპირისპირო მიმართულებით, ისეთი, რომ:

$$(e_{1,i_1}, \dots, e_{r,i_r}) \mapsto e_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes e_{r,i_r}.$$

ადვილი დასანახია, რომ ეს ორი ასახვა ურთიერთშექცევადია. ■

ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის აღვნიშნოთ $[n]$-თი $\{1, \cdots, n\}$ სიმრავლე. თუ p ნატურალური რიცხვია, $[n]^p$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $\underbrace{[n] \times \cdots \times [n]}_{p}$ ნამრავლი.

ლემა 4. ვთქვათ, n და p ნატურალური რიცხვებია. მაშინ გვექნება შემდეგი კანონიკური იზომორფიზმი:

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n}_{p} \cong \mathbb{R}^{[n]^p},$$

რომელიც მოიცემა შემდეგი ასახვით:

$$\left(x_{1,i_1}\right)_{i_1} \otimes \cdots \otimes \left(x_{p,i_p}\right)_{i_p} \to \left(x_{1,i_1} \dots x_{p,i_p}\right)_{(i_1,\dots,i_p)}.$$

დამტკიცება: ვუტოვებთ მკითხველს.

2. „ტენზორები ალგებრაში“

ახლა, ვთქვათ, მოცემულია V წრფივი სივრცე და ორი არაუარყოფითი რიცხვი — p და q. განვსაზღვროთ $\otimes_q^p(V)$ სივრცე ფორმულით:

$$\otimes_q^p(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q}.$$

განსაზღვრება. (p,q) ტიპის ტენზორი V სივრცეზე, ეს არის $\otimes_q^p(V)$ სივრცის ელემენტი.

ვთქვათ, $T \in \otimes_q^p(V)$. ავიღოთ V სივრცის $e = (e_1, \dots, e_n)$ ბაზისი. ყოველი $i \in [n]^p$ და $j \in [n]^q$ -თვის განვსაზღვროთ e_i^j ფორმულით:

$$e_i^j = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}.$$

თეორემა 1-ის თანახმად, e_i^j ელემენტები ქმნიან ბაზისს $\otimes_q^p(V)$ სივრცეში. მაშასადამე, ჩვენი T ტენზორი ჩაიწერება ასე:

$T = \sum_{i,j} T_j^i e_i^j$, $T_j^i \in \mathbb{R}$. სიმოკლისათვის, T_j^i კოეფიციენტებს ეძახიან T -ს კოორდინატებს e ბაზისის მიმართ (ნაცვლად იმისა, რომ დაუძახონ კოორდინატები $\left(e_i^j\right)_{i,j}$ ბაზისის მიმართ). კოორდინატების ერთობლიობა აღვნიშნოთ $T(e)$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ, ახლა $f = (f_1, \dots, f_n)$ „ახალი“ ბაზისია. გვინდა შევადაროთ ერთმანეთთან $T(e)$ და $T(t)$. $A = \left(a_{i,j}\right)$ იყოს გადასვლის მატრიცა: $e \xrightarrow{A} f$. ეს უკანასკნელი არაგადაგვარებული მატრიცაა და ინდუცირებს წრფივი სივრცეების იზომორფიზმს:

$$\mathbb{R}^{[n]^p \times [n]^q} \xrightarrow{(A^{-1})^{\otimes p} \otimes (A^{tr})^{\otimes q}} \mathbb{R}^{[n]^p \times [n]^q}$$

თანახმად ლემა 1-ისა და ლემა 3-სა, გვაქვს შემდეგი კომუტაციური „კვადრატები“:

$$\begin{array}{ccc} V & = & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^{[n]} & \xrightarrow[A^{-1}]{} & \mathbb{R}^{[n]} \end{array} \quad \text{და} \quad \begin{array}{ccc} V^* & = & V^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^{[n]} & \xrightarrow[A^{tr}]{} & \mathbb{R}^{[n]} \end{array}.$$

ამ კვადრატების, შესაბამისად, ტენზორულ p და q ხარისხში აყვანის შემდეგ, ვღებულობთ შემდეგ კომუტაციურ კვადრატებს:

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes p} & = & V^{\otimes p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^{[n]^p} & \xrightarrow[(A^{-1})^{\otimes p}]{} & \mathbb{R}^{[n]^p} \end{array} \quad \text{და}$$

$$\begin{array}{ccc} V^{*\otimes q} & = & V^{*\otimes q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^{[n]^q} & \xrightarrow[(A^{tr})^{\otimes q}]{} & \mathbb{R}^{[n]^q} \end{array}.$$

ბოლოს, თუ ავიღებთ ამ ორი კვადრატის ტენზორულ ნამრავლს, მივიღებთ შემდეგ კომუტაციურ კვადრატს:

$$\begin{array}{ccc} \otimes_q^p(V) & = & \otimes_q^p(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^{[n]^p \times [n]^q} & \xrightarrow[(A^{-1})^{\otimes p} \otimes (A^{tr})^{\otimes q}]{} & \mathbb{R}^{[n]^p \times [n]^q} \end{array}.$$

ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა, რომელიც აღწერს ტენზორის კოორდინატების გარდაქმნის კანონს.

თეორემა 2. ვთქვათ, T არის (p,q) ვალენტობის მქონე ტენზორი, ანუ $T \in \otimes_q^p(V)$, მაშინ:

$$T(f) = ((A^{-1})^{\otimes p} \otimes (A^{tr})^{\otimes q}) T(e).$$

გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ყოველი ელემენტი $\mathbb{R}^{[n]^p \times [n]^q}$ სიმრავლიდან არის ნამდვილ რიცხვთა ერთობლიობა $\left(x_{ij}\right)_{i \in [n]^p, j \in [n]^q}$. ქვემოთ, ნაცვლად x_{ij} -სა, დავწეროთ x_j^i-ს.

შენიშვნა. თეორემა 2 განაზოგადებს ლემა 1-ს და ლემა 2-ს. საინტერესოა აღინიშნოს, რომ, პირიქით, ეს თეორემა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ლემა 1-ის კერძო შემთხვევა.

3. „ტენზორები გეომეტრიაში“

თეორემა 3. ვთქვათ, $V_1, \ldots, V_r$ წრფივი სივრცეებია, მაშინ გვაქვს კანონიკური იზომორფიზმი:

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \cong ML(V_1^*, \ldots, V_r^*; \mathbb{R}).$$

დამტკიცება: ადვილი დასანახია, რომ ასახვა:

$$(x_1, \ldots, x_r) \to$$
$$\to ((u_1, \ldots, u_r) \to u_1(x_1) \cdot \ldots \cdot u_r(x_r))$$

არის მულტიწრფივი. მაშასადამე, უნივერსალური თვისების ძალით, გვაქვს წრფივი ასახვა:

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \to ML(V_1^*, \ldots, V_r^*; \mathbb{R}),$$

რომლისთვისაც:

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \mapsto \left((u_1, \ldots, u_r) \longmapsto u_1(x_1) \cdot \ldots \cdot u_r(x_r)\right).$$

იმისათვის, რომ ავაგოთ წრფივი ასახვა საპირისპირო მიმართულებით, ავიღოთ ნებისმიერი მულტიწრფივი ასახვა φ და შევუსაბამოთ მას

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r} \varphi(e_1^{i_1}, \ldots, e_r^{i_r}) e_{1,i_1} \otimes \ldots \otimes e_{r,i_r}.$$

მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ ამ ორი, ერთმანეთის საპირისპირო, ასახვის კომპოზიციები იგივურია. ■

ვთქვათ, ახლა მოცემულია V წრფივი სივრცე. გეომეტრიის წიგნებში ნახავთ ტენზორის შემდეგ განსაზღვრებას.

განსაზღვრება. (p, q)-ტიპის ტენზორი V სივრცეზე არის მულტიწრფივი ფუნქციონალი:

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q} \to \mathbb{R}.$$

თანახმად თეორემისა, გვაქვს კანონიკური იზომორფიზმი:

$$\otimes_q^p(V) \cong ML\left(\underbrace{V^*, \ldots, V^*}_{p}, \underbrace{V, \ldots, V}_{q}; \mathbb{R}\right).$$

ასე რომ, ტენზორის ცნებები ალგებრული და გეომეტრიული აზრით ეკვივალენტურია.

4. „ტენზორები ფიზიკაში“

ვთქვათ, ისევ V არის წრფივი სივრცე და n მისი განზომილება. აღვნიშნოთ $\mathcal{B}$-თი V სივრცის ბაზისების სიმრავლე. ფიზიკაში მიღებულია ტენზორის შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება. (p, q)-ტიპის ტენზორი არის ასახვა:

$$T: \mathcal{B} \to \mathbb{R}^{[n]^p \times [n]^q},$$

რომელიც აკმაყოფილებს კოორდინატთა გარდაქმნის შემდეგ კანონს: ყოველი ორი — e და f ბაზისისთვის:

$$T(f) = ((A^{-1})^{\otimes p} \otimes (A^{tr})^{\otimes q}) T(e),$$

სადაც $A = (a_{ij})_{i,j \in [n]}$ არის e ბაზისიდან f ბაზისზე გადასვლის მატრიცა. გარდაქმნის ეს კანონი უფრო დაწვრილებით გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\forall\, i \in [n]^p,\ j \in [n]^q \ \ T(f)_j^i = \sum_{k,l} a^{ik}\, T(e)_l^k\, a_{lj}.$$

აქ k და l ღებულობენ მნიშვნელობებს, შესაბამისად, $[n]^p$ და $[n]^q$ სიმრავლეებიდან და $a^{ik} = a^{i_1 k_1} \cdots a^{i_p k_p}$, $a_{lj} = a_{l_1 j_1} \cdots a_{l_q j_q}$.

თეორემა 4. ტენზორის „ფიზიკური“ განსაზღვრება ეკვივალენტურია „ალგებრული“ განსაზღვრების.

დამტკიცება: ავიღოთ ნებისმიერი e ბაზისი. ყოველ T ტენზორს, ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრების აზრით, შევუსაბამოთ:

$$\sum_{i,j} T(e)_j^i\, e_i^j,$$

რაც არის ელემენტი $\otimes_q^p(V)$ სივრცეში. თანახმად გარდაქმნის პირობისა, ეს უკანასკნელი *არ არის დამოკიდებული* ბაზისის არჩევაზე. ასე რომ, გვაქვს კანონიკური ასახვა „ფიზიკური“ ტენზორებიდან „ალგებრულ“ ტენზორებში. თანახმად თეორემა 2-სა, გვაქვს ასევე ასახვა საპირისპირო მიმარულებით.

ეს ორი ასახვა, ცხადია, ურთიერთშექცევადია. ■

ლიტერატურა

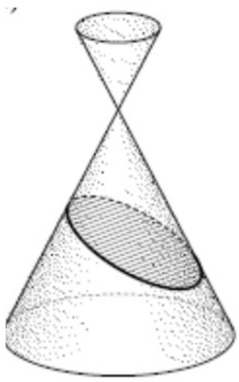
1. S. Lang, Algebra, Graduate Texts in Mathematics, 2002.
2. R. A. Sharipov, Quick Introduction to Tensor Analysis, 2004.

კონიკების ფოკალური თვისებები

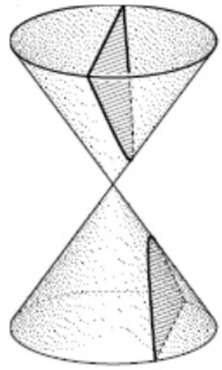
ანა დანელია

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასისტენტ-პროფესორი

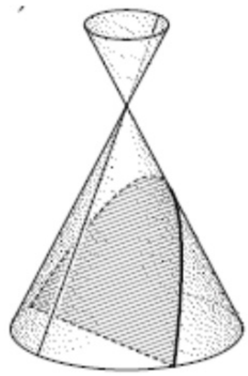
კონიკები ანუ კონუსური კვეთები ან კვადრატიკები ეწოდებათ წირებს, რომლებიც მიიღება კონუსის სიბრტყით გადაკვეთისას. კონუსის ქვეშ ვგულისხმობთ ფიგურას, რომელიც შედგება წრფეებისგან, რომლებიც ერთ საერთო A წერტილზე გადიან და ყოველი მათგანი ადგენს მახვილ α კუთხეს A წერტილზე გამავალ რაიმე l წრფესთან. ამ წრფეებს ეწოდებათ კონუსის მსახველები, l წრფეს — კონუსის ღერძი, ხოლო A წერტილს — მისი წვერო. ამრიგად, კონუსი წარმოადგენს შემოუსაზღვრელ ფიგურას, რომელიც შედგება ორი ნაწილისგან, რომლებიც ცენტრალურ-სიმეტრიულია A წერტილის მიმართ. თუ განვიხილავთ კონუსის სიბრტყით კვეთას, რომელიც არ გადის წვეროზე, მივიღებთ კონიკურ კვეთას. არსებობს სამი ტიპის კონიკური კვეთა: ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა. ელიფსი მიიღება, როცა სიბრტყე არცერთი მსახველის პარალელური არაა და კვეთს კონუსის მხოლოდ ერთ ნაწილს.



ჰიპერბოლა მიიღება, როცა სიბრტყე კვეთს კონუსის ორივე ნაწილს,



ხოლო, თუ სიბრტყე პარალელურია ერთ-ერთი მსახველის, მაშინ მიიღება პარაბოლა.

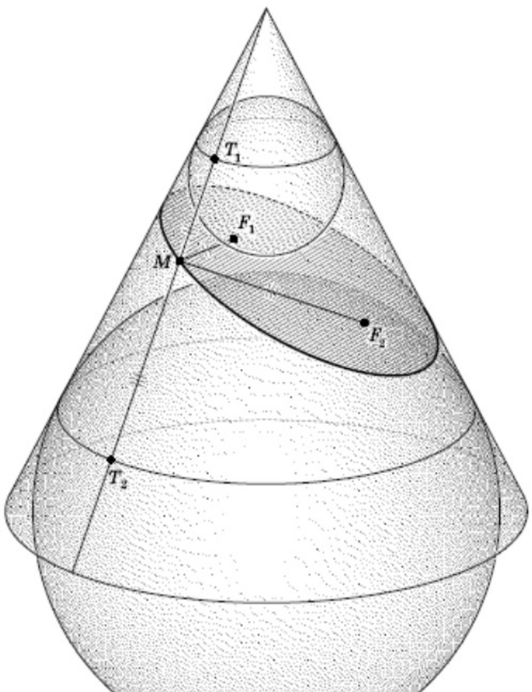


ჩვენ არ განვიხილავთ გადაგვარებულ კონიკებს, რომლებიც შეესაბამება შემთხვევას, როცა სიბრტყე გადის კონუსის წვეროზე (ამ შემთხვევაში შეიძლება მივიღოთ ან წრფეთა წყვილი, ან ერთი წრფე, ან წერტილი). შევნიშნოთ, რომ პარაბოლა მოიცემა განტოლებით $y = ax^2$, ჰიპერბოლა — განტოლებით $y = \frac{k}{x}$, ხოლო ელიფსი — განტოლებით $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ელიფსი ასევე არის გეომეტრიული ადგილი სიბრტყის იმ წერტილებისა, რო-

მელთაგან ორ მოცემულ წერტილამდე მანძილთა ჯამი მუდმივია.

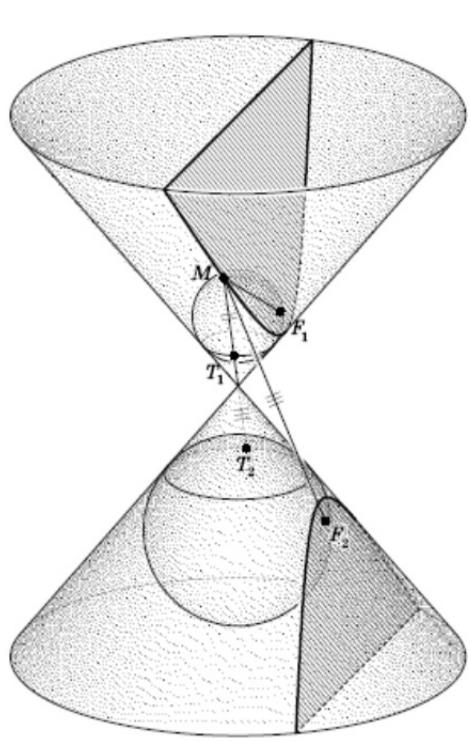
კონიკური კვეთების მეორენაირი განმარტება: ელიფსი არის სიბრტყის ისეთი M წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომელთათვისაც $F_1M + F_2M = c$, სადაც F_1 და F_2 სიბრტყის მოცემული წერტილებია, ამასთან, $c > F_1F_2$. F_1 და F_2 წერტილებს ელიფსის ფოკუსები ეწოდებათ; ჰიპერბოლა — M წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომელთათვისაც $|F_1M - F_2M| = c$ (F_1 და F_2 წერტილები — ჰიპერბოლის ფოკუსებია); პარაბოლა — წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც თანაბრადაა დაშორებული მოცემული F წერტილიდან და მოცემული d წრფიდან (F წერტილი — პარაბოლის ფოკუსია, d წრფე — მისი დირექტრისა).

უნდა ვაჩვენოთ, რომ ეს განმარტება წინა განმარტების ტოლფასია, ამიტომ კონუსში ჩავხაზოთ ორი სფერო — S_1 და S_2, რომლებიც ეხებიან მკვეთ სიბრტყეს (მათ ეწოდებათ დანდელენის სფეროები). F_1 და F_2-ით აღვნიშნოთ ამ სფეროების სიბრტყესთან შეხების წერტილები.



სფერო კონუსს ეხება წრეწირის გასწვრივ, რომელსაც სფეროს სარტყელს ვუწოდებთ. ელიფსის ნებისმიერი M წერტილისთვის MF_1 და MT_1 მონაკვეთები ტოლია, როგორც S_1 სფეროსადმი ერთი წერტილიდან გავლებული მხებები (T_1 სფეროს სარტყლის კონუსის იმ მსახველთან გადაკვეთის წერტილი, რომელიც გადის M წერტილზე), ხოლო $MF_2 = MT_2$. ამრიგად, $MF_1 + MF_2 = T_1T_2$, ე.ი. ელიფსის წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილთა ჯამი ტოლია ორ სარტყელს შორის მანძილისა და ამიტომ არაა დამოკიდებული M წერტილზე.

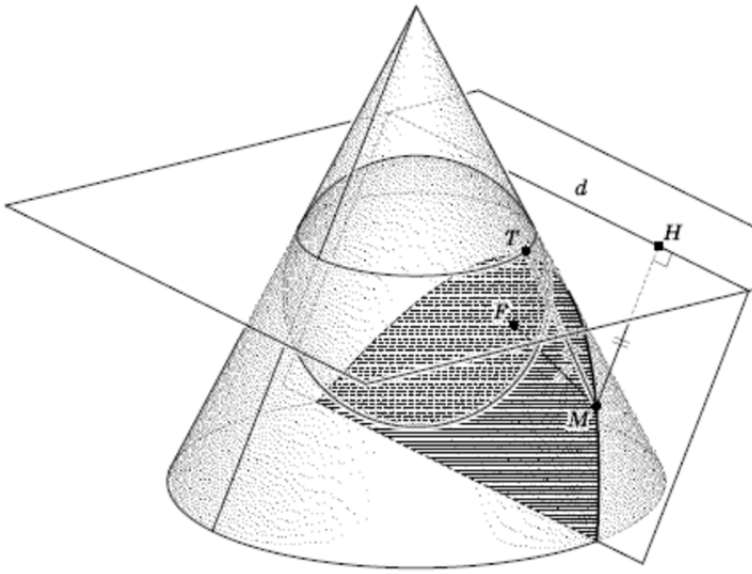
ზუსტად ასევე მტკიცდება, რომ ჰიპერბოლისთვის სიდიდე $|\mathrm{MF_1}\text{-}\mathrm{MF_2}|$ ორ სარტყელს შორის მანძილის ტოლია.



თუ მკვეთი სიბრტყე მსახველის პარალელურია, მაშინ არსებობს კონუსში ჩახაზული მხოლოდ ერთი სფერო, რომელიც მკვეთ სიბრტყეს ეხება. F-ით აღვნიშნოთ სფეროსა და სიბრტყის შეხების წერტილი, ხოლო d-თი — წრფე, რომელზეც ეს სიბრტყე იკვეთება იმ სიბრტყესთან, რომელზედაც სარტყელი მდებარეობს.

მაშინ $MF = MT$. გარდა ამისა, თუ d წრფეზე დავუშვებთ მართობს MH, მაშინ $MT = MH$, რადგან ეს მონაკვეთები სარტყლის სიბრტყესთან ტოლ კუთხეებს ადგენენ (პირველი მათგანი მდებარეობს კონუსის მსახველზე, ხოლო მეორე სხვა მსახველის პარალელურია). ამრიგად, M წერტილიდან F ფოკუსამდე და d დირექტრისამდე მანძილები ტოლია.

კონიკური კვეთები ცნობილი იყო ჯერ კიდევ ძველი ბერძენი მათემატიკოსებისთ-

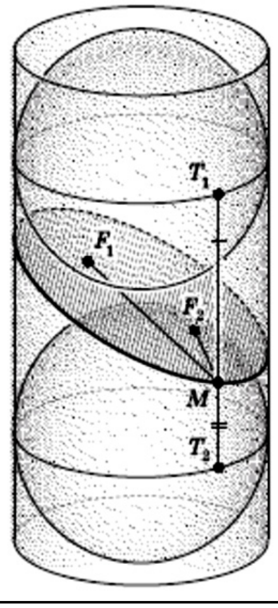


ვის. მენეხმა ჩვენს წელთაღრიცხვამდე მეოთხე საუკუნის შუახანებში დაამტკიცა, რომ ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა კონუსის კვეთებია. კონიკური კვეთები საკმაოდ კარგადაა გამოკვლეული აპოლონ პერგსკის წიგნში „კონიკი“, რომელიც, როგორც ცნობილია, დაწერილია ჩვენს წელთაღრიცხვამდე 210 და 200 წლებს შორის. აპოლონი იყო ალექსანდრიის სკოლის მესამე უდიდესი წარმომადგენელი, ევკლიდესა და არქიმედეს შემდეგ. მისი წიგნი „კონიკი“ უდიდესი სამეცნიერო მიღწევაა. იგი შედგება რვა წიგნისგან. პირველ შვიდ წიგნში, რომლებმაც ჩვენამდე მოაღწია, 387 თეორემაა. ორი ათასწლეულის განმავლობაში „კონიკი“ იყო სამაგიდო წიგნი და მთავარი სახელმძღვანელო კონუსური კვეთების შესწავლისთვის. კონუსური კვეთების თეორია აპოლონის მიერ გადმოცემული იყო იმდენად დაწვრილებით და ღრმად, რომ მათემატიკოსებმა ცოტა რამ სიახლის დამატებაღა შეძლეს, მიუხედავად მათემატიკური მეცნიერების უდიდესი პროგრესისა.

კონუსურ კვეთებს ბევრი შესანიშნავი თვისება აქვთ, რომელთა შორის ოპტიკურ ან, როგორც მათ უწოდებენ, „ფოკალურ“ თვისებებს უჭირავთ მნიშვნელოვანი ადგილი. ვიდრე ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ ამ თვისებებს, მოვიყვანოთ კონიკის კიდევ ერთი, ანალიზური განმარტება, რის გარეშეც ჩვენი მიმოხილვა არ იქნებოდა სრულყოფილი.

კონუსური კვეთების მესამე განმარტება. ელიფსი საკოორდინატო სიბრტყეზე მოიცემა განტოლებით $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ჰიპერბოლა — განტოლებით $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, პარაბოლა — განტოლებით $y=ax^2$. ამ წირების განტოლებების გამოყვანა არ წარმოადგენს სირთულეს, ამისათვის, ელიფსისა და ჰიპერბოლის ფოკუსები უნდა იყოს განლაგებული Ox ღერძზე კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულად, ხოლო პარაბოლის ფოკუსი — Oy ღერძზე. თუ $a=b$, მაშინ ელიფსი გადაიქცევა a-რადიუსიან წრეწირად, ხოლო ჰიპერბოლა ამ შემთხვევაში ხდება, ეგრეთ წოდებული, „წრფივი ჰიპერბოლა“, რომელიც კოორდინატთა სათავის მიმართ 45°-იანი კუთხით მობრუნებისას ღებულობს კარგად ცნობილ სახეს — $y=\frac{k}{x}$, სადაც $k=\frac{a^2}{2}$.

ელიფსის განტოლებიდან ჩანს, რომ ის მიიღება წრეწირისგან Oy ღერძის გასწვრივ



$\frac{a}{b}$-ჯერ კუმშვით, რითაც ამართლებს იმას, რომ ის არის „შეკუმშული წრეწირი“. ამის დადგენა შეიძლებოდა განტოლების გარეშეც. საქმე იმაშია, რომ ელიფსი მიიღება არა მარტო კონუსის, არამედ ცილინდრის კვეთისას, ამასთან, დამტკიცება თითქმის არ იცვლება. მაშასადამე, ცილინდრის ფუძეზე პროექციისას ელიფსი გადადის წრეწირში. ახლა კი საკმარისია შევნიშნოთ, რომ სიბრტყეზე პროექცია სათანადო წრფის მიმართ კუმშვის ეკვივალენტურია.

მეორე ხარისხის ნებისმიერი განტოლება:

$$p(x,y) = ax^2 + 2bxy + ay^2 +$$
$$+2dx + 2ey + f = 0,$$

რომელსაც აქვს ნამდვილი ფესვები, აღწერს კონიკს. ამაში რომ დავრწმუნდეთ,სიბრტყე უნდა მოვაბრუნოთ იმ α კუთხით რომლისთვისაც:

$$cot2\alpha = \frac{c-a}{2b},$$

რითაც $2bxy$ შესაკრები გაქრება. შემდეგ მოვახდინოთ პარალელური გადატანა ისე, რომ გაქრეს წრფივი წევრები და მიღებული განტოლება მოგვცემს ან გადაგვარებულ კონიკს (წრფეთა წყვილს, წრფეს ან წერტილს), ან (შესაძლებელია x და y კოორდინატების ადგილების შეცვლით) დაემთხვევა ელიფსს, ჰიპერბოლას ან პარაბოლას.

ახლა მზად ვართ, შევისწავლოთ კონიკების ფოკალური თვისებები.

თეორემა. ელიფსის (ჰიპერბოლის) მხები ტოლ კუთხეებს ადგენს მონაკვეთებთან, რომლებიც შეხების წერტილს აერთებენ ფოკუსებთან. ჰიპერბოლის შემთხვევაში მხები F_1MF_2 კუთხის ბისექტრისაა, ელიფსის შემთხვევაში კი — მოსაზღვრე კუთხის ბისექტრისა. პარაბოლის M წერტილზე გავლებული მხები ტოლ კუთხეებს ადგენს MF წრფესა და პარაბოლის ღერძთან.

ამრიგად, ელიფსის ფოკუსიდან გამოსული სინათლის სხივი აირეკლება მისი ზედაპირიდან და ეცემა მეორე ფოკუსზე. თუ ელიფსის ფოკუსზე არის სინათლის წყარო, მაშინ სინათლის სხივთა კონა ელიფსის ზედაპირიდან არეკვლის შემდეგ შეიკრიბება მეორე ფოკუსში.

თუ სინათლის წყაროს მოვათავსებთ ჰიპერბოლის ერთ-ერთ ფოკუსზე, მაშინ არეკლილი სინათლის სხივთა კონა დაიშლება, ხოლო სხივების წარმოსახვითი გაგრძელება შეიკრიბება მეორე ფოკუსში.

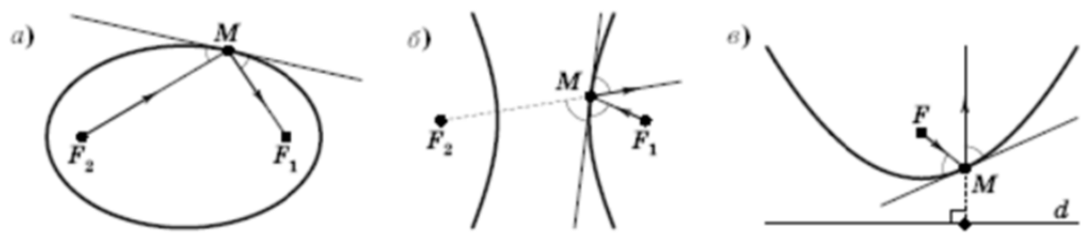
დაბოლოს, პარაბოლის ფოკუსიდან გამოსული სხივთა კონა, რომელიც მისი ზედაპირიდან აირეკლება, ხდება პარალელურ სხივთა კონა.

პარაბოლის ფოკალური თვისება, რომელიც ჯერ კიდევ აპოლონმა აღმოაჩინა, დღეს ყველგან გამოიყენება. ჯიბის ფანრის პარაბოლური სარკე ქმნის ვიწრო მიმართულ სინათლის სხივს. პარაბოლური ანტენის ან ტელესკოპში პარაბოლური სარკის მუშაობის პრინციპი ასევე ემყარება პარაბოლის თვისებას, პარალელურ სხივთა კონა (და ე.ი., შორი წყაროდან მომავალი სხივებიც) გარდაქმნას კონად, რომელიც ერთ წერტილში იკრიბება.

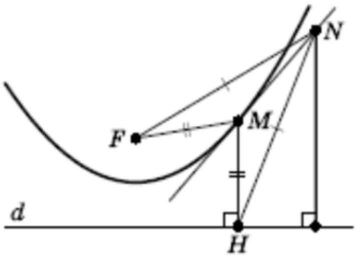
ისღა დაგვრჩენია, დავამტკიცოთ კონიკების ფოკალური თვისება.

თეორემის დამტკიცება. M წერტილზე გავლოთ ელიფსის მხები. რადგან M წერტილი მდებარეობს ელიფსზე, ამიტომ $MF_1 + MF_2 = c$. მხების ყველა დანარჩენი წერტილი ელიფსის გარეთაა, ამიტომ დანარჩენი წერტილებისთვის ფოკუსებამდე მანძილთა ჯამი მეტია c-ზე. ამრიგად, M წერტილში მიიღწევა F_1 და F_2 წერტილებამდე მანძილთა ჯამისთვის მინიმუმი. ე.ი. მხების მიმართ F_2-ის სიმეტრიული წერტილი მდებარეობს MF_1 წრფეზე, საიდანაც გამომდინარეობს ფოკალური თვისება. ზუსტად ასევე მტკიცდება ჰიპერბოლის ფოკალური თვისებაც.

დავამტკიცოთ პარაბოლის ფოკალური თვისება. პარაბოლის ნებისმიერი M წერტი-



ლიდან დირექტრისაზე დავუშვათ მართობი MH და გავავლოთ წრფე, რომელიც HMF კუთხეს შუაზე ყოფს.



ამ წრფის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული F და H წერტილებიდან, ე.ი., ამ წერტილიდან F წერტილამდე მანძილი მეტია დირექტრისამდე მანძილისა (თუ ეს წერტილი არ ემთხვევა M-ს). ამიტომ ამ წრფის ყველა წერტილი, გარდა M წერტილისა, პარაბოლის გარეთ მდებარეობს, ე.ი., ეს წრფე მხებია. ამრიგად, მხები ადგენს ტოლ კუთხეებს FM წრფესა და პარაბოლის ღერძთან.

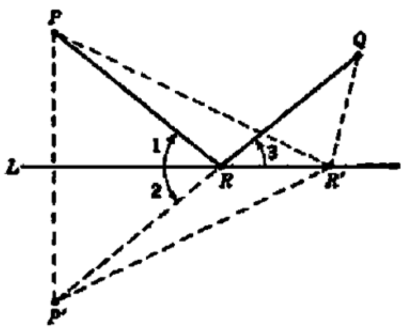
მაქსიმუმი და მინიმუმი გეომეტრიაში

ანა დანელია

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასისტენტ-პროფესორი

ექსტრემალური ამოცანები — ამოცანები მაქსიმუმზე და მინიმუმზე — ოდითგანვე იზიდავდა სხვადასხვა თაობის მეცნიერთა ყურადღებას. ასეთი ამოცანების ამოხსნის მცდელობისას ხშირად ჩნდებოდა და ვითარდებოდა მათემატიკის ახალი თეორიები და მიმართულებები.

ექსტრემალური ამოცანებისადმი ინტერესი გამოწვეული იყო არა მარტო მათი სილამაზით, არამედ იმით, რომ ამ ამოცანების უმეტესობა მოდიოდა პრაქტიკიდან. ჯერ კიდევ დიდი ხნით ადრე, ექსტრემალურ ამოცანათა თეორიის, როგორც დარგის, ჩამოყალიბებამდე, შეამჩნიეს, რომ ბუნების თითქმის ყველა კანონი ემორჩილება ექსტრემალურ პრინციპებს. როგორც ყველა დროის ერთ-ერთი უდიდესი მათემატიკოსი ლეონარდ ეილერი (1707-1783) ამბობდა, „სამყაროში არაფერი არ ხდება, რაშიც არ იყოს რაღაც აზრით ჩაქსოვილი მაქსიმუმის ან მინიმუმის პრინციპი". მონაკვეთი არის მისი ბოლოების შემაერთებელი უმცირესი წირი. სფეროს ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი უმცირესი წირი არის ამ წერტილებზე გამავალი უდიდესი წრეწირის რკალი. ერთნაირი სიგრძის ჩაკეტილ წირებს შორის წრეწირი შემოწერს უდიდეს ფართობს და ერთნაირი ფართობის მქონე ზედაპირებს შორის სფერო — უდიდეს მოცულობას. ამ ტიპის მაქსიმუმისა და მინიმუმის თვისებები ჯერ კიდევ ძველი ბერძნებისთვის იყო ცნობილი, თუმცა შედეგები ხშირად მოყვანილი იყო მკაცრი დამტკიცების მცდელობის გარეშე. ერთ-ერთი ძალიან მნიშვნელოვანი ბერძნული აღმოჩენა ეკუთვნის ჰერონს, ჩვენი წელთაღრიცხვით პირველი საუკუნის მკვლევარს ალექსანდრიიდან. დიდი ხნის განმავლობაში ცნობილი იყო, რომ P წერტილიდან გამომავალი სინათლის სხივი, რომელიც ეცემა ბრტყელ L სარკულ ზედაპირს R წერტილში, აირეკლება QR წრფის გასწვრივ ისე, რომ PR და QR ადგენენ ტოლ კუთხეებს L-თან.



ჰერონმა აღმოაჩინა, რომ, თუ $R'R$-სგან განსხვავებული რაიმე წერტილია სარკეზე, მაშინ $PR' + R'Q$ მეტია, ვიდრე $PR + RQ$. ეს თეორემა ახასიათებს PRQ სინათლის რეალურ გზას, როგორც შესაძლო უმოკლეს გზას P-დან Q-მდე L-ის გავლით. ეს იყო აღმოჩენა, რომელიც შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც ჩანასახი გეომეტრიული ოპტიკისა.

ბუნებრივია, რომ მათემატიკოსები დაინტერესდნენ ამ ტიპის საკითხებით. ყოველდ-

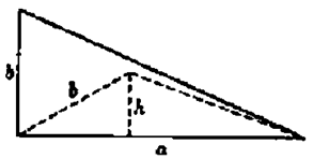
ღიურ ცხოვრებაში მაქსიმუმისა და მინიმუმის საკითხი, როგორც „ძალიან კარგი“ და „ძალიან ცუდი“, სისტემატურად გვხვდება. პრაქტიკული მნიშვნელობის ბევრი პრობლემა თავს იჩენს ამ ფორმით. მაგალითად, რა ფორმის უნდა იყოს ნავი, რომ წყლის წინააღმდეგობა დაყვანილ იქნეს შესაძლო მინიმუმამდე? მოცემული რაოდენობის მასალისგან რა ფორმის კონტეინერი უნდა იქნეს დამზადებული მაქსიმალური მოცულობის მისაღებად?

მეჩვიდმეტე საუკუნიდან დაწყებული, მაქსიმუმისა და მინიმუმის თეორია გახდა მეცნიერების სისტემატური კვლევის საგანი.

განვიხილოთ ყველაზე ელემენტარული ექსტრემალური ამოცანა:

ვთქვათ, მოცემულია ორი დადებითი რიცხვი — a და b. ვიპოვოთ მაქსიმალური ფართობის მქონე სამკუთხედი, რომლის ორი გვერდის სიგრძეები, შესაბამისად, a და b რიცხვებია.

ამ ამოცანის ამოხსნა არის მართკუთხა სამკუთხედი კათეტებით, რომელთა სიგრძეებია a და b .

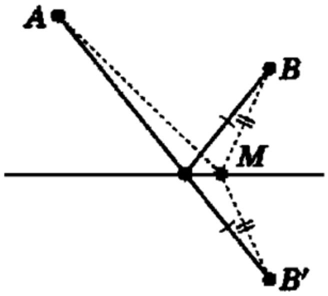


მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი სამკუთხედი, რომლის ორი გვერდის სიგრძეებია a და b. თუ h არის a გვერდზე დაშვებული სიმაღლე, მაშინ სამკუთხედის ფართობი $S=\frac{1}{2}ah$ მაქსიმალურია, როცა h უდიდესია. ეს კი ხდება მხოლოდ მაშინ, როცა $h=b$. ე.ი. მაქსიმალური ფართობია $S=\frac{1}{2}ab$, ანუ მოცემული სამკუთხედი მართკუთხაა კათეტებით a და b.

ახლა დავუბრუნდეთ ჰერონის თეორემას.

სიბრტყეზე მოცემულია ორი — A და B წერტილი, რომლებიც რაიმე l წრფის ერთ მხარეს მდებარეობენ. ვიპოვოთ ამ წრფეზე ისეთი M წერტილი, რომლისთვისაც ჯამი $AM+BM$ იქნება მინიმალური. ამ ამოცანას ბევრი პრაქტიკული გამოყენება აქვს, ერთ-ერთია, მაგალითად, ასეთი: მდინარის ერთ მხარეს მდებარეობს ორი დასახლებული პუნქტი. სად უნდა ავაშენოთ ამ მდინარეზე წყალსაცავი, რომ წყლით მომარაგება ამ პუნქტებისა მოხდეს მინიმალური დანახარჯით?

ამოცანის ამოსახსნელად ავრეკლოთ B წერტილი სარკულად l წრფის მიმართ (ნახაზი 1). ამ ასახვით BM მონაკვეთი გადავა იმავე სიგრძის $B'M$ მონაკვეთში და ამიტომ $AM+BM=AM+B'M$. სამკუთხედის უტოლობის თანახმად, რომელიც ეკვივალენტურია დებულებისა, რომ სიბრტყის ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილი არის ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძე, გვაქვს, რომ $AM+B'M$ სიდიდე ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას, როდესაც M წერტილი მდებარეობს AB' წრფეზე.

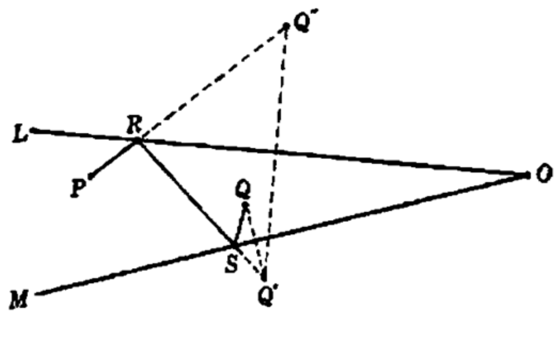


ნახ. 1.

ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ საძიებელი M წერტილი წარმოადგენს l წრფისა და AB' მონაკვეთის თანაკვეთის წერტილს.

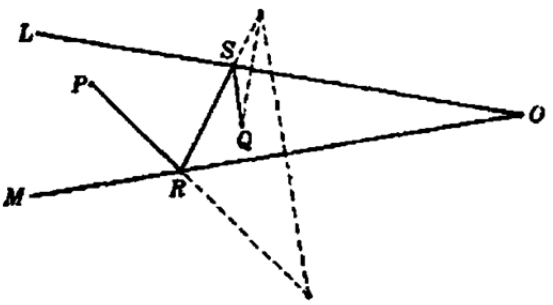
ეს ამოცანა შეიძლება განზოგადებულ იქნეს, თუ განვიხილავთ არა ერთ, არამედ რამდენიმე წრფეს $l, m, \ldots$. მაგალითად, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა გვაქვს ორი წრფე — l, m და ორი წერტილი — P, Q. ვიპოვოთ მინიმალური სიგრძის გზა P-დან l წრფემდე, შემდეგ m წრფემდე და ბოლოს Q წერტილამდე.

ვთქვათ, Q' არის Q-ს ანარეკლი m-ის მიმართ, Q'' კი Q'-ის ანარეკლია l-ის მიმართ. ვთქვათ, $Q''P$ კვეთს l წრფეს R წერტილში, ხოლო $Q'R$ კვეთს m წრფეს S წერტილში. მაშინ R და S საძიებელი წერტილებია, რაც იგივეა, რომ $PR+RS+SQ$ მინიმალური სიგრძისაა P-დან l-მდე, შემდეგ m-მდე, და, ბოლოს, Q-მდე.



ეს ფაქტი მტკიცდება ზუსტად ისე, როგორც ჰერონის თეორემა, ამიტომ მის დამტკიცებას აქ არ მოვიყვანთ.

შეიძლება ამოცანა დაისვას ასე: ვიპოვოთ უმოკლესი გზა P-დან m-მდე, შემდეგ l-მდე და აქედან Q-მდე. ეს მოგვცემს გზას $PRSQ$, რომელიც მიიღება წინა $PRSQ$ გზის მსგავსად. პირველი გზის სიგრძე შეიძლება აღმოჩნდეს როგორც მეტი, ასევე ტოლი ან ნაკლები, ვიდრე მეორე.

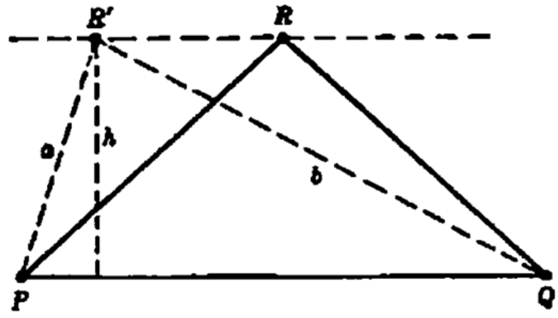


სავარჯიშო: აჩვენეთ, რომ პირველი გზა ნაკლებია მეორეზე, თუ O და RPQ წრფის ერთ მხარესაა. როდის იქნება ეს გზები ტოლი?

ჰერონის თეორემა საშუალებას იძლევა, მარტივად ამოვხსნათ შემდეგი ორი ამოცანა.

1. მოცემულია სამკუთხედის ფართობი S და ერთი გვერდი $PQ = c$. ყველა ასეთ სამკუთხედს შორის ვიპოვოთ ის სამკუთხედი, რომლისთვისაც დანარჩენი ორი a და b გვერდის ჯამი იქნება მინიმალური.

რადგან სამკუთხედის ფართობი და ერთი გვერდი მოცემულია, ამიტომ, დაფიქსირებულია ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე (გავიხსენოთ ფორმულა $S = \frac{1}{2}ah$). ამრიგად, ჩვენი ამოცანაა ვიპოვოთ ისეთი R წერტილი, რომ ამ წერტილიდან PQ წრფემდე არის h და $a + b$ მინიმალურია.

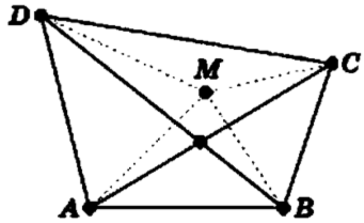


ცხადია, რომ R მდებარეობს წრფეზე, რომელიც PQ-ს პარალელურია და მისგან h-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. ეს არის ჰერონის თეორემის კერძო შემთხვევა, როცა P და Q წერტილები თანაბრადაა დაშორებული l წრფიდან: საძიებელი PRQ სამკუთხედი ტოლფერდაა.

ვთქვათ, მოცემულია სამკუთხედის ერთი გვერდი c და დანარჩენი ორი გვერდის ჯამი $a + b$. ყველა ასეთ სამკუთხედს შორის ვიპოვოთ ის სამკუთხედი, რომელსაც აქვს უდიდესი ფართობი. ეს არის წინა ამოცანის შებრუნებული ამოცანა. ამონახსნი ისევ ტოლფერდა სამკუთხედია, რომლისთვისაც $a = b$. როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, ამ სამკუთხედს აქვს $a + b$-ს მინიმალური მნიშვნელობა მოცემული ფართობისთვის, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი სხვა იმავე ფართობის სამკუთხედისთვის c ფუძით $a + b$ უფრო დიდია. უფრო მეტიც, წინა ამოცანიდან ცხადია, რომ ნებისმიერი სამკუთხედისთვის c ფუძით და მეტი ფართობით $a + b$ უფრო დიდია. ამრიგად, ნებისმიერ სხვა სამკუთხედს $a + b$-სა და c-ს იგივე მნიშვნელობებისთვის აქვს ნაკლები ფართობი. ე.ი., ტოლფერდა სამკუთხედს აქვს მაქსიმალური ფართობი მოცემული c და $a + b$ -თვის.

ახლა ცოტათი გავართულოთ ჰერონის ამოცანა. ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია არა ორი, არამედ სამი — A, B და C წერტილი, რომლებიც ასევე რაიმე l წრფის ერთ მხარეს მდებარეობენ. უნდა ვიპოვოთ ისეთი M წერტილი, რომ ჯამი $AM + BM + CM$ იყოს მინიმალური. ბევრი მცდელობა ამ ამოცანის ამოხსნისა ისევე ელემენტარულად, როგორც ორი წერტილის შემთხვევაში, არეკვლის პრინციპის გამოყენებით, უშედეგოდ დასრულდა. ამის გამო მათემატიკოსები იძულებულნი გახდნენ, შეექმნათ რაღაც აპარატი, რომელსაც ახლა ვარიაციულ მეთოდს უწოდებენ.

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია ამოზნექილი ოთხკუთხედი. სიბრტყეზე ვიპოვოთ ისეთი წერტილი, რომ ამ წერტილიდან ოთხკუთხედის წვეროებამდე მანძილთა ჯამი იყოს უმცირესი. ამოხსნა ძალზედ მარტივია: საძიებელი M წერტილი წარმოადგენს ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილს. მართლაც, სამკუთხედის უტოლობის გამო, მანძილთა ჯამი $AM + CM$ მეტია ან ტოლი AC დიაგონალზე, ხოლო $BM + DM$ არანაკლებია, ვიდრე BD.



ამიტომაც საძიებელი მინიმუმი მიიღწევა დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე. იგივე ამოცანა სამკუთხედისთვის საჭიროებს უფრო გონებამახვილურ მიდგომას. პასუხის ფორმულირებისთვის დაგვჭირდება, ეგრეთ წოდებული, სამკუთხედის ტორიჩელის წერტილის ცნება, რომელსაც შემდგომ განვმარტავთ. რაც შეეხება ამ ამოცანის განზოგადებას ნებისმიერი მრავალკუთხედის შემთხვევაში, მისი ამოხსნა კვლავ საჭიროებს ვარიაციული მეთოდის გამოყენებას. შესაძლებელია სხვანაირი განზოგადებაც: შევაერთოთ მოცემული ოთხკუთხედის წვეროები გზათა სისტემით ისე, რომ ჯამური სიგრძე იყოს მინიმალური. ამ ამოცანის ამოხსნა მიგვიყვანს მოცემულ წერტილთა სისტემისათვის (ანუ ოთხი წერტილისგან შემდგარი სისტემის) შტეინერის ბადის ცნებამდე. როგორც ვხედავთ, მსგავსი ამოცანები შეიძლება ამოიხსნას სხვადასხვა მიდგომით. მანამდე ჩამოვთვალოთ რამდენიმე ამოცანა, რომელიც იხსნება მარტივი პრინციპით, რომელსაც „მონაკვეთთა ერთ წრფეზე განლაგების პრინციპი ჰქვია“. ეს პრინციპი გამოყენებულ იქნა ჰერონის ამოცანის ამოსახსნელად.

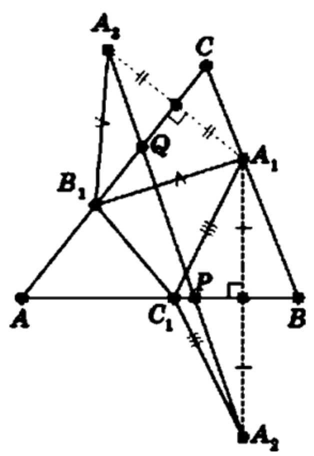
1. კუთხის შიგნით მოცემულია რაიმე M წერტილი. ვიპოვოთ ისეთი A და B წერტილები კუთხის გვერდებზე, რომ ABM სამკუთხედის პერიმეტრი იყოს მინიმალური.
2. კუთხის შიგნით მოცემულია M და N წერტილი. ვიპოვოთ ისეთი A და B წერტილები კუთხის გვერდებზე, რომ $ABMN$ ოთხკუთხედის პერიმეტრი იყოს მინიმალური.
3. სიბრტყეზე მოცემულია ორი — A და B წერტილი, რომლებიც რაიმე l წრფის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ. ვიპოვოთ ამ წრფეზე ისეთი M წერტილი, რომლისთვისაც $|AM - BM|$ სიდიდე იქნება მინიმალური.
4. A და B პუნქტები განლაგებულია მდინარის სხვადასხვა მხარეს. სად უნდა ავაშენოთ ხიდი, რომ ამ პუნქტებს შორის გზა იყოს უმოკლესი? იგულისხმება, რომ მდინარის ნაპირები ერთმანეთის პარალელურია და ხიდი კი — ამ ნაპირების პერპენდიკულარული.
5. A და B პუნქტებს ყოფს ორი პარალელური მდინარე. სად უნდა ავაშენოთ ხიდები ამ მდინარეებზე, რომ ამ პუნქტებს შორის გზა იყოს უმოკლესი? იგულისხმება, რომ მდინარის ნაპირები ერთმანეთის პარალელურია და ხიდი კი — ამ ნაპირების პერპენდიკულარული.

ფანიანოს ამოცანა

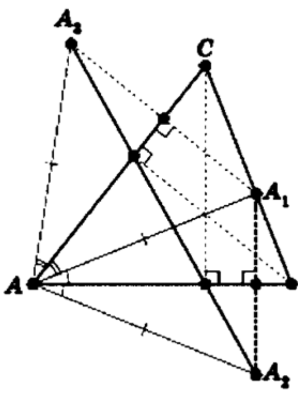
მეთვრამეტე საუკუნის დასაწყისში იტალიელმა ინჟინერმა და მათემატიკოსმა ფანიანო დეი ტოსკიმ (1682-1766) დასვა შემდეგი ამოცანა:

ჩავხაზოთ მოცემულ მახვილკუთხა ABC სამკუთხედში უმცირესი პერიმეტრის მქონე სამკუთხედი. ჩახაზვის ქვეშ ვგულისხმობთ, რომ ABC სამკუთხედის თითოეულ გვერდზე მდებარეობს საძიებელი სამკუთხედის ერთი წვერო.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ ზემოთ ხსენებულ მონაკვეთთა ერთ წრფეზე განლაგების პრინციპით. დავაფიქსიროთ BC გვერდზე რაიმე A_1 წერტილი და სიბრტყის მოძრაობით შევეცადოთ ყველა იმ ჩახაზული სამკუთხედის გვერდები, რომლის ერთი წვეროა A_1, განვალაგოთ ტეხილზე, რომელიც ისეთ ორ წერტილს აერთებს, რომლებიც ყველა ასეთი ჩახაზული სამკუთხედისთვის ერთი და იგივეა. მაშინ საძიებელი პერიმეტრი მიიღწევა იმ შემთხვევაში, როცა ეს ტეხილი გადაიქცევა მონაკვეთად. ამისათვის A_1 წერტილი ავრეკლოთ AB და AC გვერდების მიმართ. მიღებული წერტილები აღვნიშნოთ, შესაბამისად, A_2 და A_3-ით.



მაშინ ცხადია, რომ ჩახაზული $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია $A_3B_1C_1A_2$ ტეხილის სიგრძისა, რომელიც მინიმალურია, როცა ეს ტეხილი გადაიქცევა A_3A_2 მონაკვეთად, ხოლო ეს ხდება იმ შემთხვევაში, როცა B_1 და C_1 წერტილები დაემთხვევა A_3A_2 მონაკვეთის AC და AB გვერდებთან გადაკვეთის Q და P წერტილებს. ამრიგად, ამოცანის ამოსახსნელად დაგვრჩა, შევარჩიოთ A_1 წერტილი ისე, რომ A_2A_3 მონაკვეთის სიგრძე იყოს მინიმალური. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ სამკუთხედი A_2AA_3 ტოლფერდაა $A_3A = A_2A = A_1A$, ხოლო A წვეროსთან მდებარე კუთხე ტოლია გაორკეცებული BAC კუთხის და ამიტომ არაა დამოკიდებული A_1 წვეროს არჩევაზე.



ამრიგად, A_1 წერტილის მოძრაობით BC გვერდზე, კუთხე, რომლითაც A წერტილი უყურებს A_3A_2 გვერდს, არის მუდმივი და ამიტომაც A_3A_2-ის სიგრძე იქნება მინიმალური, როცა A_2A ანუ A_1A არის მინიმალური. ეს კი, ცხადია, ხდება მაშინ, როცა A_1 ემთხვევა A წერტილიდან BC გვერდისადმი დაშვებული სიმაღლის ფუძეს. მივიღეთ, რომ არსებობს უმცირესი პერიმეტრის მქონე ჩახაზული სამკუთხედი, რომელიც წარმოადგენს ორთოსამკუთხედს, ანუ სამკუთხედს, რომლის წვეროები გვერდებისადმი გავლებული სიმაღლეების ფუძეებია. ამავე დროს ეს სიმაღლეები წარმოადგენენ ამ ორთოსამკუთხედის ბისექტრისებს. ამ თვისების გამო, სინათლის სხივი, რომელიც გაშვებულია ორთოსამკუთხედის ერთი გვერდის გასწვრივ, დაბრუნდება გაშვების წერტილში (ფიზიკიდან გავიხსენოთ, რომ სინათლის სხივის ზედაპირიდან არეკვლისას, სინათლის დაცემის კუთხე მისი არეკვლის კუთხის ტოლია). ზოგჯერ ამბობენ, რომ სინათლის ეს ჩაკეტილი ტრაექტორია წარმოადგენს ბილიარდს მოცემული სამკუთხედისთვის. ორთოსამკუთხედს, როგორც მისი აგებიდან ჩანს, აქვს შემდეგი თვისება:

ორთოსამკუთხედის პერიმეტრი ტოლია სამკუთხედის სიმაღლის გაორკეცებული ნამრავლისა იმ კუთხის სინუსზე, რომლიდანაც იგი გამოდის. ამ თვისებიდან ვღებულობთ, რომ სამკუთხედისთვის სამივე ასეთი ნამრავლი ერთმანეთის ტოლია. ეს სიდიდე, თავის მხრივ, ტოლია სამკუთხედის გაორკეცებული ფართობის ფარდობისა შემოხაზული წრეწირის დიამეტრთან.

დაბოლოს, საინტერესოა ფანიანოს ამოცანის განხილვა ბლაგვკუთხა სამკუთხედის შემთხვევაში, რომელსაც ვანდობთ მკითხველს.

წერილები ალბათობაზე
(პასკალის წერილები ფერმასთან)

ომარ ფურთუხია

პროფესორი
მათემატიკის დეპარტამენტის ხელმძღვანელი,
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მეთხუთმეტე და მეთექვსმეტე საუკუნეების იტალიელმა მათემატიკოსებმა, კერძოდ კი პაჩოლიმ (1494), ტარტალიამ (1556) და კარდანმა (1545) განიხილეს ორ მოთამაშეს შორის წილის გაყოფის პრობლემა, რომელთა შეჯიბრება თამაშის დამთავრებამდე შეწყდა. ეს პრობლემა პასკალსა და ფერმას, სავარაუდოდ, 1654 წელს შესთავაზა შევალიე დე მერემ, აზარტული თამაშების ფრანგმა მოთამაშემ, რომელსაც, როგორც ამბობენ, გააჩნდა არაჩვეულებრივი შესაძლებლობები „თვითონ მათემატიკოსებისთვისაც კი". ამის შემდგომი მიმოწერა ფერმასა და პასკალს შორის იყო ფუძემდებლური ალბათობის თეორიის თანამედროვე კონცეფციების განვითარებაში, მაგრამ, სამწუხაროდ, ისტორიამ არ შემოგვინახა პასკალის შესავალი წერილი ფერმასთვის და არც ფერმას პასუხები პასკალის წერილებზე. მიუხედავად ამისა, ჩვენ საჭიროდ ჩავთვალეთ ქართველი მკითხველისთვის მიგვეწოდებინა 1654 წლის პასკალის ოთხი[1] წერილი ფერმასთვის[2], რომლებიც გარკვეულწილად გვიჩვენებს იმდროინდელი პრობლემის არსსა და ხასიათს და ალბათობის თეორიის, როგორც მეცნიერების, წარმოშობის პროცესს.

ავტორი *ალფრედ რენი*
თარგმნა *ომარ ფურთუხიამ*

წერილი პირველი

პარიზი,
სენ-მიშელის გარეუბანი,
1654 წლის 28 ოქტომბერი
ბატონ პიერ ფერმას
ტულუზა

ძვირფასო ბატონო ფერმა!

...

ახლა, როცა ერთი წლის უკან — როანის ჰერცოგისა და ბატონ მიტონის საზოგადოებაში პუატუში მოგზაურობისას — შევალიე დე მერეს[3] მიერ დასმული საკითხები გადაწყვეტილია,

[1] აქ თქვენ გაეცნობით პირველ ორ წერილს, ხოლო მომდევნო ორს კი — ჟურნალის შემდეგ ნომერში.
[2] პასკალი და ფერმა ფიზიკურად ერთმანეთს არასდროს შეხვედრიან. 1660 წელს ფერმა აპირებდა შეხვედროდა პასკალს, მაგრამ, ორივე მეცნიერის ცუდი ჯანმრთელობის მდგომარეობის გამო, შეხვედრა ვერ შედგა — მთარგმნელის შენიშვნა.
[3] მე-17 საუკუნეში მცხოვრები ფრანგი აზნაური, აზარტული თამაშების მოყვარული — მთარგმნელის შენიშვნა.

უნდა გამოგიტყდეთ, რომ ყველაზე მეტად მე მახარებს ის ფაქტი, რომ მასთან დაკავშირებული მიმოწერა ჩვენი მეგობრობის განმტკიცების საფუძველი გახდა. მე ვაფასებ ამ მეგობრობას, უპირველეს ყოვლისა, არა მარტო იმიტომ, რომ მიმაჩნიხართ თანამედროვე ევროპის უდიდეს გეომეტრად, არამედ იმიტომაც, რომ თქვენი წერილები მე დამეხმარა გამეცნო ადამიანი, რომელთან მეგობრობით შეუძლიათ იამაყონ თვითონ მეფეებმაც. ამრიგად, სახელგანთქმული შევალიეს კითხვებმა — თუნდაც ისინი არ წარმოადგენდნენ სერიოზულ ინტერესს — ფასდაუდებელი სამსახური გამიწიეს. სწორედ იმიტომ, რომ ჩემთვის ესოდენ ძვირფასია თქვენი მეგობრობა, მსურს გაგიზიაროთ გარკვეული მოსაზრებები. მე ვგრძნობ მოთხოვნილებას გაცნობოთ თქვენ, თუ რატომ მაღელვებენ ისინი ასე, რატომ ვთვლი მე მათ — ამასთანავე, ორი განსხვავებული მიზეზით — მათემატიკოსების ყურადღების ღირსად და საიდან გამიჩნდა გამბედაობა მოგიწვიოთ თქვენ ამ პრობლემების გადაწყვეტაში მონაწილეობის მისაღებად. იმავდროულად, მე გააზრებული მაქვს პასუხისმგებლობა, რომელსაც ვიღებ ჩემს თავზე, როცა ვცდილობ თქვენი ყურადღება გადავიტანო იმ გამოკვლევებიდან, რომელთა წინაშეც, სხვათა შორის, ჩემზე მეტად არავინ იხრის ქედს. თუმცა, როგორც უკვე აღვნიშნე, ამასთან დაკავშირებით ჩემი სინდისი სუფთაა, ჩემს მოვალეობად მიმაჩნია, განვმარტო რაზეა საუბარი, ვინაიდან ჩვენს წერილებში ამ პრობლემებზე ჯერ არ ყოფილა ლაპარაკი. ვხელმძღვანელობდი რა ამ მოსაზრებებით, მე მივედი იმ აზრამდე, რომ მომეწერა თქვენთვის ეს წერილი.

თუმცა ამასთან დაკავშირებით არსებობს სხვა მიზეზებიც. ვიმედოვნებ, რომ თქვენთვის ცნობილია ჩემი წერილის შესახებ პარიზის აკადემიაში, რომელიც მე დავწერე რამდენიმე კვირის უკან. ვშიშობ, რომ თქვენ მაღალფარდოვნად მოგეჩვენებათ შემდეგი ფრაზა, რომელიც ასახავს ჩემ მიერ ჩაფიქრებულ, მაგრამ ჯერ კიდევ დაუწერელ ნაშრომს: „ამრიგად, ამ სწავლებას, რომელიც მათემატიკური დამტკიცებების სიზუსტეს აერთიანებს შემთხვევითობის განუსაზღვრელობასთან და შესაძლებელს ხდის ამ, ერთი შეხედვით, საპირისპირო ელემენტების თანაარსებობას, სრული უფლება აქვს პრეტენზია ჰქონდეს ტიტულზე „შემთხვევითობის მათემატიკა“. ეს სიტყვები მე ჩავიწერე მაშინვე, როგორც კი ჩემში დაიბადა და მომწიფდა თვითონ იდეა. გადავიკითხავ რა მათ თავიდან, მე მახსენდება ის აღმაფრენა, რომელიც დამეუფლა, როცა ისინი გადავიტანე ქაღალდზე. აკი ჩაისახა მათემატიკის ახალი მიმართულება და, ვიმედოვნებ, რომ დიდი მომავლით! მე არ გამიკვირდება, თუ ვინმე ჩემს თავშეუკავებელ სიხარულში დაინახავს რაღაც ცუდს და იფიქრებს თითქოს ამაში დამნაშავეა ის გარემოება, რომ მათემატიკის ახალი მიმართულების შექმნაში არის ჩემი მონაწილეობის წილიც. ძალიან კარგი, ასეთი სახის სიამაყე წარმოადგენს ადამიანური სისუსტის ერთ-ერთ გამოვლინებას, რომელიც არც მე მაკლია, მაგრამ მუდმივად ვცდილობ მას ვებრძოლო. თუმცა, ვჩქარობ აქვე აღვნიშნო, რომ ახალი სწავლების შექმნის საქმეში თქვენი წვლილი მე გაცილებით მნიშვნელოვნად მიმაჩნია. დარწმუნებული ვარ, რომ ყველაფერ იმას, რაზეც ვლაპარაკობ ამ წერილში, თქვენ მიიღებთ მხოლოდ როგორც არასრულყოფილ მცდელობას გამოვხატო თქვენი, შესაძლებელია, ჯერ კიდევ გამოუთქმელი და დაუწერელი, მაგრამ უკვე დიდი ხნის წინ დადუღებული და დაკრისტალიზებული, აზრები. ჩემი ფორმულირებების არასაკმარისი სიზუსტის გასამართლებლად მხოლოდ იმის თქმა შემიძლია, რომ ამ აზრების გამოსახატავად მე არ გამაჩნდა შესაფერისი სიტყვები და იძულებული ვიყავი მესარგებლა ყოველდღიური ენით და მიმეცა მათთვის ახალი მნიშვნელობა.

ვიმედოვნებ, თქვენ გესმით, თუ რატომ ვგრძნობ მე დაუძლეველ მოთხოვნილებას გაგიზიაროთ ჩემი აზრები. სავარაუდოდ, თქვენ უკვე ეკითხებით თქვენს თავს, რა საჭიროა ამდენი წინასწარი ახსნა-განმარტება. მაგრამ თქვენ ხართ პირველი, ვისაც მე ვანდობ ჩემს აზრებს, არავისი იმედი მაქვს თქვენზე უკეთ გამიგონ, ამიტომ გულის ფანცქალით ველოდები თქვენს განაჩენს: მოვახერხე კი მათი არსის სწორად წარმოჩენა? სწორედ ამიტომაც ვარ ასეთი სიტყვაუხვი და ასე ვაყოვნებ დაწყებას, ვემსგავსები რა ზოგიერთ ავადმყოფს, რომელსაც ეშინია კბილის ამოღების და ყველანაირად აჭიანურებს დროს, ზედმეტად დაწვრილებით ატყობინებს რა ექიმს საშინელი ტკივილისა და იმის შესახებ, თუ რამდენად დიდხანს გრძელდება იგი. მაგრამ საკმარისია ამის შესახებ, დროა გადავიდე საქმეზე.

ჩემი აზრით, ადამიანი იბადება იმისთვის, რომ იფიქროს. აზროვნების შესაძლებლობა მას განასხვავებს ცხოველებისგან, ამაში მდგომარეობს მისი ადამიანური ღირსება. ჩვენ გარშემორტყმული ვართ ორმაგი უსასრულობით: ერთი მხრივ, უსასრულო გადაჭიმულობა სამყაროსი, რომელშიც არა მარტო ჩვენ თვითონ, არამედ დედამიწაც და მთელი მზის სამყაროც კი წარმოადგენს არაუმეტეს წვეთებს ზღვაში; მეორე მხრივ — უსასრულო სირთულე მსოფლიოსი, რომელშიც წყლის ყოველი წვეთი თვითონ ქმნის მცირე სამყაროს. ჩვენ თვითონ ვიმყოფებით სადღაც შუაში უსასრულოდ დიდსა და უსასრულოდ მცირეს შორის. ჩვენ ვართ ნაწილაკები ვარსკვლავებთან შედარებით და, იმავდროულად, გიგანტები იმ უმცირეს ცოცხალ ორგანიზმებთან შედარებით, რომლებითაც გადავსებულია წყლის თითოეული წვეთი. მიუხედავად იმისა, ჩვენი გულისყური მიპყრობილია ვარსკვლავებისკენ თუ ვცდილობთ შევაღწიოთ საკუთარ სულში, სურვილი გვაქვს, რომ შევისწავლოთ მომავალი თუ წარსული — ყველგან, თანაბრად, ჩვენ არ შეგვიძლია ვიპოვოთ მყარი საყრდენი წერტილი. თუ ყველაფერს, რაც ჩვენთვის ცნობილია და რაშიც ჩვენ დარწმუნებული ვართ, მოვაქცევთ ჩვენი ყურადღების ცენტრში, ჩვენი ლოგიკის მიკროსკოპის ქვეშ და საფუძვლიანად განვიხილავთ, მაშინ აღმოჩნდება, რომ ჩვენ დარწმუნებით არაფრის მტკიცება შეგვიძლია. მე მიმაჩნია უმნიშვნელო ნუგეშისცემად ის გარემოება, რომ ამ პრობლემებთან ჩემი უშედეგო ბრძოლა იმას მაინც ამტკიცებს, რომ „მე ვარსებობ“. მაგრამ, მე მაინტერესებს არა საკითხი, ვარსებობ თუ არა მე, არამედ ვინ ვარ, საკუთრივ, მე. ამ კითხვაზე პასუხს ვერ ვპოულობ და ხანდახან ვიტანჯები ამ მტკივნეული გაურკვევლობისგან. ჩვენ არ ვიცით, საიდან მოვედით, რისთვის მოვედით და სად მივდივართ. კაცობრიობას აქვს ბევრი რამ გასააზრებელი, მაგრამ ფიქრობს კი ამაზე ადამიანების უმრავლესობა? რა თქმა უნდა, არა. ადამიანები ფიქრობენ ომზე, ფულზე, გართობებზე და აზარტულ თამაშებზე. სხვათა შორის, მოთამაშის გაგება კიდევ შემიძლია: თამაში მას ხდის ბედნიერს, ვინაიდან გარკვეული დროით ის ივიწყებს თავის საჭიროებებზე და მოვალეობებზე. თუმცა, ამასთანავე, ის ივიწყებს თავის თავსაც. თამაში ათაყვანებს მას, როგორც ოპიუმი, და ყურადღება გადააქვს რეალური პრობლემებისგან. მაგრამ, თუკი ვინმე დროდადრო მიეცემა თავდავიწყებას, ეფლობა რა თამაშის გამაგრილებელ ნაკადებში, არც ესაა ჯერ კიდევ დიდი უბედურება; მხოლოდ არ უნდა დავუშვათ, რომ ის დაიხრჩოს. ჩემი აზრით, აზარტული თამაშების მნიშვნელოვან კანონზომიერებებზე ფიქრები შეიძლება აღმოჩნდეს სწორედ ის საშუალება, რომელსაც შეუძლია გაანთავისუფლოს მოთამაშე თამაშის მომხიბვლელობისგან და დააბრუნოს იგი აზროვნების სამყაროში. უდავოდ ამაშია, მაგრამ არა ყველაზე მნიშვნელოვანი სარგებელი მათემატიკური ამოცანების კვლევების, რომლებიც დაკავშირებულია თამაშის დროს გაკეთებული ფსონების სამართლიან გაყოფასთან.

ამ საკითხების არსის გადმოცემამდე უნდა დავამატო, რომ ამ ტიპის გამოკვლევებმა საკმაოდ დადებითი გავლენა იქონია შევალიე დე მერეზე. ახლახან მე მას შევხვდი კიდევ ერთხელ და განცვიფრებული დავრჩი, როცა დავინახე, თუ როგორ შეიცვალა ის ამ ერთი წლის განმავლობაში. ადრე ის ამაყობდა იმით, რომ რეალურად არაფერი აინტერესებდა და ყველაფერს ეკიდებოდა გულგრილობით. მისთვის სამარცხვინო იყო იმის აღიარება, რომ მისი დაინტერესება და აღფრთოვანება შეეძლო რამეს, თამაშის გარდა; ამაყობდა იმით, რომ არ ექვემდებარებოდა ვნებებს, მათ შორის მეცნიერების მიმართ ვნებასაც. ეს ასეც იყო სინამდვილეში. ახლა კი მან გამაკვირვა თავისი ფუნდამენტური ცოდნით მათემატიკის მიმართულებით, რომელსაც იგი დაეუფლა ასე მოკლე დროის განმავლობაში; ამასთანავე იმით, რომ ის ასე ეჭვიანად და საფუძვლიანად არის დაკავებული სხვადასხვა ამოცანით, და არც ისე წარუმატებლად. გთხოვთ სწორად გამიგოთ, მე არ ვიტყუებ თავს იმ აზრით, რომ ეს ჩემი დამსახურებაა: შესაბამისი მისწრაფებები მას ჰქონდა დიდი ხნით ადრე ჩემს გაცნობამდე. ამას ყველაზე მეტად ადასტურებს ის ფაქტი, რომ მან თვითონ დასვა სათამაშო კამათელთან დაკავშირებული ამოცანები და იპოვა კიდეც მათ შორის ყველაზე მარტივის ამოხსნა. მაგრამ მან ვერ შეძლო ამოეხსნა მეორე ამოცანა — ამოცანა, რომლის ერთნაირ პასუხამდე მივედით მე და თქვენ სრულიად განსხვავებული მეთოდებით. სავარაუდოდ, თქვენ გეხსომებათ, თუ როგორი გადავსებული

აღტაცებით მოგწერეთ მაშინ, რომ ჭეშმარიტება ერთადერთია როგორც პარიზისთვის, ისე ტულუზისთვის. სწორედ ამან, მე ვფიქრობ, გამოიწვია შევალიე დე მერეში აღნიშნული ცვლილებები, შეეხო მის თავმოყვარეობას. გაერკვა რა ჩვენს ამოხსნებში, ის მიხვდა, რომ, თუ უფრო სერიოზულად დაკავდებოდა ამ საქმით, მაშინ თვითონაც შეეძლო ამ შედეგამდე მისვლა. თქვენ, რა თქმა უნდა, იცით, რომ ეს შემთხვევითობაა. ნებისმიერი სწორად გაგებული აღმოჩენა იწვევს ამ სახის ზემოქმედებას. ამაში მე ვხედავ უტყუარ ნიშანს იმისა, რომ შევალიე დე მერემ სწორად გაიგო ჩვენი ამოხსნა (და ეს ძალიან მახარებს), მაგრამ არაუმეტეს. თუმცა მე ისევ გადავუხვიე ძირითად თემას, მით უმეტეს, რომ თქვენ ნაკლებად სავარაუდოა გაინტერესებდეთ შევალიე დე მერე, ვინაიდან თქვენ მას არ იცნობთ.

მტკივნეული გაურკვევლობა, რის შესახებაც მე ვსაუბრობდი ზემოთ, ფესვგადგმულია იმ ცრურწმენაში, რომელიც ახასიათებს ბევრ ადამიანს, — უმრავლესობა ფიქრობს, რომ, თუ მას რაიმეს შესახებ არ გააჩნია სრული ცოდნა (ჩვენ კი არასოდეს გვაქვს სრული ცოდნა), მაშინ მათ საერთოდ არაფერი იციან ამის შესახებ. მე კი დარწმუნებული ვარ, რომ ასეთი შეხედულება ღრმად მცდარია. ნაწილობრივი ცოდნა აგრეთვე წარმოადგენს ცოდნას და არასრულ დარწმუნებულობას თანაბრად გააჩნია გარკვეული მნიშვნელობა, განსაკუთრებით მაშინ, როცა ჩემთვის ცნობილია ამ დარწმუნებულობის[4] ხარისხი. ვინმემ შეიძლება იკითხოს: „განა შესაძლებელია დარწმუნებულობის ხარისხი გაიზომოს რიცხვით?“, რა თქმა უნდა, ვუპასუხებ მე; ადამიანები, რომლებიც თამაშობენ აზარტულ თამაშებს, სწორედ ამაზე ამყარებენ თავიანთ დარწმუნებულობას. როცა მოთამაშე აგორებს სათამაშო კამათელს, მან წინასწარ არ იცის რა ქულა მოვა, მაგრამ რაღაცა მაინც იცის. მაგალითად, რომ ყველა ექვს რიცხვს — 1, 2, 3, 4, 5, 6 — გააჩნია წარმატების თანაბარი წილი. თუ ჩვენ შევთანხმდებით, რომ აუცილებელის (უტყუარის) მოხდენის შესაძლებლობას ჩავთვლით ერთის ტოლად, მაშინ 6 ქულის მოსვლის შესაძლებლობა, ისევე როგორც ნებისმიერის დანარჩენი ხუთი ქულიდან, გამოისახება წილადით 1/6. თუ სათამაშო კამათელს გავაგორებთ 4-ჯერ, მაშინ, როგორც ეს სამართლიანად შენიშნა შევალიე დე მერემ, უფრო მომგებიანია (თანაბარი ფსონების შემთხვევაში) დავდოთ სანაძლეო, რომ ერთხელ მაინც მოვა 6 ქულა. ეს შესაძლებელია გამოიხატოს სხვანაირადაც, თუ ვიტყვით, რომ სათამაშო კამათლის 4-ჯერ გაგორებისას დარწმუნებულობა ხდომილებაში, რომ ერთხელ მაინც მოვა 6 ქულა, იქნება 1/2-ზე მეტი. თუ რაიმე ხდომილების მოხდენის შანსები და მისი არმოხდენის შანსები თანაბარია (ისევე როგორც, მაგალითად, მონეტის აგდებისას „გერბისა“ და „საფასურის“ მოსვლის შანსები), მაშინ მე ვამბობ, რომ ამ ხდომილების მოხდენის დარწმუნებულობის ხარისხი შეადგენს 1/2-ს, ანუ ის ზუსტად ემთხვევა დარწმუნებულობის ხარისხს იმისა, რომ ეს ხდომილება არ მოხდება. რა თქმა უნდა, ის, რომ მე აუცილებელი (უტყუარი) ხდომილების მოხდენის დარწმუნებულობის ხარისხს ვირჩევ ერთის ტოლად, გაკეთებულია სრულიად ნებისმიერად; ერთის ნაცვლად შეგვეძლო აგვერჩია ნებისმიერი სხვა რიცხვი, მაგალითად 100. მაშინ დარწმუნებულობის ხარისხი იმისა, რომ შემთხვევითობაზე დამოკიდებულ ხდომილებას ექნება ადგილი, გამოსახული იქნებოდა პროცენტებში. სრული დარწმუნებულობა ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში აგრეთვე შეგვიძლია გავუტოლოთ სხვა შესაფერის რიცხვს, მაგალითად, სათამაშო კამათლის გაგორებისას ის შეიძლება ავიღოთ ექვსის ტოლი. მაშინ თითოეული ქულის მოსვლის დარწმუნებულობის ხარისხი იქნება ერთის ტოლი. თუმცა მე უფრო მარტივად და ბუნებრივად მიმაჩნია აუცილებელი ხდომილების მოხდენის დარწმუნებულობის ხარისხი მივიღოთ ერთის ტოლად. ამრიგად, შემთხვევითი ხდომილების მოხდენის დარწმუნებულობის ხარისხი იზომება იმით, თუ რა ნაწილია ის ერთის. თავისთავად იგულისხმება, რომ შეუძლებელი ხდომილების მოხდენის დარწმუნებულობის ხარისხი აღმოჩნდება ნულის ტოლი. ამრიგად, თუ შემთხვევითი ხდომილების მოხდენის შესაძლებლობის ხარისხი წარმოადგენს დადებით რიცხვს, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ ასეთი ხდომილების (შედეგის) მოხდენა (დადგომა) შესაძლებელია მაშინაც კი, თუ მისი მოხდენის შანსები მიზერულია.

[4] უკეთესი იქნებოდა *საიმედოობის ხარისხი,* მაგრამ რუსულ თარგმანში ესაა გამოყენებული, ხოლო ფრანგული ორიგინალი არ მოიძებნა — მთარგმნელის შენიშვნა.

აქვე შევნიშნავ, რომ ხდომილების შესაძლებლობის (დარწმუნებულობის) ხარისხს მე ვუწოდე ***ალბათობა***. ძალიან ბევრი ვიფიქრე შესაფერისი სიტყვის მოსაძებნად და საბოლოოდ სწორედ ის ჩავთვალე ყველაზე მეტად გამომხატველად. ჩემი აზრით, ის სრულ შესაბამისობაშია სიტყვათა ჩვეულებრივ გამოყენებასთან. ყოველდღიურ საუბარში ჩვეულებრივ აღნიშნავენ გარკვეული შემთხვევითი ხდომილების შესახებ, რომ ის ალბათურია, ან არაალბათურია, ან ერთი ხდომილება უფრო ალბათურია, ვიდრე მეორე. ჩემს თეორიაში მე გამოვდივარ იმ ძირითადი დაშვებიდან, რომ ნებისმიერ ხდომილებას, რომლის მოხდენაც დამოკიდებულია შემთხვევაზე, მისი ალბათობის რანგში შევუსაბამოთ გარკვეული რიცხვი, რომელიც მოთავსებულია ნულსა და ერთს შორის. იმ ხდომილებების ალბათობები, რომელთაც ყოველდღიურ საუბარში უწოდებენ ალბათურს, ახლოს არიან ერთთან, ე. ი. აუცილებელი ხდომილების ალბათობასთან; ზუსტად ანალოგიურად, იმ ხდომილებების ალბათობები, რომელთაც ყოველდღიურ საუბარში უწოდებენ არაალბათურს, ახლოს არიან ნულთან, ე. ი. შეუძლებელი ხდომილების ალბათობასთან. სიტყვა „ალბათობის“ შერჩევის დროს მე გარკვეულწილად უხერხულობას მიქმნიდა ის გარემოება, რომ კაზუისტიკაში ეს სიტყვა გამოიყენება სრულიად განსხვავებული აზრით. იქ უტყუარს უწოდებენ ისეთ მტკიცებულებებს, რომლებიც აღწერილია საღვთო წერილებში, პაპების გზავნილებში (დირექტივებში) ან კიდევ ეკლესიის გადაწყვეტილებებში. იმ მტკიცებულებებს კი, რომლებიც მოცემულია თეოლოგების წიგნებში, უწოდებენ ალბათურს. თუ ერთი და იმავე საკითხის შესახებ სხვადასხვა თეოლოგი გამოთქვამს ურთიერთსაპირისპირო მტკიცებულებებს, მაშინ ამ სახის თითოეულ მტკიცებულებას უწოდებენ „ალბათურს“. თუმცა მე ვემხრობი იმ მოსაზრებას, რომ სიტყვათა ეს უცნაური გამოყენება არ იძლევა იმის საფუძველს, რომ მოვერიდოთ სიტყვა „ალბათურის“ გამოყენებას, ვინაიდან არა მგონია ვინმეს (გარდა იეზუიტებისა) თავში მოუვიდეს ამ სიტყვის სხვანაირად გაგება. სხვათა შორის, აღნიშვნების შერჩევის საკითხში მე ვეყრდნობი დეკარტს, რომელიც თავის „წესებში“ ამბობს: „ყოველთვის, როცა მსურს შემოვიღო ახალი სპეციალური ტერმინი, მე ვირჩევ მას იმ სიტყვებიდან, რომლებიც არიან ხმარებაში და მათგან იმას, რომელიც მე მეჩვენება ყველაზე უფრო შესაფერისად, ყოველთვის ვიყენებ ჩემ მიერ დადგენილი მნიშვნელობით“. შემდგომ მე ყოველთვის გამოვიყენებ ტერმინ „ალბათობას“ დარწმუნებულობის ხარისხის გამომსახველი რიცხვის აღსანიშნავად.

ყველაზე არსებითი ზემოთ ნათქვამში ისაა, რომ არასრულ ცოდნას აგრეთვე შეიძლება ჰქონდეს გარკვეული სარგებელი, მაგრამ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ მისი ჭეშმარიტების ხარისხი. თუ ცნობილია, რომ შემთხვევითი ხდომილების ალბათობა იზომება რაიმე რიცხვით, მაშინ მის შესახებ ჩვენთვის ცნობილია რაღაცა გარკვეული, მაგრამ, თავისთავად, ჩვენ არ ვართ დარწმუნებული მის მოხდენაში. შესაბამისად, უნდა დავაფასოთ არასრული ცოდნაც, მაგრამ არ შეიძლება მისი გადაფასება და სრულ ცოდნაში არევა. მონტენმა, რომლის „ცდები“ — ჩემთვის ყველაზე ახლობელი წიგნია (თუმცა ბევრ რამეში მე მას არ ვეთანხმები), ეს აზრი ჩამოაყალიბა შემდეგნაირად: „მე მაიძულეს შემძულებოდა ალბათური მსჯელობები იმათ, ვინც თვლის მათ ჭეშმარიტად“. მონტენის ეს სიტყვები შეესაბამება ჩემს შინაგან მრწამსს. არაერთხელ მომხდარა, რომ ჩემი მეგობრები ცდილობდნენ ჩემს დარწმუნებას რაღაცაში, მაგრამ მე მათ ვეთანხმებოდი მხოლოდ ზოგადად და მთლიანობაში, მათ კი სურდათ, რომ მათი მოსაზრებები მიღებული ყოფილიყო დათქმის გარეშე. კამათის შედეგად ჩვენი მოსაზრებები უფრო მეტად შორდებოდა ერთმანეთს, ვინაიდან, როგორც მოგვიანებით აღმოჩნდა, ჩვენ განსხვავებულად გვესმოდა ისეთი ფაქტებიც კი, რომელთა შესახებაც თავიდან ვფიქრობდი, რომ ჩვენი მოსაზრებები ერთამანეთს ემთხვეოდა, და ჩვენ ვშორდებოდით, როგორც სხვადასხვანაირად მოაზროვნე ადამიანები. მგონია, რომ მონტენსაც ჰქონდა იგივე განცდები, ვინაიდან ასე გარდაუვლად ემართება ყველას, ვისთვისაც სიტყვა და საქმე ერთიანია — *quibus vivere est cogitare*.[5] მაგრამ მე ისევ გადავუხვიე თემიდან; მსურდა მესაუბრა არა მონტენზე და მას მივმართე მხოლოდ იმიტომ, რომ მეჩვენებინა:

[5] ლათინურად — ვისთვისაც ცხოვრება ნიშნავს ფიქრს.

მართალია ალბათობების რაოდენობრივი გაზომვის იდეა ახალია, ის წარმოადგენს დიდი ხნის წინ ცნობილი ჩანაფიქრების ლოგიკურ გაგრძელებას.

თქვენ, რა თქმა უნდა, უკვე შეამჩნიეთ, რომ დარწმუნებულობის ხარისხის გაზომვის დროს მე ვსარგებლობდი დაშვებით — უტყუარობის უსასრულოდ გაყოფადობის შესახებ წრფის, სივრცის ან რიცხვის ანალოგიურად. ამასთან დაკავშირებით მიზანშეწონილია დაისვას კითხვა: შესაძლებელია თუ არა სინამდვილეში შემთხვევითი ხდომილების ალბათობამ მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა ნულსა და ერთს შორის? მარტივი მაგალითის საშუალებით შევეცდები ვაჩვენო, რომ ეს სინამდვილეში ასეა.

მეგობრები ხშირად დამცინიან ღამით საწოლის გვერდით საათის დადების ჩვევის გამო (რომელიც, მათი მტკიცებით, პარიზში მხოლოდ მე მახასიათებს, თუმცა ეს ჩემთვის სრულიად ბუნებრივია), რათა დავაფიქსირო ის დრო, როცა ვიღვიძებ (ხოლო ეს ძალიან ხშირად ხდება). ასე რომ: რამდენად დიდია ალბათობა იმისა, რომ ღამით გაღვიძების შემდეგ საათზე დახედვისას მე დავინახავ დიდ ისარს 15 და 20 რიცხვებს შორის? ვინაიდან დიდი ისარი მოძრაობს თანაბრად, ამიტომ 60 წუთიდან 5 წუთი (ანუ 1/12 საათი) ის იქნება მითითებულ საზღვრებს შორის და, შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა შეადგენს 5/60=1/12. შესაძლებელია ამავე ხდომილების შესახებ შემდეგნაირადაც ვთქვათ: ალბათობა იმისა, რომ დიდი ისარი აღმოჩნდება 30-გრადუსიან სექტორში, ტოლია $30^0/360^0$ = 1/12-ის. მაგრამ, თუ მე ავარჩევ ჩემს საათზე კუთხეს, რომლის სიდიდეა $360^0 \cdot x$, სადაც x ნებისმიერი რიცხვია 0-სა და 1-ს შორის, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ გაღვიძების შემდეგ მე დავინახავ დიდ ისარს მოცემულ კუთხეში, ტოლი იქნება ზუსტად x-ის.

რაც შეეხება აზარტულ თამაშებს, აქ ჩვენ გვხვდება მხოლოდ ისეთი ალბათობები, რომლებიც შეიძლება გამოისახოს, როგორც ორი მთელი რიცხვის შეფარდება, ვინაიდან ამ თამაშებში ყოველთვის შესაძლებელია მივუთითოთ, თუ რამდენი ერთნაირად მოსალოდნელი და ურთიერთგამომრიცხავი შედეგი შეიძლება დადგეს. ამრიგად, ნებისმიერი ხდომილების ალბათობა, რომელიც შეეხება თამაშის რეზულტატს, ტოლია ამ ხდომილების ხელშემწყობი შედეგების რიცხვის შეფარდებისა ყველა შესაძლებელი შედეგების რიცხვთან. მაგალითად, სათამაშო კამათლის გაგორებისას ყველა შესაძლო შედეგთა რიცხვია ექვსი, ვინაიდან შედეგი შესაძლებელია იყოს ნებისმიერი რიცხვებიდან 1, 2, 3, 4, 5 ან 6. შესაბამისად, სათამაშო კამათლის გაგორებისას 6 ქულის მოსვლის ალბათობა ტოლია 1/6-ის, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ 6 ქულა არ მოვა — 5/6-ის (რადგანაც პირველ შემთხვევაში ხელშემწყობი შედეგების რიცხვია ერთი, ხოლო მეორე შემთხვევაში — ხუთი). ხდომილების, რომ მოვა 6 ქულა, და საწინააღმდეგო ხდომილების (6 ქულა არ მოვა) ალბათობების ჯამი ტოლია 1-ის. ეს, ცხადია, დამახასიათებელია ყველა სხვა ხდომილებისთვისაც, ვინაიდან უტყუარი (აუცილებელი) ხდომილების ალბათობა, ანუ ერთიანი, ნაწილდება ხდომილებასა და მის საწინააღმდეგო ხდომილებას შორის. და კიდევ ერთი ზოგადი თვისება: თუ ხდომილება იყოფა რამდენიმე ურთიერთგამომრიცხავ ხდომილებად, მაშინ მისი ალბათობა ტოლია შემადგენელი კომპონენტების ალბათობების ჯამის, იმის ანალოგიურად, რომ, თუ სითხის გარკვეულ მოცულობას გადავანაწილებთ რამდენიმე ჭურჭელში, მაშინ ცალკეულ ჭურჭელში სითხეთა მოცულობების ჯამი ტოლია მთელი სითხის მოცულობის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ რომელიმე თამაშში განიხილება რამდენიმე ურთიერთგამომრიცხავი ხდომილება, მაშინ ამ ხდომილებების ალბათობების ჯამი ტოლია იმის ალბათობის, რომ ამ ხდომილებებიდან რომელიმე მოხდება. ამ წესს მე ვუწოდე ***ალბათობათა შეკრების წესი.***

ამ, თითქმის თავისთავად ცხად, თეორემასთან ერთად მე გამომყავს აგრეთვე მეორე, უფრო ღრმააზროვანი თეორემა, რომელსაც მინდა ვუწოდო ***ალბათობათა გამრავლების თეორემა.*** ის ამტკიცებს შემდეგს: თუ ვინმე ითამაშებს ერთსა და იმავე თამაშს ორჯერ, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ ერთი გარკვეული ხდომილება მოხდება პირველი თამაშის დროს, ხოლო მეორე გარკვეული ხდომილება (რომელიც შესაძლებელია იყოს პირველის იდენტური ან განსხვავებული მისგან) — მეორე თამაშის დროს, ტოლი იქნება ცალკეული თამაშის დროს ამ

ხდომილებების ალბათობების ნამრავლის. ანუ, თუ მე ვაგორებ ერთსა და იმავე სათამაშო კამათელს ორჯერ, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ როგორც პირველი, ისე მეორე გაგორებისას მოვა ქულა, რომელიც განსხვავებულია 6-გან, ტოლია $5/6 \cdot 5/6 = 25/36$-ის. ორჯერადი გაგორების რეზულტატი შესაძლებელია იყოს ნებისმიერი დალაგებული წყვილი რიცხვების, რომლებიც აღებულია ერთობლიობიდან 1, 2, 3, 4, 5, 6, და მათი რაოდენობაა 36. მათ შორის არის 25 წყვილი, რომელშიც ორივე წევრი განსხვავებულია 6-სგან. ანალოგიურად, თუ მე გავაგორებ სათამაშო კამათელს 4-ჯერ, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მე არცერთხელ მომივა 6-იანი, ტოლია $25/36 \cdot 25/36 = 625/1296$-ის; ეს ნამრავლი ნიშნავს, რომ 6-იანი არ მოვა არც პირველი ორი გაგორებისას და არც მეორე ორი გაგორებისას. საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობა, ანუ ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის 4-ჯერ გაგორებისას, სულ ცოტა, ერთხელ მაინც მოვა 6-იანი, ტოლია $1 - 625/1296 = 671/1296$-ის. ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ თქვენი კარგად ცნობილი პასუხი შევალიე დე მერეს პირველ კითხვაზე.

როგორი მარტივია შემთხვევითობის მათემატიკის ორი ძირითადი თეორემა! თქვენ შეიძლება იკითხოთ, — ეხება თუ არა ეს მოსაზრებები თვითონ მათემატიკას, თუ ის ეხება საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებს, რომლებიც იყენებენ მათემატიკურ მოსაზრებებს? მე მიმაჩნია, რომ აქ ლაპარაკია მათემატიკის ახალ მიმართულებაზე, რომელსაც შეიძლება ეწოდოს შემთხვევითობის მათემატიკა (რაც მე დავადასტურე კიდეც ჩემ მიერ აკადემიაში გაგზავნილ წერილში); მას შეიძლება აგრეთვე ეწოდოს ***ალბათობის თეორია***. მე უფრო გამომხატველად მიმაჩნია მეორე სახელწოდება.

ამრიგად, ახალ სწავლებას, რომლის მიზანიცაა მოგვცეს გარკვეული ცოდნა შემთხვევითი, განუსაზღვრელი ხდომილებებისთვის, ვუწოდოთ ალბათობის თეორია. რაც შეეხება იმას, წარმოადგენს თუ არა ალბათობის თეორია მათემატიკის ნაწილს, აქ მთელი საკითხი დაიყვანება შემდეგზე: რას ვგულისხმობთ ჩვენ მათემატიკის ქვეშ? თუ მათემატიკის ქვეშ გავიგებთ მხოლოდ მის ტრადიციულ ნაწილებს — გეომეტრიას, არითმეტიკას და ალგებრას, მაშინ, რა თქმა უნდა, ასეთი ვიწრო გაგებით არ მოიძებნება ადგილი არცერთი ახალი მიმართულებისთვის. მე კი ამ საკითხში ვეთანხმები დეკარტს, რომელიც ამტკიცებდა, რომ ყველა გამოკვლევა, რომელიც მიმართულია დალაგებისა და ზომის შესწავლაზე, ეკუთვნის მათემატიკას, დამოუკიდებლად იმისა, თუ რა წარმოადგენს მის საგანს და რას მიეკუთვნება განსახილველი დალაგება და ზომა.

ახლა, როცა ყველაფერი, რაზეც მე ამდენი ვიფიქრე, უკვე დაწერილია, განვიცდი შვებას (რადგანაც მქონდა სიძნელეები ფორმულირების დროს) და, იმავდროულად, შეშფოთებას (ვინაიდან არ ვიცი, მოვახერხე თუ არა გასაგებად გადმომეცა ყველაფერი ის, რაზეც მე ვფიქრობდი). გთხოვთ, ძალიან დიდხანს არ დამტოვოთ გაურკვევლობაში და სასწრაფოდ შემატყობინოთ თქვენი მოსაზრება ხასიათით მეტად ჭირვეული ამ „ახალშობილის“ შესახებ, რომელსაც მე დავარქვი „ალბათობის თეორია“. თუ თქვენ მასში იპოვით ნაკლოვანებებს, შეცდომებს ან წინააღმდეგობებს, დარწმუნებული ბრძანდებოდეთ, რომ თქვენგან მადლიერებით მივიღებ ძალიან მკაცრ კრიტიკასაც კი.

ბევრი მნიშვნელოვანი საკითხი, რომელზეც დიდი ხანია ვფიქრობ, აქ არ არის წამოწეული. თუ თქვენი პასუხიდან ჩემთვის ცხადი გახდება, რომ მე მივდივარ სწორი გზით, მაშინ შევეცდები წესრიგში მოვიყვანო აზრები და შემდეგ წერილში გაგიზიაროთ ჩემი მოსაზრებები.

შესაძლებელია, ამაცილოთ კიდეც ამასთან დაკავშირებული წამება, თუკი თქვენს პასუხში მოვახერხებ წავიკითხო ჩემი საკუთარი აზრები ისეთი ცხადი ფორმულირებებით, როგორსაც მე თვითონაც ვერ წარმოვიდგენდი.

წერილი ძალიან გრძელი გამოვიდა და, მაინც, არ შემიძლია ის ისე დავასრულო, რომ არ გითხრათ, — ამ ყველაფერზე ფიქრის დროს, მე ბევრჯერ ამოვიღე თქვენი წერილი სათამაშო კამათლის შესახებ და ვცდილობდი სტრიქონებს შორის წამეკითხა თქვენი აზრები; ფიქრებში გეკამათებოდით კიდეც და ბევრი რამ, რაც აქ წერია, თითქოს პასუხებს წარმოადგენს იმ კითხვებზე, რომლებსაც თქვენ მე მისვამდით ჩვენს წარმოსახვით საუბრებში. ვიქნები წარმოუდგენ-

ლად ბედნიერი, თუ ყველაფერი ზემოთ ნათქვამი არ აღმოჩნდება ფუჭი ფანტაზია, არამედ, შესაძლებელია, თუნდაც არასრულყოფილი და უხეში, მაგრამ თქვენი აზრების შავი ვარიანტი.

თქვენი გულწრფელი და ერთგული
თაყვანისმცემელი და პატივისმცემელი
ბლეზ პასკალი

მეორე წერილი

პარიზი,
6 ნოემბერი 1654 წლის
ბატონ პიერ ფერმას
ორლეანი

ძვირფასო ბატონო ფერმა!

აქამდე არცერთ წერილს არ მოუტანია ჩემთვის ისეთი სიხარული, როგორც თქვენ წერილს, რომელიც გამომიგზავნეთ ბატონ კარკავის ხელით. მე დიდი მოუთმენლობით ველოდებოდი ბატონი კარკავის დაბრუნებას, რათა გამეგო მისგან, თუ როგორ აღიქვით ჩემი 28 ოქტომბრის წერილი. მე მხოლოდ იმას ვვარაუდობდი, რომ თქვენგან იგი მომიტანდა დაპირებას იმის შესახებ, რომ სწრაფად მიპასუხებდით, მაგრამ ის, რომ იგი გადმომცემდა თქვენს პასუხს, ყოველგვარ მოლოდინს იყო გადაჭარბებული. ამიტომ, მიუხედავად იმისა, რომ თქვენი წერილი მრავალი თვის განმავლობაში სააზროვნო მასალას იძლევა, მე თქვენ დაუყოვნებლივ გპასუხობთ, თუმცა ვაცნობიერებ, რომ ჩემი პასუხი, სწორედ ამის გამო, იქნება რამდენადმე არასრულყოფილი. მეუბნებოდნენ, თითქოს ზოგიერთი მოჭადრაკე თამაშის დროს იყენებს ქვიშის საათს, რათა შეიზღუდოს თითოეული მოთამაშის ფიქრის დრო. ჩემი აზრით, ჩვენი მიმოწერა ჭადრაკის ასეთ პარტიას გავს. მე დიდი სიხარულით ვღებულობ მასში მონაწილეობას და სავსებით არ ვნანობ იმას, რომ ამ შეჯიბრებაში თქვენ, უეჭველად, გამარჯვებული გამოხვალთ.

ამრიგად, ვცდილობ ვუპასუხო თქვენს კითხვებზე. მართალი ვარ თუ არა, რომ ამას ვაკეთებ ასე სწრაფად — თვითონ განსაჯეთ, მაგრამ ყველაფერ ამის შესახებ მე ადრეც ბევრი მიფიქრია, რაც საშუალებას მაძლევს გიპასუხოთ მომზადების გარეშე. უფრო მეტიც, მაშინ, როცა მე უკვე დაველუქე უკანასკნელი წერილი, ჩემთვის ცხადი გახდა, რომ თქვენი კითხვების შესახებ, განსაკუთრებით მეორე კითხვის შესახებ, უპრიანი იყო მასში დამეწერა. თუმცა ასეთ სიტუაციაში ხშირად აღმოვჩნდები: მე მხოლოდ წერილის ბოლოს ვხვდები, თუ რითი უნდა დამეწყო. და სწორედ იმიტომ, რომ შევეჩვიე სამუშაოს დამთავრებისას უკმაყოფილო ვიყო დასაწყისით, მე არც არაფერი შევცვალე თქვენთან გამოგზავნილ წერილში, ვინაიდან, თუ მე მას გადავწერდი, ბოლოს ისევ უკმაყოფილო ვიქნებოდი დაწერილით.

თქვენს პირველ კითხვაზე პასუხი განსაკუთრებულად მარტივია და დარწმუნებული ვარ, რომ ის თქვენთვის კარგადაა ცნობილი; თქვენ, სავარაუდოდ, გაინტერესებთ მხოლოდ გაარკვიოთ, თუ რამდენად საფუძვლიანად მაქვს გააზრებული ის, რაზეც ვწერდი. თქვენი კითხვა ეხება იმას, რომ აზარტულ თამაშებში, როგორც მე ვამტკიცებდი, ხდომილების ალბათობა შეიძლება განიმარტოს, როგორც ხდომილების ხელშემწყობი შედეგების რაოდენობის შეფარდება ყველა შესაძლო, თანაბარშესაძლებელი და ურთიერთგამომრიცხავი, შედეგების რაოდენობასთან. თქვენ აბსოლუტურად მართალი ხართ, როცა წერთ, რომ „თანაბარშესაძლებელის" ნაცვლად შეიძლება ვილაპარაკოთ „თანაბარალბათურ" შედეგებზე; ორივე გამოთქმა აღნიშნავს ერთსა და იმავეს. თქვენ კითხულობთ, ხომ არ არის აქ საუბარი *circulus vitiosus*-ზე (მანკიერ წრეზე), ვინაიდან ალბათობის განსაზღვრის დროს ჩვენ ვეყრდნობით „თანაბარალბათური ხდომილებების" ცნებას და, შესაბამისად, თვითონ ალბათობის განსაზღვრება ემყარება ამ ცნებას; ეს, ცხადია, დაუშვებელია და, ამასთანავე, არანაკლებ აბსურდული, ვიდრე იმის მტკიცება, რომ შესაძლებელია ასწიო საკუთარი თავი, თუ დავიწყებთ თმების ზემოთ აქაჩვით.

სინამდვილეში, აქ არ არის არანაირი ლოგიკური შეცდომა; საქმე ისაა, რომ ამ შემთხვევაში საუბარია არა ალბათობის, როგორც ცნების, განსაზღვრაზე, არამედ მხოლოდ გარკვეული ალბათობის რიცხობრივი მნიშვნელობის განსაზღვრის (გამოთვლის) წესზე.

ჩემი დაშვებით, ნებისმიერ შემთხვევით ხდომილებას გააჩნია გარკვეული ალბათობა, რომელიც წარმოადგენს რიცხვს, რომელიც მოთავსებულია ნულსა და ერთს შორის, და გამოხატავს არასრული დარწმუნებულობის ხარისხს იმისა, რომ განსახილველი ხდომილება მოხდება. კითხვა იმის შესახებ, არის თუ არა ორი ხდომილება თანაბარალბათური, შეიძლება გადაწყდეს ამ ხდომილებების ალბათობების რიცხვითი მნიშვნელობების ცოდნის გარეშე. როცა მე ვამტკიცებ, რომ სათამაშო კამათელი წესიერია, ეს ნიშნავს, რომ, თუ მისი წახნაგები არ იქნება გადანომრილი, მაშინ მათ ვერ გამოიცნობენ (გაარჩევენ). თუ ვინმე, ჩემი არყოფნის დროს, შეცვლის წახნაგების ნუმერაციას, მაშინ დაბრუნების შემდეგ მე ვერ შევძლებ ამის შემჩნევას. აქედან ცხადია, რომ გაგორების შედეგად სათამაშო კამათელი ტოლი ალბათობებით ვარდება ნებისმიერ წახნაგზე. საქმის ვითარება აქ სავსებით იმის მსგავსია, რასაც ადგილი აქვს, როცა სურთ ორი მონაკვეთის სიგრძის ტოლობაში დარწმუნება მათი სიგრძის გაზომვის გარეშე: მათ ადებენ ერთმანეთს და თუ მათი ბოლო წერტილები ემთხვევა, მაშასადამე, ისინი ტოლია. ზუსტად ანალოგიურად, პინებიანი სასწორის საშუალებით შეიძლება გადაწყდეს საკითხი იმის შესახებ, ერთნაირია თუ არა ორი საგნის სიმძიმე (ე.ი. აქვთ თუ არა მათ ტოლი წონა), მათი წონის გაზომვის გარეშე.

თქვენს მეორე კითხვაზე პასუხი არ არის ასე მარტივი. თქვენ კითხულობთ, როგორ შეიძლება არაწესიერი სათამაშო კამათლისთვის, რომლის სიმძიმის ცენტრი არ ემთხვევა გეომეტრიულ ცენტრს, განისაზღვროს თითოეული წახნაგის მოსვლის ალბათობა. ეს საკითხი, ერთი შეხედვით, უწყინარია, სინამდვილეში კი ძალიან რთულია, ვინაიდან იგი ეხება მეორე ფუძემდებლური საკითხის გარკვევას, რომლითაც, საკუთრივ, მე დაკავებული უნდა ვყოფილიყავი ჯერ კიდევ პირველ წერილში. რა თქმა უნდა, თუ თქვენ ამ კითხვას დაუსვამდით ჩემს მეგობარს, შევალიე დე მერეს, ის გიპასუხებდათ, რომ თამაშობს სათამაშო კამათელს მხოლოდ ჯენტლმენებთან, კომპანიაში, სადაც არ არის მიღებული თამაში არაწესიერი სათამაშო კამათლებით, და თუ როდისმე გაირკვევა, რომ სათამაშო კამათელი არაწესიერია, მაშინ მას გადააგდებდნენ იმასთან ერთად, ვისაც ის ეკუთვნის. ამაზე თქვენ სრული უფლებით შეგეძლოთ შეწინააღმდეგებოდით: საიდან უნდა გაეგოთ მათ, რომ სათამაშო კამათელი არაწესიერია? შევალიე, სავარაუდოდ, ვერ იპოვიდა უკეთეს პასუხს და გეტყოდათ, რომ, კამათლის გაგორებისას, არაწესიერი სათამაშო კამათლით მოთამაშე მიიღებდა უფრო ხშირად ექვსიანს, ვიდრე ეს მოსალოდნელია წესიერი სათამაშო კამათლისგან, ვინაიდან სწორედ ამაში მდგომარეობს იმათი ჩანაფიქრი, ვინც ამზადებს არაწესიერ კამათლებს.

მაგრამ, თუ თქვენ შემდგომ, და სრულიად ლოგიკურად, შეეკითხებოდით — ვიმედოვნებ, მაპატიებთ, რომ გაგხადეთ დიალოგის მთავარი მოქმედი პირი, — როგორ რეზულტატს მოელოდა შევალიე წესიერი კამათლისათვის, მაშინ ის გიპასუხებდათ, რომ საკმაოდ ხანგრძლივი თამაშის შემთხვევაში, წახნაგი ექვსიანით უნდა მოვიდეს დაახლოებით ისეთივე სიხშირით, როგორც ნებისმიერი სხვა წახნაგი, ე. ი. ყველა შემთხვევათა დაახლოებით 1/6. ამდენად, შევალიე, საკუთრივ, გიპასუხებდათ კიდეც თქვენს პირვანდელ კითხვაზე, თუმცა ის ამისკენ არც ისწრაფოდა, კერძოდ: თუ წესიერი კამათელი გორდება N-ჯერ და ექვსიანი ამ დროს მოდის $x \cdot N$-ჯერ (აქ x — გარკვეული რიცხვია, მეტი 1/6-ზე), მაშინ, ცხადია, რომ ექვსიანის მოსვლის ალბათობა არაწესიერი კამათლის გაგორებისას ტოლია x-ის.

აქ თქვენ ისევ შეგეძლოთ დაგესვათ ეშმაკური კითხვა: თუ ვინმე აგორებს არაწესიერ კამათელს 600-ჯერ და, ამასთან, ექვსიანი მოვა 150-ჯერ, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია თუ არა ვიყოთ დარწმუნებული, რომ ამ კამათლისათვის ექვსიანის მოსვლის ალბათობა ტოლია 150/600 = 1/4-ის? ამაზე შევალიეს შეეძლო ეთქვა (რა თქმა უნდა, იმ პირობით, რომ მან წაიკითხა ჩემი პირველი წერილი და იყენებს იქ შემოტანილ ცნებებს), რომ მისი პასუხი შესაძლებელია ჩაითვალოს დაუსაბუთებელ დასკვნად. ანუ, თუ კამათელი იქნებოდა წესიერი და, ამდენად, ექვსიანის მოსვ-

ლის ალბათობა ტოლი იქნებოდა 1/6-ის, მაშინ 600 გაგორებიდან ექვსიანის მოსვლათა რიცხვი შესაძლებელია არ ყოფილიყო ზუსტად 100. ამიტომ, არაწესიერი კამათლის შემთხვევაშიც, გაგორების რეზულტატების საფუძველზე არ შეიძლება იმის მტკიცება, რომ ექვსიანის მოსვლის ალბათობა ტოლია ზუსტად 1/4-ის, არამედ მხოლოდ იმის თქმა შეიძლება, რომ ალბათობა ახლოსაა 1/4-თან. ამ შემთხვევაში თქვენ შეგეძლოთ გეკითხათ: სინამდვილეში, როგორ შეიძლება ვიპოვოთ საძიებელი ალბათობის ზუსტი მნიშვნელობა?, რაზეც შევალიე, როგორც გამოცდილი მოთამაშე, სავარაუდოდ, გიპასუხებდათ, რომ მან არ იცის მეთოდი, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელი იქნებოდა საძიებელი ალბათობის ზუსტი მნიშვნელობის პოვნა. მაგრამ, თუ მიღებული მიახლოებითი მნიშვნელობა თქვენ არ გაკმაყოფილებთ (თუმცა ჩატარებული ექსპერიმენტი უდავოდ ამტკიცებს, რომ კამათელი არაწესიერია და ყველაზე კარგი იქნებოდა გადაგვეგდო იგი დაუყოვნებლივ), მაშინ შეგეძლოთ მიგეღოთ უფრო ზუსტი მიახლოება, თუ გაზრდით გაგორებათა რიცხვს, ვთქვათ, 1200-მდე. თუ, მაგალითად, კამათლის 1200-გაგორებიან სერიაში ექვსიანი მოვიდა 288-ჯერ, მაშინ ხსენებული ალბათობისთვის თქვენ მიიღებდით უფრო საიმედო მიახლოებას 288/1200 = 0.24. შესაძლებელია, ნათქვამისთვის შევალიეს კიდევ დაემატებინა (როგორც უკვე მოგწერეთ, უკანასკნელ პერიოდში ის გამოხატავს გაძლიერებულ დაინტერესებას ფილოსოფიით), რომ, მაშინ, როცა სათამაშო კამათელი წესიერი შეიძლება იყოს მხოლოდ ერთი გზით, არაწესიერი (მიზეზთა უსასრული სიმრავლის საფუძველზე) შეიძლება იყოს უსასრულოდ დიდი რაოდენობა სხვადასხვა გზით.

მე აღარ გავაგრძელებ ამ წარმოსახვით დიალოგს, ვინაიდან თქვენ ამის გარეშეც მნიშვნელოვნად მეტი იცით, ვიდრე შეგეძლოთ გაგეგოთ შევალიე დე მერესგან. ამის ნაცვლად, შევეცდები ჩემი სიტყვებით ვუპასუხო თქვენს კითხვებს.

სიმოკლისათვის მსურს გადმოცემას წავუმძღვარო ერთი განსაზღვრა. დავუშვათ, რომ ჩვენ არაერთგზის ვატარებთ ცდას ერთსა და იმავე პირობებში; მაშინ იმ ცდათა რაოდენობას, რომელშიც მოხდება გარკვეული E ხდომილება, შეიძლება ეწოდოს E ხდომილების *სიხშირე*, ხოლო სიხშირის შეფარდებას ყველა ცდათა რიცხვთან (რა დროსაც ჩვენ ვაკვირდებით E ხდომილების როგორც მოხდენას, ისე არმოხდენას) — E ხდომილების *ფარდობითი სიხშირე* ცდათა მოცემულ სერიაში. მათ, ვისაც არაერთხელ უთამაშია აზარტული თამაშები, იციან, რომ ნებისმიერი ხდომილების ფარდობითი სიხშირე, თამაშების მრავალჯერადი განმეორების შემთხვევაში, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, ახლოსაა სრულიად გარკვეულ რიცხვთან; უფრო მეტიც, ფარდობითი სიხშირის გადახრა მისი ალბათობისგან მით უფრო მცირეა, რაც უფრო დიდხანს გრძელდება თამაში. მაგალითად, კამათლის თამაშის დროს ექვსიანის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე, კამათლის 100-ჯერ გაგორებისას, ახლოს იქნება1/6-თან (თუ კამათელი წესიერია) ან სხვა რიცხვთან (თუ კამათელი არაწესიერია). არაწესიერი კამათლის თითოეული წახნაგის მოსვლის ალბათობა შეიძლება დაახლოებით განისაზღვროს, რისთვისაც არსებობს ერთადერთი, მხოლოდ ახლა აღწერილი გზა. პრინციპში, ამ გზაზე აღნიშნული ალბათობები შესაძლებელია განისაზღვროს ნებისმიერი სიზუსტით; თუმცა, პრაქტიკულად, ამ სიზუსტის უსასრულოდ გადიდება შეუძლებელია — ჯერ ერთი, ამას დასჭირდებოდა ძალიან დიდი დრო და, მეორეც, თვითონ კამათელი გაიცვითებოდა ცდების ჩატარების პროცესში. მაგრამ, მე ვფიქრობ, რომ თქვენ რეალურად გაინტერესებთ არაწესიერი კამათლის გაგორების დროს ექვსიანის მოსვლის ალბათობის არა ზუსტი მნიშვნელობა, არამედ, რეალურად, თქვენი კითხვა მნიშვნელოვნად უფრო ღრმაა: როგორ შეიძლება საზოგადოდ განისაზღვროს შემთხვევაზე დამოკიდებული ხდომილების ალბათობა, თუ ამოცანა არ შეიძლება დაყვანილ იქნეს ხელშემწყობი, თანაბარალბათური და ურთიერთგამომრიცხავი შედეგების რიცხვის დათვლაზე? წესები, რომელიც გამოიყენება წესიერი (მაგრამ არა არაწესიერი) კამათლისთვის, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ *დაფუძნებულია სიმეტრიაზე*, ვინაიდან ისინი ემყარებიან წესიერი კამათლის სიმეტრიას. თუმცა კრისტალების მაგალითი გვიჩვენებს, რომ სიმეტრია გვხვდება ბუნებაშიც, და არამხოლოდ ადამიანის მიერ ხელოვნურად შექმნილ ობიექტებში. მიუხედავად ამისა, მრავალ ბუნებრივ მოვლენაში ჩვენ საერთოდ ვერ ვპოულობთ სიმეტრიას. წყლის მიერ გამორიყულ ქვებს

შორის, რომლებიც ზღვის ნაპირზე სეირნობის დროს გვხვდება, ფაქტობრივად შეუძლებელია ვიპოვოთ ისეთი, რომელსაც ექნებოდა რამდენადმე წესიერი გეომეტრიული ფორმა, მაგალითად ექნებოდა ბირთვი. თვითონ ადამიანზეც კი ვერ იტყვი, რომ ის სავსებით სიმეტრიულია. ახლახან სადღაც წავიკითხე, რომ ძველ რომში ჯარისკაცები თამაშობდნენ არა წესიერი, ხის ან სპილოს ეშვებისგან დამზადებული კამათლებით (რომელთაც ეწოდებოდა ტესერა და ძირითადად ჰქონდათ მდიდარ ადამიანებს), არამედ იყენებდნენ ცხვრის ან თხის კვირისტავისგან[6] დამზადებულ ძვლებს, ე.წ. ტალუსს ან ტაკსილუსს. ეს ძვლები ცნობილი იყო ჯერ კიდევ ძველი ბერძნებისთვის (იქ მათ ეძახდნენ *ასტრაგოლოსს* და იყენებდნენ იმავე მიზნებისთვის). ამ ძვლების სავარაუდო შედეგების დადგომის ალბათობების გამოთვლა შესაძლებელია მხოლოდ ემპირიულად, ფარდობით სიხშირეებზე დაკვირვებების გზით.

მართალია ტაკსილუსს გააჩნია ექვსი წახნაგი, მაგრამ მათგან შესაძლებელია მოვიდეს მხოლოდ ოთხი, ვინაიდან დანარჩენი ორი ამოზნექილია. ძველი ბერძნები და რომაელები, ჩვეულებრივ, ერთდროულად აგდებდნენ ოთხ ძვალს; ყველაზე მეტად ღირებული იყო ის აგდება, როცა თითოეულ მათგანზე მოდიოდა თავისი საკუთარი, სხვებისგან განსხვავებული წახნაგი. ამ შედეგს ეწოდებოდა *ვენერა*. ცოტა ხნის წინ მე ავიღე ორი ასეთი სათამაშო ძვალი და ჩავატარე ექსპერიმენტი. ერთ-ერთ მათგანზე ოთხი წახნაგის მოსვლის სიხშირე 1000 აგდებისას აღმოჩნდა: 408, 396, 105 და 91. მეორე ავაგდე მხოლოდ 100-ჯერ, რის შემდეგაც ის დავკარგე. ამ 100 აგდებისას სიხშირეები აღმოჩნდა: 38, 43, 11 და 8. აღვნიშნოთ ტაკსილუსის ორი, უფრო მეტად ალბათური მდგომარეობა A და B სიმბოლოებით, ხოლო ორი ნაკლებად ალბათური — C და D სიმბოლოებით. სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ ტაკსილუსის A და B მდგომარეობებს გააჩნიათ ტოლი ალბათობები — თითოეულს 4/10, ხოლო C და D მდგომარეობებიდან — თითოეულს 1/10. ჩემი ექსპერიმენტის თანახმად, ეს დაშვება ახლოსაა ჭეშმარიტებასთან. მაშინ, როგორც თქვენ შეგიძლიათ ადვილად გამოთვალოთ, ოთხი ტაკსილუსის აგდებისას ვენერას მოსვლის ალბათობა იქნება 24/625. ჩემს პირველ წერილში ნახსენები ალბათობების გამრავლების თეორემის თანახმად, პირველ რიგში გადავამრავლოთ ოთხივე ეს ალბათობა: $4/10 \cdot 4/10 \cdot 1/10 \cdot 1/10 = 1/650$. მაგრამ ეს არის ალბათობა იმისა, რომ A, B, C, D წახნაგები მოვა გარკვეული გზით დალაგებულ ძვლებზე, ხოლო 4 ტაკსილუსის დალაგება შესაძლებელია 24 სახით. შესაბამისად, ალბათობების შეკრების თეორემის თანახმად, ვენერას დადგომის ალბათობა იქნება 24/625, ე. ი. რამდენადმე ნაკლები 1/25-ზე. აქედან გამომდინარე, გასაგებია, რატომ უხაროდათ რომაელებს ვენერას მოსვლა.

ტაკსილუსის ძვლები, რა თქმა უნდა, არ არის სრულებით ერთნაირი და ამიტომ შესაძლებელია, რომ მათთვის A წახნაგის მოსვლის ალბათობაც არ იყოს ერთი და იგივე სხვადასხვა ტაკსილუსისთვის; ერთი ეგზემპლარისთვის ის ტოლია 4/10-ის, მეორისათვის — 38/100-ის და ა.შ. მაგრამ, თუ შერჩეულია გარკვეული ტაკსილუსი, მაშინ მისთვის A წახნაგის მოსვლის ალბათობა არის სავსებით გარკვეული რიცხვი. გარკვეული ტაკსილუსის ძვლის A წახნაგის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე თვითონაც დამოკიდებულია შემთხვევაზე და ამიტომ შეუძლებელია განვჭვრიტოთ მისი მნიშვნელობა; ცნობილია მხოლოდ, რომ ის ახლოს იქნება ალბათობასთან. თუ, მაგალითად, 100-ჯერ ავაგდებთ ტაკსილუსს, რომლისთვისაც A წახნაგის მოსვლის ალბათობა ტოლია 4/10-ის, ეს სავსებით არ ნიშნავს, რომ A წახნაგი მოვა 40 შემთხვევაში; ეს რიცხვი შეიძლება იყოს 38 ან 41, 44 ან 36 და ა.შ. თუკი ჩავატარებთ სერიას 100 აგდებით, მაშინ, საზოგადოდ, ფარდობითი სიხშირე სხვადასხვა სერიაში იქნება სხვადასხვა, მაგრამ ის ყოველთვის ახლოს იქნება ალბათობასთან, ე.ი. იქნება დაახლოებით 4/10. ამრიგად, ალბათობა არის ის უძრავი წერტილი, რომლის გარშემოც შემთხვევითი, განუჭვრეტელი გზით ირხევა ფარდობითი სიხშირე, მაგრამ თავის ჭირვეულ ცვლილებებში ის, როგორც წესი, ალბათობისგან გადახრილი იქნება მხოლოდ უმნიშვნელოდ. თუ დაკვირვებათა რიცხვი იზრდება, მაშინ

[6] კვირისტავი — მუხლის სახსრის ნაწილი (ანალოგიურ სათამაშოს საქართველოში *კოჭს* უწოდებენ) — მთარგმნელის შენიშვნა.

სიხშირის გადახრა მოსალოდნელი სიდიდისგან (ე.ი. ალბათობის ნამრავლისგან დაკვირვებათა რიცხვზე) აგრეთვე იზრდება, მაგრამ ფარდობითი სიხშირის გადახრა ალბათობისგან, როგორც წესი, იწყებს შემცირებას. მაგალითად, თუ ჩვენ ავაგდებთ ტაკსილუსს 400-ჯერ, მაშინ C წახნაგების მოსვლათა რეალური რიცხვი იშვიათად იქნება განსხვავებული მოსალოდნელისგან, ე.ი. $1/10 \cdot 400 = 40$-სგან, 12-ზე მეტით. მაგრამ, თუკი ჩვენ ჩავატარებთ აგდებათა სერიას 1000 აგდებით, მაშინ C წახნაგების მოსვლათა სიხშირე მოსალოდნელი მნიშვნელობისგან, ე.ი. $1/10 \cdot 1000 = 100$-სგან, განსხვავებული იქნება 12 ან უფრო მეტი სიდიდისგანაც კი, საკმაოდ ხშირად, მაგრამ ძალიან იშვიათად იქნება 20-ზე მეტი. ეს იმას ნიშნავს, რომ, იმ დროს, როცა 400 აგდებისას C წახნაგების მოსვლის ფარდობითი სიხშირე მოთავსებულია 7/100-სა და 13/100-ს შორის, მაშინ 1000 აგდებისას ის აბსოლუტურად უმრავლეს შემთხვევაში მოთავსებული იქნება 8/100-სა და 12/100-ს შორის.

მაშინ, როცა მოცემული შემთხვევითი ხდომილების ალბათობა წარმოადგენს სრულიად გარკვეულ რიცხვს (თუმცა, შესაძლებელია, ის ჩვენთვის ზუსტად ცნობილი არ იყოს), რომელიც არ არის დამოკიდებული შემთხვევაზე, ამავე შემთხვევითი ხდომილების სიხშირე შემთხვევაზე დამოკიდებული განუსაზღვრელი რიცხვია. მისი ზუსტი მნიშვნელობის განჭვრეტა შეუძლებელია, მისი განსაზღვრა შესაძლებელია მხოლოდ ექსპერიმენტული გზით. მაგრამ ჩვენ არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ ეს მნიშვნელობა შესაძლებელია იყოს განსხვავებული, და თუ ჩვენ გავიმეორებთ ექსპერიმენტს, მაშინ უნდა გვახსოვდეს, რომ საქმე გვექნება სრულიად სხვა რიცხვთან. თუ ალბათობა ჩვენთვის ცნობილია (მაგალითად, სიმეტრიის მოსაზრების ძალით, ან შეკრებისა და გამრავლების წესის გამოყენების საფუძველზე, ან სხვა ანალოგიური წესების საშუალებით), მაშინ შეგვიძლია ფარდობითი სიხშირის განჭვრეტა მეტ-ნაკლები სიზუსტით. მეორე მხრივ, ფარდობით სიხშირეებზე დაკვირვებების საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა ალბათობის მიახლოებითი მნიშვნელობის შესახებ (თუ ის ჩვენთვის უცნობია). დასკვნების გაკეთების ორივე ეს ხერხი არსებობს, მაგრამ მათი ბუნება სრულიად განსხვავებულია. პირველი ხერხი, თავისი ხასიათით, მსგავსია სხეულის მასის გამოთვლის, ცნობილი სიმკვრივისა და ცნობილი მოცულობის მიხედვით, მაშინ, როცა მეორე — ნივთიერების უცნობი სიმკვრივის გამოთვლის, ამ ნივთიერებიდან აღებული სხეულის მასისა და მოცულობის გაზომვის საშუალებით. თუმცა, თუ ჩვენ ჩავატარებთ ამ სახის გამოთვლებს სხვადასხვა სხეულისთვის იმავე ნივთიერებიდან, მაშინ სიმკვრივისთვის მივიღებთ არა ზუსტად ერთსა და იმავე, არამედ მხოლოდ ერთმანეთთან ახლოს მყოფ მნიშვნელობებს, რადგანაც გაზომვები დაკავშირებულია შეცდომებთან.

ალბათობის კავშირი ფარდობით სიხშირესთან დაახლოებით ისეთივეა, როგორც კავშირი სიმკვრივის ზუსტ და გაზომვის შედეგად მიღებულ მნიშვნელობას შორის. შესაბამისად, ფარდობით სიხშირეზე დაკვირვება შეიძლება განვიხილოთ როგორც ალბათობის გაზომვის ხერხი. ეს გაზომვა (ისევე, როგორც ნებისმიერი სხვა გაზომვა) საშუალებას იძლევა მივიღოთ მხოლოდ არაზუსტი მნიშვნელობები, მაგრამ გაზომვის უზოსტობა შეიძლება ნებისმიერად შევამციროთ დაკვირვებათა რიცხვის გაზრდის ხარჯზე. თუმცა, ამ ხერხის არჩევით, შეუძლებელია მივიღოთ ალბათობის აბსოლუტურად ზუსტი მნიშვნელობა. მონტენი ამტკიცებდა, რომ „ფაქტები არ იძლევიან სრული დარწმუნების საშუალებას, იმიტომ, რომ თვითონ ისინი ყოველთვის ცვალებადია“. მონტენის ამ სიტყვებს მე ასე შევავსებდი: ფაქტები სრული უტყუარობით არ გვაძლევენ თვითდარწმუნებულობის ხარისხის განსაზღვრის შესაძლებლობას. მაშასადამე, პრაქტიკულად, ჩვენ უნდა დავკმაყოფილდეთ არასრული დარწმუნებულობის ნაწილობრივი ცოდნით. ეს ტოლფასია იმისა, რომ, თითქოს, თქვენ მიგეღოთ ჩემი წერილის მხოლოდ ნაწილი, ვინაიდან მისი დანარჩენი ნაწილი დაიკარგა გამოგზავნის დროს, და თვითონ ამ ნაწილის წაკითხვაც თქვენ მოახერხეთ არასრულად, რადგანაც ფოსტალიონს იგი წყალში ჩაუვარდა, რის გამოც სტრიქონები გახდა ბუნდოვანი. მე გულწრფელად მჯერა, რომ ამ წერილს ასეთი ბედი არ ეწევა. რაც შეეხება წარსულის დოკუმენტებს, ისინი თითქმის გარდაუვლად იკარგე-

ბიან ამგვარ ან მსგავს გარემოებებში. მიუხედავად ამისა, ისტორიული მეცნიერება არასრული დოკუმენტებითაც ცდილობს აღადგინოს დიდი ხნის წინანდელი სურათი, მაგრამ ჩვენი წარმოდგენები განვლილ პერიოდზე გარკვეულწილად ჰიპოთეზურია, თუმცა ისტორიკოსების უმრავლესობას არ სურს ამის აღიარება სრული გულწრფელობით.

ნათქვამს თუ შევაჯამებთ, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ გარკვეული ხდომილების სიხშირის შეფარდება დაკვირვებათა რაოდენობასთან დაახლოებით ისეთივეა, როგორც ამ ხდომილების ალბათობის შეფარდება აუცილებელი ხდომილების ალბათობასთან, ანუ ერთთან. ეს შესაბამისობა ფაქტებსა და ლოგიკას შორის, შესაძლებლობასა და განხორციელებადობას შორის მე მიმაჩნია ჭეშმარიტად მნიშვნელოვანად!

აღნიშნული ორივე სახის დასკვნა შეიძლება მონაცვლეობითაც გამოვიყენოთ: სიხშირეებზე დაკვირვებით ჩვენ შეგვიძლია დასკვნა გავაკეთოთ გარკვეული ალბათობის მნიშვნელობის შესახებ, ხოლო ამ გზით მიღებული ალბათობების საშუალებით გამოვთვალოთ სხვა, ალბათობების გამოთვლის წესების გამოყენებით, და, ბოლოს, აქედან მოვიპოვოთ ინფორმაცია მომავალში ხდომილების მოხდენის შესაძლებლობის შესახებ. ამრიგად, დაკვირვებებიდან და მოსაზრებებიდან, რომლებიც ერთმანეთს ავსებენ, ჩნდება სამყაროს შეცნობის შესაძლებლობა. მე არ ვიქმნი ილუზიას, თითქოს პირველს მერგო პატივი გამეაზრებინა ეს მოვლენა; მე დარწმუნებული ვარ, რომ ეს ცნობილი იყო ჯერ კიდევ პლატონისთვის. ახლახან მე გადავიკითხე „ტიმეი“ და ვიპოვე მასში შემდეგი შესანიშნავი დაშვება: „როგორც წარმოშობა ეხება ყოფიერებას, ისე მოსაზრება ეხება ჭეშმარიტებას“. ამიტომ, ამ საიდუმლოებით მოცული გამონათქვამით პლატონს სურდა გამოეხატა იგივე აზრი, რომელზეც ახლა მიდიოდა საუბარი. ჩემი დარწმუნებულობა დასტურდება იმით, რომ ციტირებული ფრაზით ტიმეი უშუალოდ ლაპარაკობს რაღაცებზე, რომლებიც არიან არა უტყუარი, არამედ მხოლოდ ალბათური. მე მეჩვენება, რომ ძველ საბერძნეთში იყვნენ სხვა ფილოსოფოსებიც, მაგალითად, კარნიდესი (Carneades), რომლებსაც ესმოდათ, თუ რისი თქმა სურდა პლატონს, თუმცა, დროთა განმავლობაში, ამ რამდენადმე ბუნდოვანი გამონათქვამის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა მივიწყებულ იქნა. როდესაც, ამ დღეებში, მე მივაგენი ამ ადგილს „ტიმეიში“, ვიგრძენი თავი იმ ადამიანად, რომელმაც მიწის სიღრმიდან ამოთხარა მშვენიერი ბერძნული ქანდაკება და, გაწმინდა რა ის ტალახისგან, დაინახა, თუ როგორ განათდა მარმარილო პირვანდელი ბრწყინვალებით.

ჩემი სანთლისგან დარჩა მხოლოდ მცირედი; აქედან მე ვაკეთებ დასკვნას, რომ თქვენს მეორე კითხვაზე პასუხმა ჩემგან დიდი დრო მოითხოვა. თქვენი მესამე კითხვა უფრო მარტივია, თუმცა, ლამპრის მსგავსად, ანათებს ჩვენი პრობლემის ზოგიერთ ჩრდილში დარჩენილ ნაწილს. მაგრამ ვიმედოვნებ, თქვენ მე მაპატიებთ, რომ მასზე პასუხს დავტოვებ მომავლისთვის, ვინაიდან ხვალ დილით მე მომიწევს შეხვედრა ერთ საიმედო პირთან, რომელიც ხვალვე გამოემგზავრება ორლეანში, — სადაც, როგორც მე გავიგე, თქვენ ახლა იმყოფებით ბატონ კარკავისთან, — და გადმოგცემთ ამ წერილს.

ჩემი დიდი სურვილია, რომ თქვენ ის მიიღოთ რაც შეიძლება სწრაფად და დარწმუნდეთ იმაში, რომ თქვენ მიერ დათესილმა მარცვლებმა არა მარტო გაიხარა, არამედ უკვე მოასწრო ნაყოფის გამოღება. გულწრფელად ვიმედოვნებ, რომ ჩემი მოსაზრებების ამ ნაყოფს, რომელიც, მართალია, ჯერ კიდევ არ არის ბოლომდე მწიფე, თქვენ მაინც მიიჩნევთ საკვებად გამოსადეგად. იმისათვის, რომ ის ძალიან მწკლარტე არ მოგეჩვენოთ, გიგზავნით კიდევ კალათით ვაშლს ჩემი ბაღიდან. არა მგონია ეს ვაშლები იყოს იმაზე უკეთესი, ვიდრე ხარობს ტულუზაში, მაგრამ, შესაძლებელია, ეს მოკრძალებული საჩუქარი დამეხმაროს დაგარწმუნოთ, რომ თქვენ არ გყავთ უფრო გულწრფელი თანამოაზრე და მგზნებარე თაყვანისმცემელი, ვიდრე

ბლეზ პასკალი

ბლეზ პასკალი (ფრანგ. Blaise Pascal; 1623 – 1662)

გამოჩენილი ფრანგი მათემატიკოსი, მექანიკოსი, ფიზიკოსი, ლიტერატორი და ფილოსოფოსი; მათემატიკური ანალიზის, ალბათობის თეორიისა და პროექციული გეომეტრიის ერთ-ერთი ფუძემდებელი; გამოთვლითი ტექნიკის პირველი ნიმუშების შემქმნელი; ჰიდროსტატიკის, როგორც მეცნიერების, ერთ-ერთი დამაარსებელი.

ბლეზ პასკალი დაიბადა 1623 წლის 19 ივნისს საფრანგეთის ქალაქ კლერმონ-ფერანში. 1631 წელს ოჯახი გადავიდა პარიზში. ცნობილია, რომ 11 წლის ბლეზი დამოუკიდებლად მივიდა ევკლიდეს 23 დებულების გააზრებამდე და თავისებური ტერმინებით ჩამოყალიბებამდე. მამასთან და დეკარტის მეგობარ მათემატიკოს პ. პეტისთან ერთად, 1646 წელს გაიმეორა გალილეის მოწაფის, ე. ტორიჩელის (1608-1647) ცდა ვერცხლისწყლის ბარომეტრის შესახებ. პასკალმა 16 წლისამ დაწერა ნარკვევი კონუსური კვეთების შესახებ. 1642 წლიდან ცდილობდა გამომთვლელი მანქანის აგებას. 1647 წელს პატენტი მიიღო ამ საქმეზე. 1652 წელს გამომთვლელი მანქანის „პასკალინა" საბოლოო მოდელი მზად იყო. თანამედროვე ენციკლოპედიაში მოცემულია პასკალის რიგი მიღწევა: პასკალის წირი, პასკალის თეორემა, პასკალის სამკუთხედი, „პასკალი", როგორც წნევის ერთეული, პასკალის კანონი; მას ეკუთვნის მათემატიკური ინდუქციის, როგორც დასაბუთების ერთ-ერთი მეთოდის განსაზღვრება და სხვა. პასკალი ითვლება ფუძემდებლად ალბათობის გამოთვლის თეორიისა, რომლის გავლენა საკუთარ კვლევაზე თვით ლაიბნიცმა აღიარა.

პიერ დე ფერმა (ფრანგ. Pierre de Fermat; 1601 – 1665)

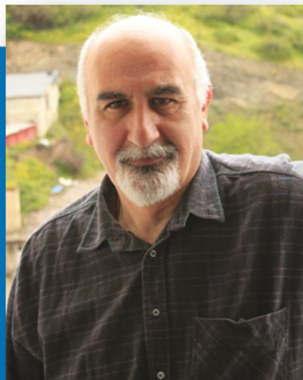
გამოჩენილი ფრანგი მათემატიკოსი (თვითნასწავლი); ანალიზური გეომეტრიის, მათემატიკური ანალიზის, ალბათობის თეორიისა და რიცხვთა თეორიის ერთ-ერთი დამფუძნებელი. იგი პროფესიით იურისტი იყო, 1631 წლიდან – პარლამენტის მრჩეველი ტულუზაში; ბრწყინვალე პოლიგლოტი. ყველაზე მეტად ცნობილია ფერმას დიდი თეორემის ფორმულირებით, რომელიც ითვლებოდა „ყველა დროის ყველაზე ცნობილ მათემატიკურ ამოცანად“.

პიერ ფერმა დაიბადა 1601 წლის 17 აგვისტოს საფრანგეთის ქალაქ ბომონ-დე-ლომანში. იურიდიული განათლების მიღების შემდეგ, 1631 წელს, ფერმა ხდება პარლამენტის სამეფო მრჩეველი ტულუზაში, ხოლო მოგვიანებით (1648 წელს), ედიქციის პალატის წევრი კასტრში, რაც საშუალებას აძლევს, თავის სახელს დაუმატოს წარჩინებულობის ნიშანი – ნაწილაკი „დე“. 1636 წელს ფერმამ დაწერა ტრაქტატი „ბრტყელი და სივრცული სხეულების თეორიის შესავალი“, სადაც დეკარტის „გეომეტრიისგან“ (რომელიც გამოვიდა ერთი წლის შემდეგ) დამოუკიდებლად გადმოსცა ანალიზური გეომეტრია. 1637 წელს დაიწყო მეცნიერული კონფლიქტი ფერმასა და დეკარტს შორის. ამ დაპირისპირებაში შუამავალი იყო ცნობილი ფრანგი გეომეტრი ჟერარ დეზარგი (Girard Desargues), რომელმაც აღიარა, რომ ფერმას მეთოდი უნივერსალური და სწორია თავისი არსით, მაგრამ არ არის ნათლად გადმოცემული და არასრულია. დეკარტმა ბოდიში მოუხადა ფერმას, თუმცა სიცოცხლის ბოლომდე არაკეთილგანწყობილი დარჩა მის მიმართ. 1637 წელს მან ჩამოაყალიბა თავისი „დიდი თეორემა“. 1640 წელს გამოაქვეყნა ნაკლებად ცნობილი, მაგრამ ბევრად უფრო ფუნდამენტური ფერმას პატარა თეორემა. 1654 წელს, ფერმას პასკალთან მიმოწერით, იწყება ალბათობის თეორიის იდეების ფორმირება.

უნივერსალური ბუნებრივი ზედაპირები

პროფ. იოჰან ჰილისი

ანტვერპენის უნივერსიტეტი, ბიოსაინჟინრო მეცნიერებათა დეპარტამენტი (ბელგია)
სამეცნიერო ინტერესები: მცენარეთა ბიოტექნოლოგია, ბიომოლეკულათა და მცენარეთა ფორმების მოდელირება, გეომეტრია, გამოყენებითი მათემატიკა, ტელეკომუნიკაცია და ანტენათა თეორია.
მის მიერ შემოთავაზებულია საკმარისად ფართო კლასის წირებისა და ზედაპირების ანალიზურად წარმოდგენის ფორმულა, რომელსაც თანამედროვე ლიტერატურაში ჰილისის წირების, ანკი სუპერფორმულის სახელით მოიხსენებენ.
e-mail: johan.gielis@uantwerpen.be
Home Page: www.genicap.com



ინგლისურიდან თარგმნა
ილია თავხელიძემ

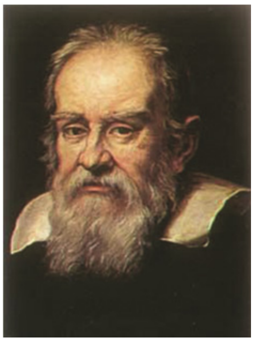
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი, 1984 წ.
დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის მემორიალური ოქროს მედლით

ჰილისის წირები და ზედაპირები

მეჩვიდმეტე საუკუნის დასაწყისში, იოჰან კეპლერისა და გალილეო გალილეის გამოკვლევებმა გამოკვეთეს ერთი ძალზე მნიშვნელოვანი მოსაზრება, რომ ბუნებრივი ობიექტების მოძრაობის ტრაექტორიის შესწავლა მჭიდროდაა დამოკიდებული „კლასიკური კონუსური კვეთების“ (მეორე რიგის წირები) შესწავლაზე. ეს მოსაზრება კიდევ უფრო გამყარდა სერ ისააკ ნიუტონის მიერ მსოფლიო მიზიდულობის კანონის აღმოჩენის შემდეგ. მოვლენის შესწავლის ნიუტონისეული მიდგომა არსით გეომეტრიული იყო. მოკლე ხანში, მექანიკასა და სხვა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, კვლევისას, დაიწყო მათემატიკური (ალგებრის, ანალიზის და სხვ.) მეთოდების ფართოდ გამოყენება და ეს ტენდენცია დღემდე ძალზე აქტუალურია. *„იმ დროს, როდესაც ალგებრა და ანალიზი უზრუნველყოფს მათემატიკის და-*

იოჰან კეპლერი
1571-1630

ფუძნებას, გეომეტრია წარმოადგენს საფუძველთა საფუძველს“ (Chern 2000).



გალილეო გალილეი 1564 – 1642

სერ ისააკ ნიუტონი 1643 – 1727

1994 წლიდან მოყოლებული, გაბრიელ ლამეს წარმოდგენაზე (1818 წელი, განტოლებები 1-5) დაყრდნობით მეცნიერები ცდილობდნენ ანალიზურად აღეწერათ ბუნებაში არსებული სხვადასხვა ფორმა, როგორც „სუპერელიფსი“, ანუ დაეწერათ გამაერთიანებელი ანალიზურ-გეომეტრიული წარმოდგენა (Gielis, 1996). ასეთი იყო პირველი ნაბიჯი კლასიკური კონუსური კვეთებიდან, ლამეს წირების გავლით, გამაერთიანებელი გეომეტრიული წარმოდგენისაკენ.

$$\left|\frac{x}{A}\right|^n + \left|\frac{y}{B}\right|^n = 1; \quad (1)$$

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1; \quad \frac{A}{x} + \frac{B}{y} = 1;$$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1; \quad \sqrt{\frac{x}{A}} + \sqrt{\frac{y}{B}} = 1. \quad (2\text{-}5)$$

ფორმულა 1– სუპერელიფსები,
ფორმულები 2-5: წირები და კონუსური კვეთები კონკრეტული ხარისხებისათვის

$$\rho(\varphi) = \left(\left| \frac{\cos(\frac{m_1}{4}\varphi)}{A} \right|^{n_2} \pm \left| \frac{\cos(\frac{m_2}{4}\varphi)}{B} \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}, \quad (6)$$

ლამეს სუპერწრეებისა და სუპერელიფსების განზოგადებამ სუპერწირებამდე და შემდგომ სუპერზედაპირებამდე (Gielis და თანაავტორები, 2005), საშუალება მოგვცა ერთიანად აღწერილიყო ბუნებრივი სიმრუდის მქონე არსებული ფორმების დიდი ნაწილი. სუპერწირები მიიღება ეგრეთ წოდებული ჰილისის გარდაქმნით, რომელიც ხანდახან მოიხსენიება როგორც სუპერფორმულა (ფორმულა 6 და, შესაბამისად, ნახ.1).

გაბრიელ ლეონ ჟან ბატისტ ლამე, 1795 – 1870

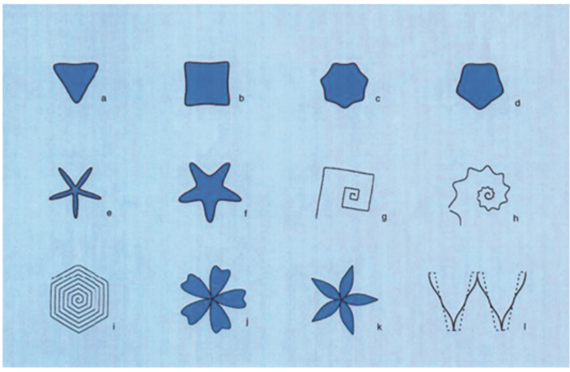
დასახელებები: „სუპერფორმულა“, „სუპერწირები“ და „სუპერზედაპირები“ განაპირობა ამ წარმოდგენის უდავო კავშირმა ისეთ ტერმინებთან, როგორებიცაა ლამეს: სუპერწრე, სუპერელიფსი და სუპერკვადრატი. დროთა განმავლობაში ეს დასახელება შეიცვალა და მათემატიკოსების გავლენით მას ეწოდება „ჰილისის ფორმულა“ (მაგ., Koiso and Palmer, 2007, 2008), რომელიც აღწერს „ჰილისის წირებს“, ან ზედაპირებსა და (სუბ)მრავალნაირობებს (Verstraelen, 2004, 2008).

მრავალი წირის ანალიზური წარმოდგენა ძალზე ხელსაყრელია **ρ** და **φ** *პოლარულ კოორდინატებში* (x = ρ cos φ და y = ρ sin φ). წირების კლასი ფართოვდება, როდესაც კოორდინატი **ρ** გარკვეული წესით არის დამოკიდებული **φ** პოლარულ კუთხეზე, ანუ **ρ(φ)** — გარკვეული ფუნქციაა. კერძოდ, კოეფიციენტ *m*/4-ის ჩამატებითა (რომელიც განაპირობებს შესასწავლი ფორმის (წირის) უფრო კონკრეტულ სიმეტრიულ განლაგებას *O* კოორდინატთა სათავის მიმართ) და ფორმულა 1-ში ხარისხის მაჩვენებელთათვის მეტი „თავისუფლების“ მინიჭებით, სუპერელიფსი შესაძლოა განზოგადდეს ე.წ. სუპერწირად (ფორმულა (6).

$$\rho(\varphi) = \left(\left| \frac{\cos(\frac{m_1}{4}\varphi)}{A} \right|^{n_2} \pm \left| \frac{\cos(\frac{m_2}{4}\varphi)}{B} \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}, \quad (6)$$

სადაც A, B, $n_1 \in \Re_0$; $m, n_2, n_3 \in \Re$. როდესაც m = 4 და $n_1 = n_2 = n_3 = n$, მიიღება ფორმულა 1. შესაბამისად, ჩანაწერი (6) შესაძლებელია

განხილულ იქნეს როგორც გარდაქმნა, რომლის საშუალებით წრე გარდაიქმნება სხვადასხვა სახის ბრტყელ წირად.



ნახ. 1. სუპერზედაპირები (Gielis, 2003a)

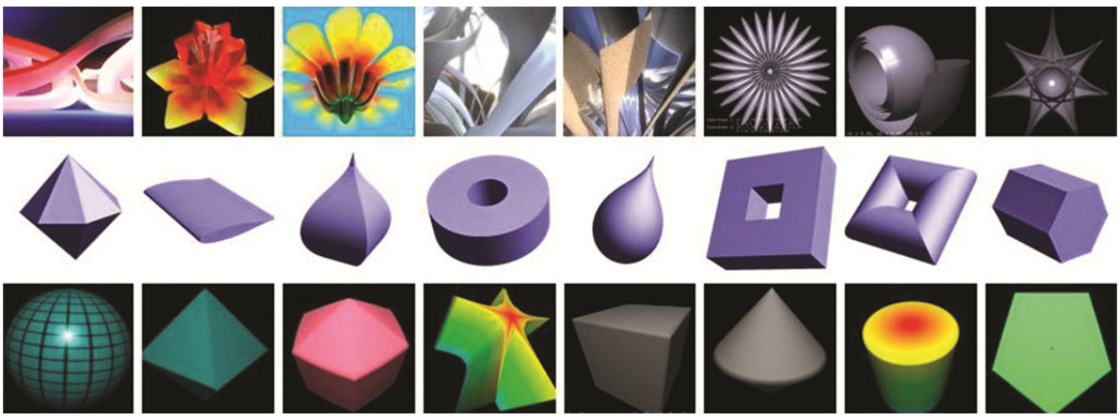
სუპერელიფსები და სუპერწირები საზოგადოდ ცნობილია არამხოლოდ როგორც გარკვეული სახის ბრტყელი წირები, მათ, იმავდროულად, გააჩნიათ ძალზე საინტერესო გეომეტრიული არსი — *„n-მოცულობის" შენახვის კანონი.* მაგალითად, სუპერწრე, როდესაც n = 3 (ფორმულა 1, როდესაც A=B=1 და n=3) „გამოსახავს" კანონზომიერებას, რომლის თანახმად კუბების, რომელთა წიბოები, შესაბამისად, X (აბსცისა) და Y (ორდინატა) სიგრძისანი არიან, მოცულობათა ჯამი ერთეულოვანი წიბოს მქონე კუბის მოცულობის ტოლია (ძალზე საინტერესოა, რომ სუპერწრე (ფორმულა 1), როდესაც A=B=1 და n=1 „გამოსახავს" კანონზომიერებას, რომლის თანახმად ესაა გეომეტრიული ადგილი ისეთი წერტილებისა, რომელთა დეკარტული კოორდინატების სიგრძეთა ჯამი ერთიანის ტოლია, ანუ აღწერს წირს, რომელსაც მოხაზავს ისეთი მართკუთხა სამკუთხედების ჰიპოტენუზები, რომელთა ერთი ბოლო სათავეშია განთავსებული და კათეტების სიგრძეების ჯამი ერთიანის ტოლია — ი.თ.). ეს ბრტყელი წირი ზოგად შემთხვევაში გამოსახავს „n-მოცულობის" შენახვის კანონს. ამგვარად, ორივე შემთხვევაში ბრტყელი (2D) და სივრცითი (3D) ლამე-ჰილისის წირები, რომლებიც აღიწერება ერთი მარტივი ფორმულით, გარკვეული აზრით, იმავდროულად გამოსახავს შენახვის კანონის ლოკალურ და ზოგად შემთხვევას (Gielis, 2010a).

თუ ლამეს წირებისათვის ან სუპერწირებისათვის შემოღებულ იქნა ე.წ. შიდა საკოორდინატო ფუნქციები $_n\cos$ და $_n\sin$, მაშინ შესაძლოა „განზოგადდეს" პითაგორას თეორემა (ფორმულა 7; Beirinckx and Gielis, 2004; Lenjou 2005). ამგვარად, n-მოცულობა შესაძლოა განხილულ იქნეს, როგორც თავისუფლების ხარისხი, რაც, ცხადია, მეტია, ვიდრე თავისუფლების ხარისხი ორი (ანუ პითაგორას თეორემის კლასიკური შემთხვევა n=2 და, შესაბამისად, „ერთეულოვანი წრეწირი" კლასიკური ევკლიდეს წრეწირია, ანუ საკოორდინატო ფუნქციები $_n\cos$ და $_n\sin$ წარმოადგენენ კლასიკურ $\cos$ და $\sin$ ფუნქციებს).

$$_n\cos^n(\phi) + {}_n\sin^n(\phi) = 1 \qquad (7)$$

ფორმულა 7 — პითაგორას ზოგადი თეორემა

სუპერწირებისა და სუპერელიფსების საშუალებით, ანუ ფორმულა (6)-ში, მხოლოდ რიცხვითი პარამეტრების ცვლილებით, შესაძლოა აღიწეროს ბუნებაში არსებული ძირითადი ფორმების ფართო სპექტრი, ანუ მოხდეს ე.წ. „ბუნების გეომეტრიზაცია". ისეთი ფორმები, როგორც ერთეულოვანი წრეებია,



ნახ. 2. სივრცული სუპერზედაპირები, რომელთა საფუძველი ბრტყელი სუპერწირებია

გამოსახავენ რიცხვით დამოკიდებულებებს და აზოგადებენ პითაგორას თეორემას.

არსებული წარმოდგენა არ შემოიფარგლება ბრტყელი წირებითა და ზედაპირებით, ის შესაძლოა მარტივად განზოგადდეს სუბმრავალნაირობების ფართო კლასზე. ბუნებაში არსებულ ფორმათა (ორგანიზმები, მცენარეები, კრისტალები, მოლეკულები...) აღწერას ეს ფორმულა პარამეტრების რეგულარული ცვლილებით ახორციელებს და ასახავს როგორც არსებათა (რომელთა გარემოცვაშიც ჩვენ ვცხოვრობთ) გეომეტრიულ ფორმებს (D'Arcy Thompson, 1917), ასევე ზოგიერთ სივრცე-დროით ფიზიკურ მოდელს. ამიტომაც ის მოიხსენიება, როგორც ზოგადი ბუნებრივი ფორმა (Gielis და თანაავტ., 2005).

ზოგადი ბუნებრივი ფორმის გეომეტრიული არსი

ზედაპირების შესწავლისას განმსაზღვრელ როლს თამაშობს მეორე რიგის წარმოებულები და სიმრუდეები (Schrödinger, 1940). ზედაპირები, თავისი გეომეტრიული არსით, ცალსახად განისაზღვრება თავისი სიმრუდით. ჩვეული, ტრადიციული, ევკლიდური გეომეტრიის თვალსაზრისით, ზედაპირების სიმრუდეები აღიწერება წრეების ან ელიფსების საშუალებით (Coolidge, 1952), იმავდროულად, რიმანის გეომეტრიაში ისინი წარმოადგენენ ყოველი სკალარული სიდიდის საფუძველს. ზედაპირთა გამოკვლევების ამგვარი მიდგომის ისტორიული საწყისები კეპლერის, ჰიუგენსისა და ნიუტონის სახელებთანაა დაკავშირებული.

გეორგ ფრიდრიხ ბერნჰარდ რიმანი
1826-1866

ქრისტიან ჰიუგენსი
1629–1695

ჰერმან ჰემჰოლცი
1821 – 1894

მარიუს სოფუს ლი
1842-1899

ჩვენს წარმოდგენას სამყაროს (გარემოს) შესახებ ღრმა ფესვები აქვს ჩვენს აღქმაში და ეფუძნება ამ წარმოდგენის აბსტრაჰირებას, რომელიც თავის თავში მოიცავს გარემოს იზოტროპიულობას (ანუ ერთგვაროვნებას). ფორმის თვალსაზრისით ამგვარი აბსტრაქციის შედეგია წრე და სფერო. პირდაპირი სვლა და თავისუფალი, იზოტროპული, ნებისმიერი მიმართულებით გადაადგილება კაცობრიობის მიერ გადააზრებულია ევკლიდური გეომეტრიის საფუძველზე. XIX საუკუნეში გეომეტრია მივიდა რიმანის ზოგად სივრცეების აღქმამდე, სადაც მუდმივი სიმრუდის K კვეთების მქონე ზედაპირები, როგორც აჩვენა რიმანის, ჰემჰოლცისა და ლის კვლევებმა, აკმაყოფილებენ „თავისუფალი გადაადგილების აქსიომას“. თუმცა ამგვარი თავისუფალი გადაადგილების იდეა აღარ აღმოჩნდა აუცილებელი ცოცხალი და არაცოცხალი ქმნილებებისათვის, რომელთათვის, ე.წ. ვარიაციული პირობებიდან გამომდინარე, „საკუთარი გეომეტრია განისაზღვრება“. ევკლიდურ გეომეტრიაში უმოკლესი მანძილი ორ წერტილს შორის „წრფეა“, მაგრამ უკვე მცენარეებისა თუ ზღვის ვარსკვლავების „სამყაროში“ უმოკლესი მანძილის აღქმა საზოგადოდ განსხვავებულია. რადგან არსებობს განსხვავებული გარემო პირობები და მათგან გამოწვეული შეზღუდვები, მათი აღქმა და აგრეთვე შესაბამისად ინიცირებული გეომეტრიები შესაძლოა იყოს პრინციპულად განსხვავებული.

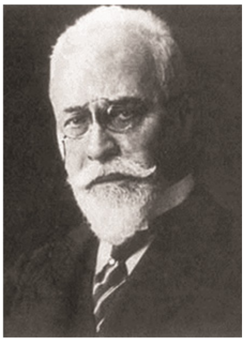
ქმნილებათა უმეტესობისათვის სამყარო ანიზოტროპულია, გააჩნია ე.წ. პრიორიტეტული მიმართულებები, აგრეთვე „ზომის სხვადასხვა იდეოლოგია“. წიგნის — **მინკოვსკის გეომეტრია** — შესავალში ა. ტომპსონი (1996) წერს: „ევკლიდესა და ნიუტონის სივრცე არის

ერთგვაროვანი და „იზოტროპული“, ერთნაირი ყველა მიმართულებით. ამგვარი წარმოდგენა ყოველდღიურობასთან, რბილად რომ ვთქვათ, შეუთავსებელია — ზედა და ქვედა პრინციპულად განსხვავდება აღმოსავლეთისა და დასავლეთისაგან. რეალობაში არსებობს პრიორიტეტული მიმართულებები. ამის კარგი მაგალითია პრიორიტეტული მიმართულებები, რომლებიც გააჩნია ზრდის პროცესში კრისტალებს, რომლებიც, საპნის ბუშტებისაგან განსხვავებით, ყალიბდებიან როგორც მრავალწახნაგები და არა როგორც სფეროები. ევკლიდური (კლასიკური) ერთეულოვანი წრე და სფერო რეალურ სამყაროში უცნობი (არარსებული) ობიექტებია, თუმცა არსებობს ამოზნექილი რაღაც ობიექტები, რომლებსაც „ერთეულოვანი ბირთვები“ ეწოდება.

ჩვენ ვიმყოფებით ბუნების გეომეტრიის შემეცნებისა და გააზრების საწყის სტადიაში, ხოლო რას ნიშნავს ეს თვით გეომეტრიის ბუნებისათვის, ჯერ კიდევ შესასწავლია. „არსებული გეომეტრიული მოდელები, მიუხედავად მათი სიმრავლისა, ვერ პასუხობენ მრავალ არსებულ უმნიშვნელოვანეს შეკითხვას. მაგალითად: როგორ უნდა აღიწეროს ყველა შესაძლო კონფიგურაციის ცოცხალი ორგანიზმის დროში ზრდის (ცხოვრების) ტრაექტორია“ (Berger, 2000); მაგალითად, კონკრეტულად, ხეების ან კიბოს უჯრედების ზრდა.

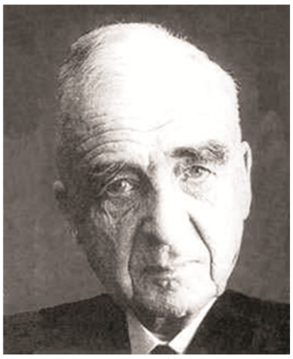
სინათლის ბუნება ანკი მისი ყოფაქცევა, მარტივად რომ ვთქვათ, არავითარ გავლენას არ ახდენს არც არსებებზე, რომლებიც ღრმა წყლებში ბინადრობენ, და არც ნაწლავურ ჩხირებზე, რომელთა საარსებო გარემო ჩვენი შინაგანი ორგანოებია. დიდი ალბათობით შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ რვაფეხას, რომელიც ვეშაპის მიერ 600 მეტრზე უფრო ღრმადაა დაჭერილი და რომელიც ოკეანის ზედაპირზე ამოტანისთანავე „ფეთქდება“, წნევათა სხვაობის გამო, რაღა თქმა უნდა, „თავისუფალ გადაადგილებაზე“ აბსოლუტურად განსხვავებული მოსაზრება ექნება. ზღვის ვარსკვლავები და ხეები სხვადასხვანაირად, თანაც ჩვენგან განსხვავებულად, აღიქვამენ სამყაროს. მათ რომ ჰქონდეთ შესაძლებლობა აღწერონ ან მოახდინონ სამყაროს გეომეტრიზაცია და „გაზომვები“, შედეგი იქნება აბსოლუტურად განსხვავებული. ცხადია, რომ სამყაროს დღეს არსებული აღწერა დაფუძნებულია უნიკალურ — ადამიანურ აღქმაზე.

ე.წ. „ჰილისის წირებისა და ზედაპირების“ საშუალებით ჩვენ გვეძლევა კარგი და, თანაც, მარტივი საშუალება ბუნებაში არსებული სხვადასხვა ფორმა აღიწეროს კონუსური კვეთების გარდაქმნებით. ამგვარად, გადავიდეთ აღწერიდან გაგებაზე. კლასიკურ შემთხვევაში მხები სივრცეების კვლევისას გამოყენებულია მხები ელიფსები და წრეები. ანალოგიურად აღებულ შემთხვევაში მხები სივრცეების, სიმრუდეების განსაზღვრა შესაძლოა დაეყრდნოს სუპერელიფსებსა და სუპერწირებს და, შესაბამისად, შესაძლოა ახლებურად იქნეს გააზრებული მინკოვსკისა და ჰილბერტ-ფინსლერის გეომეტრიები და მოდელირებულ იქნეს ბუნებაში მიმდინარე სხვადასხვა მოვლენა.



ჰერმან მინკოვსკი
1864–1909

დავიდ ჰილბერტი
1862 – 1943



პოლ ფინსლერი
1894 – 1970

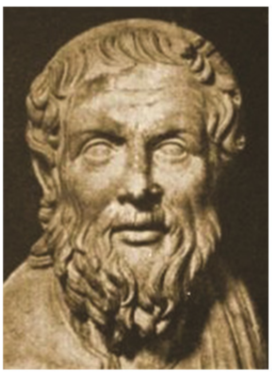
ამ ზოგად შემთხვევაში სიმრუდე შესაძლებელია განისაზღვროს შესაბამისად აღწერილი ფორმის საფუძველზე, როგორც ეს, კლასიკურ შემთხვევაში, წრის საფუძველზე ხორციელდებოდა.

ძალზე საინტერესოა ის განსხვავება, რომელიც ამ მიმართულებით მათემატიკური აზროვნების განვითარების ორ ძირითად გზას შორის არსებობს. ერთი მიდგომა ძირითად ყურადღებას ამახვილებს კონუსური კვეთების

აღწერასა და შესწავლაზე. ის უკავშირდება ისეთ სახელებს, როგორებიცაა: აპოლონიუსი, კეპლერი, გალილეი, ლამე, მინკოვსკი. ამ მიმართულების დღევანდელი შესწავლის ობიექტია აქ წარმოდგენილი — ე.წ. ბუნებრივი წირები. მეორე მიმართულება ძირითად აქცენტს აკეთებს „გამოთვლებზე“, თანაც ის საფუძვლად იღებს სამყაროს იზოტროპულობასა და ამ იდეის გეომეტრიულ სიმბოლოს ევკლიდურ წრეს, ანუ კლასიკურ ერთეულოვან წრეს. ამ მიმართულების აპოლოგეტებია არქიმედე, პტოლემაოსი, ნიუტონი და ფურიე.

საზოგადოდ, მეცნიერული აზრის განვითარება გვამცნობს: ერთნი პოულობენ გამაერთიანებელ აღწერას, რომელსაც საფუძვლად უძევს კონუსური კვეთები (მაგ., გალილეი, კეპლერი), რაც შთააგონებს უდიდეს მათემატიკოსებს წრეზე და გამოთვლებზე დაყრდნობით განაზოგადონ აღწერილი მეთოდები. ნიუტონის ერთ-ერთ უდიდეს დამსახურებას წარმოადგენს ნებისმიერი ბრტყელი წირის სიმრუდის განსაზღვრა, რამაც შემდგომ შესაძლებლობა მისცა მას თავისი პრინციპის დაფუძნებისა.

მომავლის ამოცანაა: მოხდეს გადასვლა ბუნებაში არსებული ფორმების გაერთიანებული აღწერიდან (ანუ, რაც იძლევა საშუალებას, განხილულ იქნეს ბუნებაში არსებული ფორმები, კონუსური კვეთები) იმის გაგებისაკენ, თუ რა განსაზღვრავს არსებულ ფორმებს. *ამ გზას, თითქმის უცილობლად, მივყავართ გარეგანი და შინაგანი სიმრუდეების განსხვავებულობამდე (უტოლობამდე), იმის გაგებამდე, თუ როგორაა ის განხორციელებული გარემოში, ეს კი ანალოგიურია ზედაპირებისათვის კარგად ცნობილი უტოლობისა* $K \le H^2$,



აპოლონიუსი
262 – 190 ძვ.წაღ

კლავდიუს პტოლემაოსი
83 – 161

არქიმედე
287 – 212 ძვ.წაღ

ჟან ბატისტ ჟოზეფ ფურიე
1768 – 1830

სადაც K *არის გაუსის სიმრუდე და წარმოადგენს ორი* ***მთავარი სიმრუდის*** *საშუალო გეომეტრიულ მნიშვნელობის კვადრატს, ხოლო* H *ამ სიდიდეების საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობაა* (Verstraelen, 2008; Gielis, 2010а, в). პარალელურად, მოსალოდნელია დიდი პროგრესი გარემოს იზოტროპიულობაზე დაფუძნებული გამოთვლითი მეთოდების დამუშავებაში.

გაბრიელ ლამეს მეცნიერება რაციონალურად უნიკალურია

ამ მიმართულებით ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ნაბიჯი იყო ფურიეს მეთოდის გაფართოება სასაზღვრო ამოცანებისათვის. პ.ნატალინიმ (P. Natalini (et al, 2008)) და დ.კარატელიმ (D. Caratelli და თანაავტ., 2009, 2010), ჰილისის წირების იდეაზე დაყრდნობით, ლაპლასის (და მასთან დაკავშირებული) განტოლების ფურიეს მეთოდით ამოსახსნელად განიხილეს ე.წ. „დეფორმირებული პოლარული კოორდინატები“. გეომეტრიული თვალსაზრისით ძალზე მნიშვნელოვანია, რომ, კლასიკური გაგებით, „თითქმის ყოველი ორ- თუ სამგანზომილებიანი პოლარული არე ზუსტად (ან, ყოველ შემთხვევაში, საკმარისი სიზუსტით მიახლოებულად) აღიწერება ამგვარი წირებით“. ეს კი საშუალებას იძლევა შესწავლილ იქნეს სხვადასხვა კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის დასმული სასაზღვრო ამოცანები ისეთ არეებში, რომლებიც, მაგალითად, აკმაყოფილებენ ე.წ. ვარსკვლავის პირობას. ამგვარ არეებში, დიდი ალბათობით, შესაძლებელი ხდება მრავალი კლასიკური ამოცანისათვის ამო-

ნახსნების მოძებნის მეთოდების დამუშავება. არსებითად, ეს ნიშნავს, რომ, მე-19 საუკუნის ოციანი წლებიდან მოყოლებული, ხდება გაბრიელ ლამესა და ჟოზეფ ფურიეს მიდგომების შერწყმა.

ეს ზოგადი მეთოდოლოგია გამოყენებულ იქნა სხვადასხვა დიფერენციალური განტოლებისათვის დასმული შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანის (დირიხლე, ნეიმანი, რობენი) ამოხსნისათვის, ხოლო ამჟამად მეცნიერთა ჯგუფები ცდილობენ ამ მეთოდის გამოყენებას შედგენილი არეებისათვის დასმული შერეული ტიპის დიფერენციალური განტოლებებისათვის. ლაპლასიანი (ლაპლასის ოპერატორი) უშუალოდ არის დამოკიდებული ზედაპირის საშუალო H სიმრუდეზე, რომელიც იმავდროულად წარმოადგენს გარემოს ზედაპირის დაჭიმულობის ზომას. ევკლიდურ E^3 სივრცეში M^2 ზედაპირებისათვის საშუალო სიმრუდე წარმოჩნდება ბელტრამის ფორმულაში:

$$\Delta\vec{v} = -2\vec{H}$$

სადაც $\vec{v}$ არის M^2 ზედაპირის რადიუსვექტორი E^3-ში, Δ — ლაპლასის ოპერატორი, ხოლო $\vec{H}$ წარმოადგენს M^2 ზედაპირის საშუალო სიმრუდეს E^3-ში (Verstraelen, 2007).

ლაპლასის განტოლება	$\Delta v = 0$
პუასონის განტოლება	$\Delta v = f$
ჰემჰოლცის განტოლება	$\Delta v + k^2 v = 0$
შრედინგერის განტოლება	$-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = E\psi$
„ტალღის“ განტოლება	$v_{tt} = a^2\Delta v$
სითბოგამტარობის განტოლება	$v_t = k\Delta v$

გარკვეული აზრით, არა მხოლოდ თავსდება ერთმანეთთან ლამესა და ფურიეს მიდგომები, არამედ აგრეთვე ვითარდება გაბრიელ ლამეს მიერ 1830 წელს დაწყებულ პროგრამა. ლამე უშვებდა, რომ ფიზიკური მოვლენების შესწავლა, მათემატიკური თვალთახედვიდან გამომდინარე, დაიყვანება მოვლენის შესაბამისი მრუდწირული კოორდინატების შესწავლაზე. მათემატიკურ ტერმინებში მრუდწირული კოორდინატები ასახავენ ფიზიკურ მოდელს (Guitart, 2009). ლამეს ნაშრომი მრუდწირული კოორდინატების შესახებ იყო ძალზე მნიშვნელოვანი და მან რეალურად განსაზღვრა მთელი მიმართულება (Struik, 1933); მან განაზოგადა ეილერის მიერ სიბრტყეზე და გაუსის მიერ ზედაპირებზე დამუშავებული მეთოდები; ფიზიკური ამოცანების შესწავლა, რომელიც მორგებულია შესაბამის მრუდწირულ კოორდინატებზე და დაიყვანება დიფერენციალური ინვარიანტების დახასიათებაზე, რაც იმაში გამოიხატება, რომ ლაპლასის ოპერატორი წარმოდგენილ იქნეს შესაბამის მრუდწირულ კოორდინატებში.

იოჰან კარლ ფრიდრიხ გაუსი 1777–1855

ლეონარდ ეილერი 1707 – 1783

ამ შეხედულების თანახმად, მხოლოდ ერთი, სახელდობრ, პუასონის განტოლება საჭიროებს ამოხსნას წარმოდგენილ მრუდწირულ კოორდინატებში, შესაბამის სასაზღვრო პირობებში. სხვა განტოლებებისა და კანონების შესწავლა სპეციალურ შემთხვევებზე დაიყვანება (Guitart, 2009). წარმოდგენილი მეთოდები საშუალებას იძლევა გამოკვლევებისას კოორდინატთა სისტემები მორგებულ იქნეს (ბუნებაში არსებულ) ფორმებზე. ჰილისის წირები და ზედაპირები თავად წარმოადგენენ ბუნებრივ მრუდწირულ კოორდინატებს, რომლებიც „განასახიერებენ“ გაბრიელ ლამეს რაციონალურ და უნიკალურ მეცნიერებას ანუ მათემატიკურ ფიზიკას. ეს რაციონალური მეცნიერება უნიკალურია იმ გაგებით, რომ ***უნივერსალური ნატურალური ზედაპირებისა*** და მორფოგენეზის გეომეტრიული თეორია ვი-

თარდება იმავე სქემით და უზრუნველყოფს სამყაროში არსებული გეომეტრიული ფორმების მრავალფეროვნებას.

გეომეტრიის მიერ დანახული სამყარო

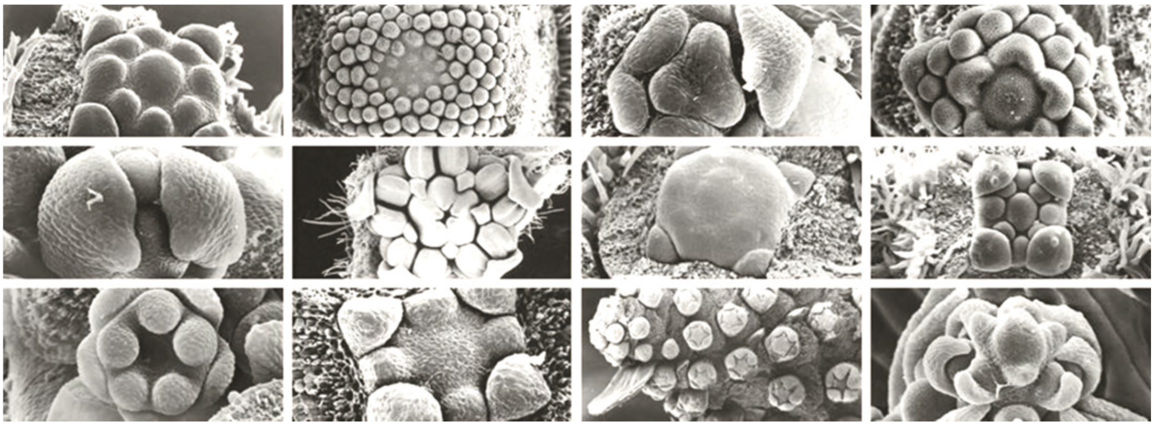
ბუნებაში არსებული ფორმების შესწავლის ამ მიდგომის პირველ მიმართულებაში შესაძლებელია მოიძებნოს განსხვავება დაძაბულობის მოხსნის ორ ურთიერთსაწინააღმდეგო მეთოდს შორის, რომელიც გარემოს ფორმაზე აისახება (Verstraelen, 2008). პირველი სტრატეგია გულისხმობს მივყვეთ დინებას და ამ შემთხვევაში ასოცირებული ფიგურაა წრე. მეორე, აბსოლუტურად საწინააღმდეგო სტრატეგიაა დაძაბულობა (წინააღმდეგობის გაწევა) და, შესაბამისად, ასოცირებული ფიგურაა ლოგარითმული სპირალი (რომელიც დაკავშირებულია ჰარმონიულ, გნომონურ ზრდასთან).

ვუბრუნდებით რა პარამეტრული სახით პოლარულ კოორდინატებში ჩაწერილ ფორმულას, აღმოვაჩენთ, რომ აუცილებელია მხოლოდ ერთი სამართავი პარამეტრის ყოფაქცევის დადგენა, ესაა წრის შემთხვევაში რადიუსი r (= წირის სიმრუდის რადიუსის), ხოლო ლოგარითმული სპირალის შემთხვევაში ესაა პარამეტრი k, რომელიც დაკავშირებულია იმ კუთხის სიდიდესთან, რომელსაც მხები ადგენს რადიუსვექტორთან. ეს აჩვენებს, რომ ამ ორ უკიდურესობას შორის სხვაობა დამოკიდებულია ნეიტრალური ელემენტის არჩევაზე. თუ რომელიმეს ავირჩევთ, როგორც ერთეულოვან ელემენტს, მაშინ ეს რიცხვი უცვლელი იქნება გამრავლების მიმართ, როდესაც მეორის ნეიტრალურ ელემენტად არჩევისას ის ინვარიანტულია გადაადგილებისა და გაწარმოების მიმართ, მაგრამ ორთავე ჰიპერბოლის საშუალებით განისაზღვრება.

$x = r\cos\varphi$	$x = e^{k\varphi}\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$	$y = e^{k\varphi}\sin\varphi$

დასახელებული ორი ძირითადი სტრატეგიის არჩევანი გამომდინარეობს მოტანილი წარმოდგენიდან (Gielis, 2003a, b). წრისა და სპირალის ჰილისის გარდაქმნით, ე.წ. მართვის დამატებითი პარამეტრის ვარირებით, შესაძლოა შეიქმნას მოდელი და აღწერილ იქნეს ბუნებაში არსებული ფორმების ფართო სპექტრი. ლამესა და ჰილისის წირებისა და (ჰიპერ-)ზედაპირების საშუალებით შემოტანილი „ფაქიზი“ ანიზოტროპია აღმოჩნდა „ევკლიდური გეომეტრიისათვის ყველაზე მისაღებ ბუნებრივ წირებად და ზედაპირებად“. წარმოდგენილი უნივერსალური საშუალებით შესაძლოა აღიწეროს ფართო სპექტრი ფორმებისა, რომლებიც საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში გვხვდება: პირველ ყოვლისა, შემოდის „ევკლიდური“ გეომეტრიის ზოგიერთი პრინციპი. მეორე მხრივ, ჰილისის ზოგიერთი გარდაქმნაა ამ გეომეტრიული პრინციპების შედეგი (Verstraelen, 2008). ამგვარი ანიზოტროპიის მქონე ზედაპირები წარმოადგენენ წონასწორულ ზედაპირებს, წონასწორობიდან ძალზე შორს მქონე გარემო პირობებში. ამ კლასის ფიგურებში ჩანს, რომ მათი ძირითადი გეომეტრიული იდეა არის n-მოცულობის (ორივეში ლოკალურისა და გლობალურის) შენარჩუნება; ის აგრეთვე ევკლიდურია (Gielis, 2010a, 2010c).

ნახ. 3. სპირალები და სუპერსპირალები ბუნებაში



ნახ. 4. წრეები და სპირალები ყვავილების კოკრების შემთხვევაში

საინტერესო სანახავია, თუ როგორ ხდება არითმეტიკიის (მიმატება, გამრავლება და საშუალოები) მარტივი წესების გამოყენებით, ხარისხებისა და პარამეტრების ცვლილებით, ბუნებაში არსებული ფორმების აღწერა. ნეპერის რიცხვისათვის ქვემოთ, ცხრილში, მოყვანილია შესაბამისი მაგალითები. თუ ავჯამავთ, შესაბამისად, x^n და y^n გამოსახულებებს, მივიღებთ სუპერწრეებსა და სუპერელიფსებს, კლასიკურ კონუსურ კვეთებსა და ბუნებაში არსებულ ფორმებს (როდესაც განვაზოგადებთ სუპერწირებს), ხოლო, თუ გადავამრავლებთ, ჩვენ მივიღებთ ხარისხოვანი ფუნქციებისა და კანონების მთელ სპექტრს, რომელიც წარმოადგენს სუპერპარაბოლებსა და სუპერჰიპერბოლებს. საფუძველთ საფუძველი კლასიკური კონუსური კვეთებია (Gielis, 2010c).

ფუნქციები e^{φ} და $e^{-\varphi}$	პოლარული სიბრტყე	XY – სიბრტყე
შეკრება და არითმეტიკული საშუალო	ლოგარითმული სპირალი	კატენარი
გამრავლება და გეომეტრიული საშუალო	წრე	წრფე

ბუნებაში არსებული ფორმების შესწავლის ეს მიდგომა გვაბრუნებს გეომეტრიის ძირითადი იდეების, ცნებებისა და აღნიშვნების გადააზრებასთან. როგორც ალბერტ ეინშტეინი წერს: „ჩვენი გამოცდილება ამართლებს ჩვენს მოლოდინს, რომ ბუნებაში ხორციელდება მათემატიკური სიმარტივის იდეალი“.

ბერძნული საწყისი სიტყვებისა *გეომეტრია* და *სიმეტრია* (συμμετρια) არის სიტყვა – μετρεω (გაზომვა, შეფასება, გამოთვლა). ანტიკურ საბერძნეთში სიმეტრიას აქვს აგრეთვე ზმნის (συμμετρεω) მნიშვნელობა: ზომვა, შესაბამისობა, თანაზომადობა (Vlastos, 2005). ამგვარად გაჩნდა საერთო წესი, რომ აღიწეროს ზღვის ვარსკვლავი, სამკუთხედი, ცილინდრები და ყვავილები; ისინი არიან შესაბამისობაში, ქმნიან რა ერთობლივად სამყაროს ანუ კოსმოსს (κοσμος) უფრო მეტად გეომეტრიზებულს და სიმეტრიულს, უფრო მოწესრიგებულს და უფრო ლამაზს.

ლიტერატურა

Beirinckx B., Gielis J. (2004) De Superformule. Wiskunde en Onderwijs. Proceedings of VVWL conference in Oostende, July 1-2, 2004.

Berger M. (2000) Encounter with a geometer. *Notices of the American Mathematical Society*, **47**, Part 1 N°2; Part 2 in N°3.

Caratelli D., Natalini P., Ricci P.E. (2009) Fourier solution of the wave equation for a starlike shaped vibrating membrane. *Computers and Mathematics with Applications* (accepted for publication).

Caratelli D., Gielis J., Natalini P., Ricci P.E., Tavkelidze I. (2010) The Robin problem for the Helmholtz equation in a starlike planar domain (submitted to *Georgian Mathematical Journal*)

Coolidge, J.L. (1952) The Unsatisfactory Story of Curvature. *The American Mathematical Monthly* 59, No. 6, pp. 375-379

D’Arcy Thompson W. (1917) *On Growth and Form*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

Gielis J. (2003a) A generic geometric transformation that unifies a large range of natural and abstract shapes. *American Journal of Botany* 90(3) Invited Special Paper.333-338.

Gielis J. (2003b) *Inventing the Circle*. Geniaal Press, Antwerp.

Gielis J., Haesen S. & Verstraelen L. (2005) Universal shapes: from the supereggs of Piet Hein to the cosmic egg of George Lemaître. *Kragujevac Journal of Mathematics*, Vol 28: 55-67

Gielis J. (2010a) Geometry of nature: a game of n-cubes. In: Lestrel P.E., Iwata (Eds). Proc. First Symposium on Biological Shape Analysis, Japan, June 2-7, 2009, World Scientific, Singapore.

Gielis J., Caratelli D., Haesen S., Ricci P.E. (2010b) Rational mechanics and Science Rationelle Unique. In: Paipetis S., Ceccarelli M. (Eds.) The Genius of Archimedes: A world conference. Springer Verlag, HMMS Series.

Gielis J. (2010c) Universal Natural Shapes. PhD thesis, Radboud University Nijmegen, ISBN 978-90-9025193-6.

Guitart R. (2009) Les coordonnées curvilignes de Gabriel Lamé, réprésentations des situation physiques et nouveau objects mathématiques. *Actes de Colloque International Gabriel Lamé*, 15-17 janvier 2009, Nantes, A paraître à la SABIX.

Koiso M., & Palmer B. (2007) Anisotropic capillary surfaces. In: Dillen F., Simon U., Vrancken L. (Eds). Symposium on the Differential Geometry of Submanifolds, Valenciennes, July 2007:185-196.

Koiso M. & Palmer B. (2008) Equilibria for anisotropic surface energies and the Gielis Formula. *Forma* 28 (1) 1-32.

Lamé G. (1818) *Examen de differentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géometrie*. M. V. Courcier imprimeur Libraire. (New Edition 2008 from Editions Gabay).

Lenjou K., (2005) *Krommen en Oppervlakken van Lamé en Gielis: van de formule van Pythagoras tot de superformule*. Msc. Thesis, University of Louvain, Dept. of Mathematics.

Natalini P., Patrizi R., Ricci P. (2008). The Dirichlet problem for the Laplace equation in a starlike domain of a Riemann surface. *Numer. Algor.* DOI 10.1007/s11075-008-9201-z

Schrödinger E. 1940. The general theory of relativity and wave mechanics. *Wis- en natuurkundig Tijdschrift* X^{e} Deel, 1ste Aflevering, Mei 1940. Nr 34; 2-9.

Struik D.J. (1933) Outline of a history of differential geometry (II). *ISIS* (International Review Devoted to the history of science and civilization) Vol. XX, 161-191.

Thompson A.C. (1996) *Minkowski geometry*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge.

Verstraelen L., (2004) Universal Natural Shapes. *Journal for Mathematics and Informatics of the Serbian Mathematical Society* 40, 13-20.

Verstraelen L. (2007) Philosophiae naturalis Principia Geometrica I. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov Vol* 14(49) Series B, Supplement (Proceedings of International Conference Riemannian Geometry and Applications, Brasov, June 21-25, 2007)

Verstraelen L. (2008) On Natural Geometric Symmetries. Dedicated to the memory of Katsumi Nomizu. Murcia (Spain) Workshop "Differential Geometry and Submanifolds" Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia 18-20 November 2008.

Vlastos G. (2005) *Plato's Universe*. Parmenides Publishing.

არითმეტიკული ფუნქციები

თეიმურაზ ვეფხვაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი; ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

საშუალო სკოლის პედაგოგებისათვის განკუთვნილ სახელმძღვანელოებში მათემატიკური კვლევის ის მეთოდები, რომლებიც სწავლების დროსაც გამოიყენება, ხშირად ე.წ. არითმეტიკული ფუნქციების თვისებების საშუალებით მიმდინარეობს. მაგალითად, ინდუქციის, ანალოგიის, განზოგადებისა და სპეციალიზაციის მეთოდების ახსნა პოიას ცნობილ სახელმძღვანელოში ([1], გვ. 34-44, გვ. 80-90) ნატურალური რიცხვის გამყოფების რაოდენობის, გამყოფების ჯამისა და კვადრატების ჯამად წარმოდგენათა რაოდენობების გამომსახველი ფუნქციების თვისებების განხილვის გამოყენებით ხდება. პედაგოგებისათვის განკუთვნილ საუნივერსიტეტო კურსებშიც არითმეტიკული ფუნქციების შესწავლას და ამ ფუნქციების თვისებების გამოყენებით მოსწავლეთა სხვადასხვა ინტელექტუალური უნარის განვითარებისათვის საჭირო მასალის გადმოცემას, როგორც წესი, სათანადო ადგილი აქვს ხოლმე დათმობილი. არითმეტიკული ფუნქციებისათვის სტანდარტული აღნიშვნებიც კი გამოიყენება.

$\tau(n)$ — n ნატურალური რიცხვის გამყოფების რაოდენობა;

$\sigma(n)$ — n ნატურალური რიცხვის გამყოფების ჯამი;

$\mu(n)$ — მებიუსის ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება ტოლობებით: $\mu(n)=0$, თუ n იყოფა ერთისგან განსხვავებული ნატურალური რიცხვის კვადრატზე; $\mu(n)=(-1)^k$, თუ n არ იყოფა ერთისაგან განსხვავებული ნატურალური რიცხვის კვადრატზე; k არის n-ის მარტივი გამყოფების რაოდენობა;

$\varphi(n)$ — ეილერის ფუნქცია, $\varphi(n)$ არის იმ ნატურალური რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც არ აღემატება n-ს და თანამარტივია n-თან;

$[x]$ — x ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი, რომელიც არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x-ს;

$\{x\}$ — x ნამდვილი რიცხვის წილადი ნაწილი, რომელიც შემდეგი ტოლობით მოიცემა: $\{x\}=x-[x]$;

$\pi(x)$ — იმ მარტივი რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც არ აღემატება x-ს. ეს ფუნქციები და მათთან დაკავშირებული საკითხები, როგორც წესი, რიცხვთა თეორიის საუნივერსიტეტო კურსებში შეისწავლება და შესაბამის სახელმძღვანელოებშია წარმოდგენილი (იხ., მაგ., [2]). მათი ცოდნა დაეხმარება მასწავლებლებს სასწავლო პროცესის წარმართვასა და მოსწავლეების სხვადასხვა ინტელექტუალური უნარების განვითარების განხორციელებაში. ჩვენ კიდევ ერთ არითმეტიკულ ფუნქციას შევეხებით — n ნატურალური რიცხვის ორი კვადრატის ჯამად წარმოდგენათა რაოდენობის აღმნიშვნელ $r_2(n)$ ფუნქციას. $r_2(n)$-ით აღნიშნავენ n ნატურალური რიცხვის ორი მთელი რიცხვის კვადრატების ჯამად წარმოდგენათა რაოდენობას, ანუ $n=x^2+y^2$ განტოლების მთელ ამონახსნთა რიცხვს. შესაბამისად, $r_k(n)$-ით აღნიშნავენ n ნატურალური რიცხვის k მთელი რიცხვის კვადრატის ჯამად წარმოდგენათა რაოდენობას. მაგალითად, $r_4(n)$ არის $n=x^2+y^2+z^2+t^2$ განტოლების მთელ

(x,y,z,t) ოთხეულებში ამონახსნთა რაოდენობა.

ზემოთ ჩამოთვლილი არითმეტიკული ფუნქციებიდან ზოგიერთს ერთი საერთო თვისება აქვს, ისინი ნატურალური n არგუმენტის **მულტიპლიკაციური ფუნციებია.**

f(n) ფუნქციას ეწოდება n არგუმენტის მულტიპლიკაციური ფუნქცია, თუ $f(n) \neq 0$ ერთი მაინც n-სთვის და ნებისმიერი ორი ურთიერთმარტივი n_1 და n_2 რიცხვებისთვის

$$f(n_1 \cdot n_2) = f(n_1) \cdot f(n_2).$$

მაგალითი: $f(n) = n^x$, სადაც x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, n არგუმენტის მულტიპლიკაციური ფუნქციაა.

ზემოთ მოყვანილი განმარტებიდან გამომდინარეობს:

ა) თუ f(n) არის n არგუმენტის მულტიპლიკაციური ფუნქცია, მაშინ:

$$f(1) = 1.$$

მართლაც, თუ n_0 ის ნატურალური რიცხვია, რომლისთვისაც $f(n_0) \neq 0$, მაშინ:

$f(n_0) = f(1 \cdot n_0) = f(1) \cdot f(n_0)$; აქედან $f(1) = 1$.

ბ) თუ $f_1(n)$ და $f_2(n)$ მულტიპლიკაციური ფუნქციებია, მაშინ $f_1(n) \cdot f_2(n)$ ფუნქციაც მულტიპლიკაციურია.

მართლაც, $f_1(1) \cdot f_2(1) = 1$. ამასთანავე, თუ n_1 და n_2 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, მაშინ:

$$f_1(n_1 \cdot n_2) f_2(n_1 \cdot n_2) = f_1(n_1) f_1(n_2) f_2(n_1) f_2(n_2) =$$
$$= \left(f_1(n_1) f_2(n_1)\right) \cdot \left(f_1(n_2) f_2(n_2)\right).$$

გ) ვთქვათ, $f(n)$ მულტიპლიკაციური ფუნქციაა, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ არის n ნატურალური რიცხვის კანონიკური გაშლა; $\sum\limits_{d/n}$ აღნიშნავს ჯამს, რომელიც ვრცელდება n ნატურალური რიცხვის ყველა გამყოფზე, მაშინ:

$$\sum_{d/n} f(d) = \left(1 + f(p_1) + f(p_1^2) + \ldots + f(p_1^{\alpha_1})\right) \times$$
$$\times \left(1 + f(p_2) + f(p_2^2) + \ldots + f(p_2^{\alpha_2})\right) \ldots$$
$$\ldots \left(1 + f(p_k) + f(p_k^2) + \ldots + f(p_k^{\alpha_k})\right)$$

(იმ შემთხვევაში, როცა $n = 1$, მარჯვენა მხარე 1-ის ტოლია).

ამ ტოლობის დასამტკიცებლად, მარჯვენა მხარეში, ფრჩხილებში წარმოდგენილი ჯამები ერთმანეთზე გავამრავლოთ. მივიღებთ ჯამს, რომლის შესაკრებები შემდეგი სახის ნამრავლებია:

$$f(p_1^{\delta_1}) f(p_2^{\delta_2}) \ldots f(p_k^{\delta_k}),$$

სადაც $0 \le \delta_1 \le \alpha_1,\ 0 \le \delta_2 \le \alpha_2,\ \ldots,\ 0 \le \delta_k \le \alpha_k$. ანუ, მულტიპლიკაციურობის თვისების თანახმად, გვექნება შემდეგი შესაკრებები:

$$f(p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_k^{\delta_k}),$$

სადაც $0 \le \delta_1 \le \alpha_1,\ 0 \le \delta_2 \le \alpha_2,\ \ldots,\ 0 \le \delta_k \le \alpha_k$.

$p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_k^{\delta_k}$ კი $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_k$ რიცხვების მითითებული მნიშვნელობებისთვის წარმოადგენს $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} = n$ რიცხვის ნებისმიერ გამყოფს.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, n ნატურალური არგუმენტის ფუნქცია $f(n) = n^x$ (x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია) არის მულტიპლიკაციური ფუნქცია. ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მულტიპლიკაციური ფუნქციის გ) თვისება: თუ $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ არის n ნატურალური რიცხვის კანონიკური წარმოდგენა, $f(n) = n^x$, x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ:

$$\sum_{d/n} d^x = (1 + p_1^x + p_1^{2x} + \ldots + p_1^{\alpha_1 x})(1 + p_2^x + p_2^{2x} + \ldots + p_2^{\alpha_2 x}) \ldots$$
$$\ldots (1 + p_k^x + p_k^{2x} + \ldots + p_k^{\alpha_k x}). \qquad (1)$$

თუ $x = 1$, მაშინ ამ ტოლობის მარცხენა მხარე $\sigma(n)$-ის ტოლია. მაშასადამე,

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) \ \ldots$$
$$\ldots\ (1 + p_k + \ldots + p_k^{\alpha_k}).$$

საიდანაც გვაქვს:

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \ldots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}. \qquad (2)$$

მაგალითი. ვთქვათ, n = 1440, მაშინ:

$$n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ და}$$

$$\sigma(n) = \frac{2^{5+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} = 4914.$$

მაშასადამე, 144-ის გამყოფების ჯამი არის 4914.

თუ (1) ფორმულებში ჩავსვამთ $x = 1$-ს, მარცხენა მხარე $\tau(n)$-ის ტოლი იქნება. მაშასადამე,

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1). \quad (3)$$

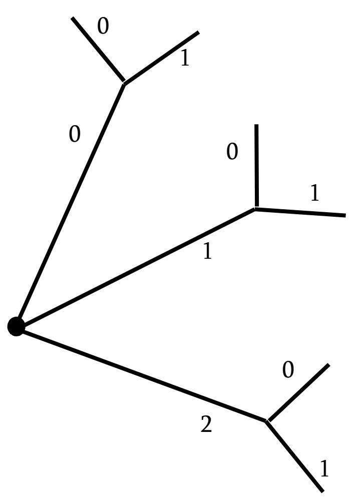
მაგალითი. ვიპოვოთ 360-ის გამყოფების რაოდენობა. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

მაშასადამე,

$$\tau(360) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24.$$

360-ის გამყოფების რაოდენობა არის 24-ის ტოლი. მასწავლებელმა უნდა იცოდეს (2) და (3) ფორმულები და მათი გამოყენება.

სასკოლო სახელმძღვანელოებში და მათემატიკაში საერთო ეროვნულ გამოცდებზე მოსწავლეებს ხშირად სთავაზობენ ამოცანებს ნატურალური რიცხვის გამყოფების ჯამისა და გამყოფების რიცხვის პოვნაზე. კომბინატორული აზროვნების წესის განვითარების მიზნით, კონკრეტულ შემთხვევებში, გამყოფების რიცხვის პოვნა შეიძლება ხისებრი დიაგრამის (დაბალ კლასებში) ან კომბინატორიკის გამრავლების წესის გამოყენებით მოხდეს. მაგალითად, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$-ის ნებისმიერი გამყოფი არის $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ სახის, სადაც $0 \le \alpha \le 3$, $0 \le \beta \le 2$, $0 \le \gamma \le 1$. ანუ α-ს შეუძლია მიიღოს 4 მნიშვნელობა (α-ს შერჩევა შეიძლება 4 სხვადასხვა ხერხით), β-ს — 3, γ-ს — 2. გამრავლების წესის გამოყენებით, α, β, γ სამეულის შერჩევათა რიცხვი იქნება $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. ეს მსჯელობა არის კერძო შემთხვევა ზოგადი შემთხვევისა: — $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ რიცხვის ნებისმიერი გამყოფი არის: $d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} ... p_k^{\delta_k}$, $0 \le \delta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \delta_2 \le \alpha_2$, ..., $0 \le \delta_k \le \alpha_k$. იმდენი გამყოფი გვექნება, რამდენი $(\delta_1, \delta_2 ... \delta_k)$-ს შერჩევაც შეიძლება. δ_1-ის შერჩევათა რიცხვია $\alpha_1 + 1$, δ_2-ის — $\alpha_2 + 1$, ... δ_k-ის — $\alpha_k + 1$. სულ შერჩევათა რიცხვი იქნება $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$.



შეიძლება გამოვიყენოთ ხისებრი დიაგრამა p^2q რიცხვის გამყოფების რაოდენობის საპოვნელად, სადაც p და q მარტივი რიცხვებია. p^2q-ის ნებისმიერი გამყოფი არის $p^\alpha q^\beta$ სახის, სადაც $0 \le \alpha \le 2$, $0 \le \beta \le 1$. ხისებრი დიაგრამა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: პირველი „განშტოება" α-ს მნიშვნელობებს შეესაბამება, მეორე — β-ს მნიშვნელობებს. კარგად ჩანს, რომ გვაქვს სულ 6 გამყოფი, რაც შეესაბამება ფორმულას: $(2+1)(1+1) = 6$.

მებიუსის ფუნქცია ასე განვსაზღვრეთ:
$\mu(n) = 0$, თუ n არ იყოფა მარტივი რიცხვის კვადრატზე,
$= (-1)^k$, თუ $n = p_1, p_2 ... p_k$ (სადაც $p_1, p_2 ... p_k$ განსხვავებული მარტივი რიცხვებია).

მაგალითები: $\mu(1) = 1$, $\mu(9) = 0$, $\mu(6) = 1$, $\mu(10) = 1$, $\mu(7) = -1$, $\mu(8) = 0$, $\mu(12) = 0$.

მებიუსის ფუნქციის თვისებები გამოიყენება ზოგიერთი არითმეტიკული ფუნქციის მულტიპლიკაციურობის დასამტკიცებლად.

თეორემა 1. ვთქვათ, f(n) მულტიპლიკაციური ფუნქციაა, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ არის n ნატურალური რიცხვის კანონიკური გაშლა, მაშინ:

$$\sum_{d/n} \mu(d) f(d) = \left(1 - f(p_1)\right)\left(1 - f(p_2)\right)...\left(1 - f(p_k)\right).$$

(თუ $n = 1$, ვიგულისხმოთ, რომ მარჯვენა მხარე უდრის 1-ს).

დამტკიცება. რადგან μ(n) მულტიპლიკაციური ფუნქციაა და, პირობის თანახმად, f(n) ფუნქციაც მულტიპლიკაციურია, მულტიპლიკაციური იქნება f(n)μ(n) ფუნქციაც. ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ გ) თვისება. ამასთანავე, იმის გათვალისწინებით, რომ $\mu(p) f(p) = -f(p)$, $\mu(p^s) f(p^s) = 0$, როცა $s > 1$, მიიღება დასამტკიცებელი ფორმულა.

შედეგი 1. თუ $f(n) = 1$, მაშინ თეორემა 1-ის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } n > 1, \\ 1, & \text{თუ } n = 1. \end{cases}$$

შედეგი 2. $f(n)=\frac{1}{n}$ ჩასმით მიიღება ფორმულა:

$$\sum_{d/n}\frac{\mu(d)}{d}=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right), & \text{თუ } n>1,\\ 1, & \text{თუ } n=1.\end{cases}$$

ეილერის φ(n) ფუნქცია. φ(n) არის იმ ნატურალური რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც არ აღემატება n-ს და თანამარტივია n-თან.

მაგალითები: $\varphi(1)=1$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=2$, $\varphi(5)=4$, $\varphi(6)=2$.

თეორემა 2. ვთქვათ, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ არის n ნატურალური რიცხვის კანონიკური გაშლა, მაშინ:

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right),$$

ანუ:

$$\varphi(n)=(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1})...(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_{k-1}});$$

კერძოდ,

$$\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}-p^{\alpha-1},\ \varphi(p)=p-1.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ რიცხვები: $\delta_1=\text{უსგ}(1,n)$, $\delta_2=\text{უსგ}(2,n)$,..., $\delta_n=\text{უსგ}(n,n)$. ცხადია, ამ რიცხვებიდან φ(n) რაოდენობის რიცხვი არის 1-ის ტოლი. ამიტომ, თეორემა 1-ის შედეგი, 1-ის თანახმად:

$$\varphi(n)=\sum_{d|\delta_1}\mu(d)+\sum_{d|\delta_2}\mu(d)+...+\sum_{d|\delta_n}\mu(d).$$

ყოველი d რიცხვისთვის, რომელიც n-ის გამყოფია, ტოლობის მარჯვენა მხარეში შესაბამისი $\mu(d)$ რიცხვების რაოდენობა, ცხადია, არის $\frac{n}{d}$, ამიტომ ეს ჯამი შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}.$$

აქედან, თეორემა 1-ის შედეგი, 2-ის თანახმად:

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

მაგალითები.

$$\varphi(60)=60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=16.$$

$$\varphi(81)=\varphi(3^4)=3^4-3^3=54.$$

$$\varphi(5)=5-1=4.$$

ფორმულებიდან, რომლებიც φ(n) ფუნქციისთვის მივიღეთ, ჩანს, რომ ეს ფუნქცია მულტიპლიკაციურია. სასწავლო ლიტერატურაში განიხილება φ(n)-ის ფორმულის მიღების მეორე გზაც: ნაშთთა არითმეტიკის თეორემების გამოყენებით (მებიუსის ფუნქციის თვისებების განხილვის გარეშე) მტკიცდება φ(n) ფუნქციის მულტიპლიკაციურობა. მულტიპლიკაციურობის თვისებიდან კი გამომდინარეობს თეორემა 2-ში დამტკიცებული ფორმულები.

***x* ნამდვილი რიცხვის მთელი და წილადი ნაწილი.** ფუნქციები, რომლებიც მოიცემა $y=[x]$ და $y=\{x\}$ ფორმულებით, საშუალო სკოლის სახელმძღვანელოებშიც განიხილება. მაგალითად, პერიოდული ფუნქციების შესწავლისას ვიხილავთ $y=\{x\}$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას, რომელიც არის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისგან განსხვავებული პერიოდული ფუნქციის მაგალითი. ნებისმიერი მთელი რიცხვი ამ ფუნქციის პერიოდია, უმცირესი დადებითი პერიოდი არის 1. [*x*] ნაწილი კი შეიძლება გამოვიყენოთ მოცემული p მარტივი რიცხვის ხარისხის მაჩვენებლის გამოსასახავად, რომლითაც ეს მარტივი რიცხვი n!-ის კანონიკურ გაშლაში შედის.

თეორემა 3. ხარისხის მაჩვენებელი, რომლითაც მოცემული მარტივი რიცხვი p შედის n!-ის კანონიკურ გაშლაში, ტოლია ჯამის:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+...$$

(გარკვეული ადგილიდან დაწყებული შესაკრებები ნულის ტოლია).

დამტკიცება. n!-ის იმ მამრავლების რაოდენობა, რომლებიც p-ს ჯერადია, ცხადია, არის $\left[\frac{n}{p}\right]$. მათგან $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ p^2-ის ჯერადიცაა, ხოლო ამ თანამამრავლებიდან $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ არის p^3-ის ჯერადი და ა.შ. მითითებული რიცხვების ჯამი არის მაჩვენებელი, რომლითაც p რიცხ-

ვი შედის n!-ის კანონიკურ გაშლაში, რადგან n!-ის ყოველი თანამამრავლი, რომელიც იყოფა p^m-ზე და არ იყოფა p^{m+1}-ზე, აითვლება ზუსტად m-ჯერ, როგორც p-ს, p^2-ის, p^3-ის ... p^m-ის ჯერადი.

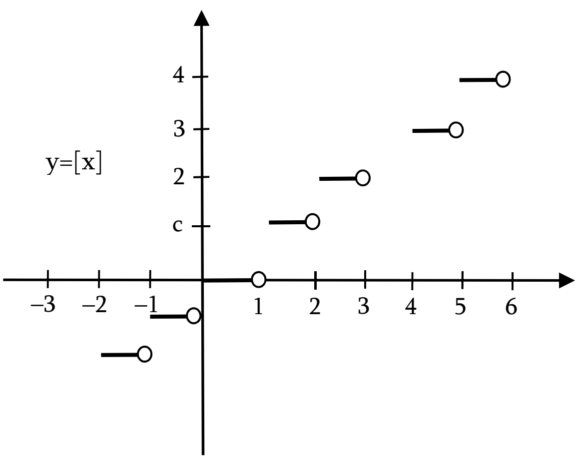
მაგალითი. ვიპოვოთ ხარისხის მაჩვენებელი, რომლითაც მარტივი რიცხვი 3 შედის 40!-ის კანონიკურ გაშლაში. დატკიცებული ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$\left[\frac{40}{3}\right]+\left[\frac{40}{9}\right]+\left[\frac{40}{17}\right]=13+4+1=18.$$

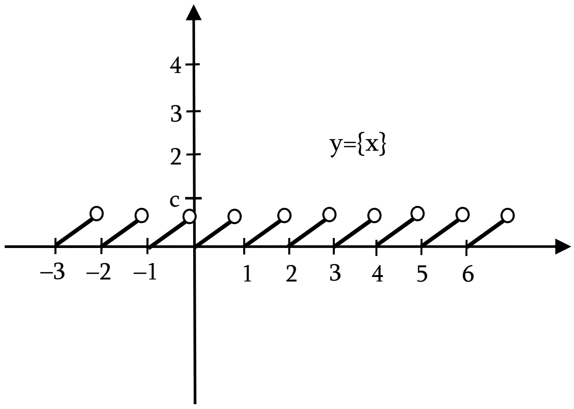
[*x*] და {*x*} ფუნქციების თვისებების განხილვის საფუძველზე წარმოვადგენთ მათ გრაფიკებს:

1. თუ m მთელია და $m \le x < m+1$, მაშინ $[x]=m$, ანუ $[x]\le x<[x]+1$. ამიტომ $y=[x]$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე, რომელიც სურათ 1-ზეა წარმოდგენილი.
2. $\{x\}=x-[x]$, მაშასადამე, $0\le\{x\}<1$. $y=\{x\}$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია სურათ 2-ზე.

π(x) ფუნქცია. მარტივ რიცხვთა რაოდენობა, რომლებიც არ აღემატება x-ს, აღინიშნება π(x)-ით. ევკლიდეს თეორემიდან მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობის შესახებ გამომდინარეობს: $\pi(x)\to\infty$, როცა $x\to\infty$. მათემატიკის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან დებულებად ითვლება ადამარისა და ვალე-პუსენის მიერ 1896 წელს დამტკიცებული თეორემა:



სურ. 1



სურ. 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1.$$

ამ ფუნქციისგან განსხვავებით, ნატურალური არგუმენტის τ(n) ფუნქციის ყოფაქცევა „ქაოსურია“: ყოველი მარტივი p რიცხვისათვის $\tau(p)=2$, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე კი უსასრულოა, ამიტომ n-ს ზრდასთან ერთად ამ ფუნქციის მნიშვნელობებს შორის გვექნება რიცხვი 2; მეორე მხრივ, ცხადია, ზოგიერთი n-ისთვის, τ(n)-ის მნიშვნელობა შეიძლება იყოს „რაგინდ დიდი“. ამას რომ მივაღწიოთ, საკმარისია ავიღოთ რიცხვი, რომლის კანონიკურ გაშლაში $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_k$ ხარისხის მაჩვენებლები „რაგინდ დიდი“ რიცხვებია. ამიტომ იხილავენ ამ ფუნქციის „საშუალო მნიშვნელობას“; იხილავენ პირველი n ნატურალური რიცხვის გამყოფების რაოდენობის საშუალოს:

$$\overline{\tau(n)}=\frac{1}{n}\left(\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)\right).$$

აღმოჩნდა, რომ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\tau(n)}}{\ln n}=1.$$

ამ ფორმულასთან დაკავშირებული საკითხები გადმოცემულია ბ. კოტლიარის სტატიაში [3].

საინტერესო ისტორია აქვს $r_2(n)$ ფუნქციას. ჯერ კიდევ ფერმამ 1640 წელს გამოთქვა ვარაუდი. იმისათვის, რომ მარტივი რიცხვი ორი მთელი რიცხვის კვადრატების ჯამად წარმოვადგინოთ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს მარტივი რიცხვი 4-ზე გაყოფისას ნაშთში 1-ს იძლეოდეს. ამასთანავე, მან მხოლოდ მიუთითა, რომ აღმოაჩინა — „უსასრულოდ

დაშვების მეთოდი“, რომელიც საშუალებას იძლევა, $4k+1$ ტიპის მარტივი რიცხვის შემთხვევაში, თეორემის მცდარობიდან დავასკვნათ, რომ თეორემა მცდარია უფრო ნაკლები ამავე სახის რიცხვისთვის და ა.შ., სანამ არ „მივალთ“ 5-მდე, 5-სთვის კი თეორემა ჭეშმარიტია. ამ მეთოდის განხილვა ცალკე სტატიის თემაა, იგი ხშირად გამოიყენება მათემატიკურ ოლიმპიადებზე შეთავაზებული ამოცანების ამოხსნისას. აღნიშნული თეორემა 1742 წელს დაამტკიცა (იმავე მეთოდით) ლეონარდ ეილერმა. $r_2(n)$ ფუნქციისთვის კი მიღებულია შემდეგი ფორმულა:

$$r_2(n)=4\sum_{\substack{d|n \\ d\ \text{კენტია}}}(-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

სადაც აჯამვა ხდება n-ის ყველა კენტ d გამყოფზე.

მაგალითად, თუ $n=p$, p არის $4k+1$ ტიპის, მაშინ ეს n რიცხვი 8 სხვადასხვა სახით წარმოიდგინება ორი კვადრატის ჯამის სახით.

$r_4(n)$ ფუნქციის შემთხვევაში (n ნატურალური რიცხვის 4 მთელი რიცხვის კვადრატების ჯამად წარმოდგენა) კლასიკური შედეგი ეკუთვნის ლაგრანჟს: ყოველი ნატურალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ 4 მთელი რიცხვის კვადრატებს ჯამის სახით, ანუ $r_4(n)\geq 1$. $r_4(n)$-ისთვის კი ცნობილია იაკობის ფორმულა, რომლითაც ეს ფუნქცია დაკავშირებულია $\sigma(n)$ ფუნქციასთან:

$$r_4(n)=8\sigma(n)-32\sigma\left(\frac{n}{4}\right),$$

სადაც მეორე შესაკრები ნულის ტოლად აიღება, როცა n არ იყოფა 4-ზე. მაგალითად, p მარტივი რიცხვისთვის გვაქვს: $r_4(p)=8(p+1)$.

ლიტერატურა

1. G. Polya. Mathematics and Plausible reasoning. New Jersey, 1954.
2. A. Beker. A concise introduction to the theorys of numbers. Camridge University Press, 1990.
3. http:/ kvant.mceme.ru/1994/04//skolko u chisla deleteley.thn

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებისას დაშვებული ზოგიერთი შეცდომის ანალიზი

შალვა კირთაძე

ასოცირებული პროფესორი,
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის რექტორის მოადგილე

მანანა დეისაძე

ასოცირებული პროფესორი, აკაკი წერეთლის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის პედაგოგიური
ფაკულტეტის დეკანის მოადგილე

მათემატიკური ცნებები ხანგრძლივი ისტორიული განვითარების გზით ყალიბდება; წარმოიქმნება ცნებათა დაზუსტების აუცილებლობა, მათ შორის ლოგიკური კავშირების დადგენა. ამ პროცესის შედეგად ხდება ცნების ზუსტი გამოკვეთა, მისი ნიშნების კლასიფიკაცია; ცნებათა ერთმანეთთან დამოკიდებულებების გარკვევა. ყოველივე ეს ქმნის თეორიის აქსიომატური აგების წარმოშობის საფუძველს.

იმისათვის, რომ თავი დააღწიონ თვალსაჩინო წარმოდგენების გავლენას, მათემატიკური თეორიის აქსიომატური აგებისას შემდეგნაირად იქცევიან:

1) ირჩევენ ზოგ ცნებას განსაზღვრების გარეშე (მაგალითად, გეომეტრიაში — წერტილები, წრფეები და სიბრტყეები; არითმეტიკის აგებისას — ნატურალური რიცხვები) და არ უსვამენ ხაზს იმას, თუ სინამდვილეში რას წარმოადგენენ ისინი;

2) უთითებენ მათ შორის რაიმე მიმართებაზე განსაზღვრების გარეშე (მაგალითად, გეომეტრიაში — „მდებარეობს“, „შორის“, „კონგრუენტული“, არითმეტიკაში — „მომდევნოა“);

3) აყალიბებენ გარკვეული რაოდენობის წინადადებებს, რომლებიც მიიღება დაუმტკიცებლად, უწოდებენ მათ აქსიომებს. ისინი აღწერენ შემოღებული ცნებების თვისებებს, აგრეთვე მათ შორის მიმართებებს;

4) ამის შემდეგ ყველა ახალი ცნება უნდა იყოს განსაზღვრული ამ შერჩეული საწყისი ცნებებისა და შემოღებული მიმართებების საფუძველზე, ხოლო ყველა დებულება უნდა იყოს გამოყვანილი აქსიომებიდან ლოგიკური დასაბუთების საშუალებით, თვალსაჩინოების გარეშე.

აქსიომატური მეთოდის მაგალითები არის შემოთავაზებული იტალიელი მათემატიკოსის, ჯუზეპე პეანოსა და გერმანელი მათემატიკოსის, დავიდ ჰილბერტის მიერ არითმეტიკაში და გეომეტრიაში. როგორც ნ. ბურბაკის ისტორიულ მიმოხილვაშია აღნიშნული, „თავისი გადმოცემის სიღრმით ჰილბერტის წიგნი მაშინვე იქცა თანამედროვე აქსიომატიკის თავისებურ ქარტიად. მოიყვანა რა, აქსიომათა სრული სისტემა ევკლიდეს გეომეტრიის დასაფუძნებლად, ჰილბერტი ამაზე არ შეჩერებულა. მან დაალაგა გეომეტრიის აქსიომები სხვადასხვა ბუნების რამდენიმე ჯგუფად, განსაზღვრა თითოეული ამ ჯგუფის ზუსტი სიძლიერე და არა მარტო განიხილა ლოგიკური შედეგი თითოეულისა ცალ-ცალკე, არამედ მიიღო ცალკეული „გეომეტრიები" ამ აქსიომათა მოდიფიკაციის და რომელიმე მათგანის უკუგდების შედეგად (გეომეტრიები, სადაც ლობაჩევსკისა და რიმანის გეომეტრიები წარმოადგენენ მხოლოდ კერძო შემთხვევებს).." [1].

აქსიომატური მეთოდის ძალა იმაში მდგომარეობს, რომ ის საშუალებას იძლევა მცირე რაოდენობის დაშვებებიდან გამომდინარე აიგოს მთლიანი თეორია. თუ რაიმე აკმაყოფილებს დაშვებებს (აქსიომებს), მაშინ ის დააკმაყოფილებს ყველა შედეგსაც, რომელიც მათგან მიიღება, და, რაც მთავარია, ერთი და იგივე აქსიომატური თეორია შეიძლება გამოყენებული იყოს სხვადასხვა სიტუაციისათვის, რაც განსაკუთრებულ შემოქმედებით ეკონომიას იძლევა.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ნატურალურ რიცხვთა არითმეტიკის აგება აქსიომატური მიდგომით, რომელიც დაკავშირებულია ჯუზეპე პეანოს სახელთან.

პეანომ გამოიყენა აქსიომატური მეთოდი და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე განიხილა, როგორც სტრუქტურა. კერძოდ, სტრუქტურა $\Re=(N,1,F)$, რომელიც შედგება:

1) N სიმრავლისაგან, რომლის ელემენტებსაც ნატურალური რიცხვები ეწოდება;

2) ამ სიმრავლეში გამოყოფილია ელემენტი, რომელსაც „ერთი" (1) ეწოდება;

3) N სიმრავლეზე განსაზღვრული მიმართებისგან $F(x,y)$, რომელიც ასე იკითხება: „x-ის მომდევნოა y".

მიმართება $F(x,y)$ ექვემდებარება შემდეგ მოთხოვნებს (აქსიომებს):

I. ერთი არ არის არცერთი სხვა ნატურალური რიცხვის მომდევნო;

II. ყოველი ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი, უშუალოდ მისი მომდევნო ნატურალური რიცხვი;

III. ყოველი ნატურალური რიცხვი, რომელიც განსხვავებულია ერთიანისაგან, უშუალოდ მომდევნოა ერთი და მხოლოდ ერთი ნატურალური რიცხვისა;

IV. (ინდუქციის აქსიომა) N სიმრავლის M ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს ელემენტ 1-ს და x ელემენტთან ერთად ყოველთვის შეიცავს x-ის მომდევნო y ელემენტსაც, ემთხვევა მთელ N სიმრავლეს.

აქსიომები I-IV ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია.

მეოთხე აქსიომიდან უშუალოდ გამომდინარეობს მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი, რომელიც არის მათემატიკურ დებულებათა დამტკიცების ერთ-ერთი მეთოდი.

ჩამოვაყალიბოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი. იგი ორი ნაწილისაგან შედგება:

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე $A(n)$ დებულება n ნატურალურ რიცხვზე დამოკიდებული და ამასთანავე:

1) ვაჩვენეთ, რომ $A(n)$ დებულება სამართლიანია, როცა $n=1$, ე.ი. $A(1)$ დებულება სამართლიანია;

2) იმ დაშვებით, რომ $A(n)$ დებულება სამართლიანია $n=k$-სათვის, ე.ი. $A(k)$ დებულება ჭეშმარიტია, ვაჩვენეთ, რომ $n=k+1$-თვისაც (k-ს მომდევნო რიცხვისთვის) $A(n)$ დებულება ჭეშმარიტია, ე.ი. $A(k+1)$ ჭეშმარიტია; მაშინ $A(n)$ ჭეშმარიტია $\forall n\in N$ ნატურალური რიცხვისათვის.

მაგალითი 1. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით ვაჩვენოთ, რომ:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

1) ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია $A(1)$ დებულება, ე.ი. მოცემული დებულება სამართლიანია $n=1$-სათვის. მართლაც,

$$\frac{1(1+1)}{2}=1$$

2) დავუშვათ, რომ ეს დებულება სამართლიანია $n=k$ -სათვის. მაშასადამე, გვექნება პირველი k ნატურალური რიცხვის ჯამისთვის:

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

და ამ დაშვებიდან გამომდინარე ვაჩვენოთ, რომ მოცემული დებულება სამართლიანია $n=k+1$ -სათვის, ე.ი. პირველი $(k+1)$ ნატურალური რიცხვის ჯამისთვის გვექნება:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ამოვწეროთ მარცხენა მხარე და ვისარგებლოთ ჩვენი დაშვებით:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ე.ი. მივიღეთ ის, რისი დასაბუთებაც გვინდოდა.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი მეთოდია, რომლის საშუალებითაც არაერთი საინტერესო დებულების დამტკიცებაა შესაძლებელი.

განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დებულების დამტკიცებისას მოსალოდნელი შეცდომების თავიდან აცილებას. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საკითხია დაწყებითი განათლების სტუდენტთათვისაც. მოვიყვანოთ მაგალითი, რომლის ამოხსნისას სტუდენტის მიერ დაშვებულ შეცდომებზე გავამახვილებთ ყურადღებას: რისი ტოლია $1+2+3+\cdots+(n-1)$ ჯამი? ისარგებლა რა ზემოთ მოცემული დებულებით, სტუდენტმა მსჯელობა წარმართა ასე: მოცემული ჯამი ტოლია პირველ წევრს, 1-ს, დამატებული ბოლო წევრი, (n-1), შეფარდებული 2-თან და გამრავლებული (n-1)-ზე. შესაბამისად, დაწერა:

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=$$
$$=\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}\ .$$

ამის შემდეგ შეეცადა, ეჩვენებინა ამ დებულების სამართლიანობა მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით. პირველ რიგში, დებულების სამართლიანობა განიხილა $n=1$ -ისთვის, ე. ი. A(1) დებულების ჭეშმარიტება, რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ პირველი ერთი ნატურალური რიცხვის ჯამი არის 1 და იგი ტოლი უნდა იყოს:

$$1=\frac{1(1-1)}{2},$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ 1=0-ს, რაც არაა სამართლიანი.

სტუდენტმა, განიხილა რა იმავე ტიპის მაგალითი: $1+2+3+\cdots+(n-5)$, ჯამის საპოვნელად დაწერა: $1+2+3+\cdots+(n-5)=$

$$=\frac{1+(n-5)}{2}\cdot(n-5)=\frac{(n-4)(n-5)}{2}$$

დაიწყო რა იგივე მსჯელობა, რომ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით ეჩვენებინა ამ დებულების სამართლიანობა, განიხილა n=1-ისთვის და მიიღო: $1=\frac{(1-4)(1-5)}{2}=6$, რაც კვლავ არასწორია. მაშ, სად უშვებს შეცდომას სტუდენტი? მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული დებულება და ვცდილობთ მის დამტკიცებას. ზემოთ აღნიშნულ შემთხვევებში ტოლობები განსაზღვრულია მაშინ, როცა $n\geq 2$ (პირველ შემთხვევაში), $n\geq 6$ (მეორე შემთხვევაში). ამ შემთხვევაში სტუდენტს უნდა გამოეყენებინა მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის განზოგადება, რომელიც გადმოცემული იყო ადრე მოქმედ სასკოლო სახელმძღვანელოშიც ([2], გვ.41). ეს პრინციპი ეხება იმ დებულებებს, რომლებიც განსაზღვრულია რაიმე მთელი m რიცხვიდან დაწყებული (და არა აუცილებლად $n=1$-დან დაწყებული) ყოველი მთელი n-ისთვის. ჩამოვაყალიბოთ იგი: ვთქვათ, დებულება დამოკიდებულია რაიმე n ცვლადზე (n მთელ მნიშვნელობებს იღებს). თუ ეს დებულება ჭეშმარიტია, როცა $n=m$ და ამ დებულების ჭეშმარიტებიდან $n=k$ რიცხვისთვის ($k\geq m$), გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტება $n=k+1$ რიცხვისთვისაც, მაშინ

დებულება ჭეშმარიტია m-ზე მეტი ან ტოლი ყოველი მთელი n-ისთვის.

მაგალითად, დავასაბუთოთ, რომ, როცა $n \geq 5$, მაშინ $2^n > n^2$.

დასაბუთების პირველი ფაზა: შემოწმდეს უტოლობა, როცა $n = 5$.

დასაბუთების მეორე ფაზა: როცა $n \geq 5$, $2^k > k^2$ უტოლობის ჭეშმარიტებიდან მივიღოთ $2^{k+1} > (k+1)^2$ უტოლობის ჭეშმარიტება.

კიდევ ერთი მაგალითი: დავასაბუთოთ, რომ $2^n > n$ უტოლობა ჭეშმარიტია, როცა $n \geq 0$, $n \in Z$. გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის განზოგადება:

ვთქვათ, $n = 0$, მაშინ $2^n > n$ (1>0) უტოლობა ჭეშმარიტია.

ვთქვათ, $k \geq 0$ და $2^k > k$, ვაჩვენოთ: $2^{k+1} > k + 1$.

თუ $k = 0$, მაშინ გვაქვს $2 > 1$;

თუ $k \geq 1$, მაშინ $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > 2k = k + k \geq k + 1$;

მაშასადამე, $2^{k+1} > k + 1$.

მნიშვნელოვანია სტუდენტებმა და მოსწავლეებმა შეძლონ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებისას შესაბამისი ფორმის შერჩევა და მისი გამოყენება.

ამჟამად მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის განზოგადება ამოღებულია აღნიშნული სახელმძღვანელოს მომდევნო გამოცემაში, რაც მიგვაჩნია არასწორად, რადგან მეტად მნიშვნელოვანია ამ საკითხების საფუძვლიანი შესწავლა. არსებობს მათემატიკური ინდუქციის სხვა ფორმებიც, რომელთა შესწავლაც სასარგებლოა.

ლიტერატურა

[1] მ. დეისაძე — ნატურალურ რიცხვთა სტრუქტურა მათემატიკის სასკოლო კურსში, ქუთაისის გ. ტაბიძის სახ. ს.ს. „სტამბის“ საგამომცემლო ცენტრი, 1999, გვ. 22-23.

[2] გ.გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ.ქურჩიშვილი — მათემატიკა 11, გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2007.

[3] Thomas Sonnabend-Mathematics for elementary Teachers, Copyright 1993 by Saunders College Publishing. p.119.

ავტორების ელექტრონული მისამართები: manana.deisadze@atsu.edu.ge
shalva.kirtadze@atsu.edu.ge

შექცეული ფუნქცია

რუსუდან მესხია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ-პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

განვიხილავთ მათემატიკის სასკოლო კურსის მიხედვით შექცეული ფუნქციის სწავლებასთან დაკავშირებულ მოსაზრებებს. შექცეული ფუნქციის შესწავლის აუცილებლობა უკავშირდება მაჩვენებლიანი და უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის საკითხს, ამიტომ ამ თემების განხილვისას უნდა ისწავლებოდეს შექცეული ფუნქციის განსაზღვრება და თვისებები; ასევე სასურველია, ძირითადი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შექცეული ფუნქციების განსაზღვრება, თვისებები და გრაფიკები სასკოლო კურსში განიხილებოდეს.

შექცეული ფუნქციის პოვნა დაკავშირებულია ფუნქციის განსაზღვრის არის, მნიშვნელობათა სიმრავლის, მონოტონურობის შუალედების დადგენასთან. ამდენად, ვფიქრობთ, ქვემოთ მოყვანილი მაგალითები მოსწავლეებს განუვითარებს ანალიზის უნარს, მასწავლებლებს კი დაეხმარება შექცეული ფუნქციის სწავლებისას მნიშვნელოვან საკითხებზე ყურადღების გამახვილებაში.

გავიხსენოთ შექცეული ასახვის განსაზღვრება მათემატიკის XII კლასის სახელმძღვანელოს მიხედვით ([1, გვ. 36-38]).

ვთქვათ, X და Y მოცემული სიმრავლეებია და X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი $y=f(x)$ ელემენტი Y სიმრავლიდან; მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია X სიმრავლის ასახვა Y სიმრავლეში და წერენ: $f: X \to Y$. X სიმრავლეს f ასახვის **განსაზღვრის არე** ეწოდება, ხოლო

$$f(X)=\{y|\ y=f(x),\ x\in X\}$$

სიმრავლეს კი — f-ის **მნიშვნელობათა სიმრავლე** ანუ X-ის სახე.

თუ $f(X)=Y$, მაშინ ამბობენ, რომ f ასახავს X სიმრავლეს Y სიმრავლეზე და f ასახვას **სიურექცია** ანუ **„ზე" ასახვა** ეწოდება.

ვთქვათ, $f: X \to Y$ ასახვა ისეთია, რომ ნებისმიერი $x_1 \neq x_2$ ელემენტებისთვის X სიმრავლიდან $f(x_1) \neq f(x_2)$. ასეთ f ასახვას **შექცევადი ასახვა** ეწოდება X სიმრავლისა Y სიმრავლეში, ანუ **ინექცია**.

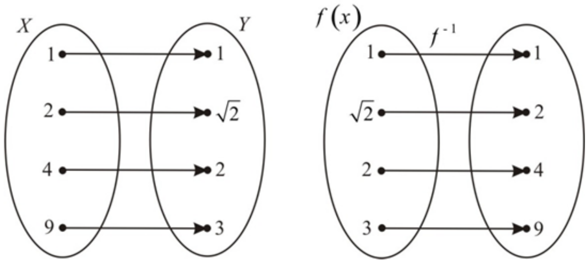
ვთქვათ, $f: X \to Y$ ასახვა არის შექცევადი ასახვა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში, მაშინ შეგვიძლია განვიხილოთ f^{-1} ასახვა, რომელიც $f(X)$ სიმრავლის ყოველ y ელემენტს შეუსაბამებს იმ ერთადერთ x ელემენტს X სიმრავლიდან, რომლისთვისაც $f(x)=y$; ასე განსაზღვრულ $f^{-1}: f(X) \to X$ ასახვას ეწოდება f ასახვის **შექცეული ასახვა**. f^{-1} ასახვის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$f^{-1}(f(x))=x,\quad x\in X,$$
$$f^{-1}(f(X))=X$$

და $f^{-1}: f(X) \to X$ ასახვა აგრეთვე შექცევადია, ანუ, თუ $y_1 \neq y_2$, მაშინ $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$, რასაც ადვილად დავასაბუთებთ საწინააღმდეგოს დაშვებით.

თუ $f:X\to Y$ ასახვა შექცევადია და $f(X)=Y$, მაშინ f ასახვას **ბიექცია** ანუ **ურთიერთცალსახა ასახვა** ეწოდება X სიმრავლისა Y სიმრავლეზე.

განვიხილოთ სიმრავლეები $X=\{1;2;4;9\}$ და $Y=\{1;\sqrt{2};2;3;4\}$. მაშინ $f(x)=\sqrt{x}$ ფორმულით განსაზღვრული ასახვა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში იქნება შექცევადი ასახვა (ინექცია). ცხადია, $f(X)=\lfloor 1;\sqrt{2};2;3 \rfloor \neq Y$, ე. ი. f არ არის სიურექცია. შეგვიძლია განვიხილოთ შექცეული ასახვა $f^{-1}:f(X)\to X$ (იხ. ნახ. 1).



ნახ. 1

ვთქვათ, X სიმრავლე სასრულია და $f:X\to Y$ ასახვა ბიექციაა, მაშინ, ცხადია, X და Y სიმრავლეებში ელემენტთა რაოდენობა ერთი და იგივეა.

ვთქვათ, $f:X\to X$ ასახვა არის სიურექცია და X სასრული სიმრავლეა, მაშინ f იქნება შექცევადი ასახვა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, f არ არის შექცევადი ასახვა, მაშინ იარსებებს ისეთი $x_1\neq x_2$ ელემენტები X სიმრავლიდან, რომ $f(x_1)=f(x_2)$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება:

$$n(f(X))\le n(X)-1,$$

სადაც $n(X)$ აღნიშნავს X სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას. პირობის თანახმად, f სიურექციაა, ამიტომ $f(X)=X$, ამრიგად, $n(X)\le n(X)-1$, მივიღეთ მცდარი უტოლობა, ე. ი. დაშვება არასამართლიანია და f ასახვა შექცევადია. მაგრამ, თუ X არ არის სასრული სიმრავლე და $f:X\to X$ სიურექციაა, მაშინ f შეიძლება არ იყოს შექცევადი ასახვა. მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ, $\mathbb{N}$ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა. f ასახვა განვსაზღვროთ ასე:

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n=2k,\\[2mm] \dfrac{n+1}{2}, & n=2k-1,\quad k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

ცხადია, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ არის სიურექცია, ანუ $\mathbb{N}$ სიმრავლის თავის თავზე ასახვა. მაგრამ f არ არის შექცევადი ასახვა, ამისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $f(4)=f(3)=2$.

ვთქვათ, X და Y სასრული სიმრავლეებია: $X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ და $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$. $n(X)=m$, $n(Y)=n$. ვთქვათ, $f:X\to Y$ ასახვა ინექციაა, მაშინ $n\ge m$. წინააღმდეგ შემთხვევაში f შესაბამისობა არ იქნებოდა ინექცია. დავუშვათ, $n>m$. ცხადია, f ასახვა არ არის ბიექცია. განვიხილოთ ყველა შესაძლო შექცევადი (ინექციური) ასახვა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში. X სიმრავლის x_1 ელემენტისთვის შესაბამისი ელემენტის შერჩევის n ვარიანტი არსებობს Y სიმრავლიდან, x_2 ელემენტისთვის კი შესაბამისი ელემენტი $n-1$ ვარიანტით შეირჩევა და ასე შემდეგ, x_k ელემენტისათვის შესაბამისი ელემენტი Y სიმრავლიდან შეიძლება შეირჩეს $n-(k-1)$ ვარიანტით. ამრიგად, X სიმრავლის Y სიმრავლეში ინექციური ასახვების საერთო რაოდენობა ტოლი იქნება:

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)=A_n^m,$$

სადაც A_n^m აღნიშნავს n-ელემენტიანი სიმრავლის m-ელემენტიან წყობათა რაოდენობას.

როცა $n=m$, მაშინ $f:X\to Y$ ინექცია იქნება ბიექცია და X-ზე განსაზღვრული ბიექციური ასახვების რაოდენობა ტოლი იქნება $A_n^n=n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$

თუ განვიხილავთ $f:X\to X$ ბიექციურ ასახვებს, მაშინ ყველა შესაძლო ბიექციური ასახვის რაოდენობა X-დან X-ზე არის იგივე n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რაოდენობის ტოლი.

ვთქვათ, X და Y რიცხვითი სიმრავლეებია, მაშინ $f:X\to Y$ ასახვას X სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია ეწოდება. f ფუნქციის განსაზღვრის არე აღინიშნება $D(f)$-ით, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე კი $E(f)$-ით. ამრიგად, $D(f)=X$ და $E(f)=f(X)$.

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია X სიმრავლეზე და $f:X\to E(f)$ ასახვა ბიექციაა, მაშინ არსებობს f-ის შექცეული $f^{-1}:E(f)\to X$ ასახვა, ანუ ყოველ $y\in E(f)$ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი $x=f^{-1}(y)\in X$ რიცხვი, იმ პირობით, რომ $f(x)=y$. ასე განსაზღვრულ $x=f^{-1}(y)$ ფუნქციას ეწოდება f ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. რადგან, საერთოდ, მიღებულია, რომ ფუნქციის არგუმენტი აღინიშნოს x-ით, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობა y-ით, ამიტომ $y=f(x)$ ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას აღნიშნავენ $y=f^{-1}(x)$ სიმბოლოთი. ამრიგად, განსაზღვრების თანახმად, როცა $x\in E(f)$, მაშინ $f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x$ ანუ $y=f^{-1}(x)$ წარმოადგენს $x=f(y)$ განტოლების ერთადერთ ამონახსნს.

შექცეული ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს მისი ძირითადი თვისებები:

1. $y=f(x)$ ფუნქციის $D(f)$ განსაზღვრის არე ტოლია შექცეული $y=f^{-1}(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის, ანუ $D(f)=E(f^{-1})$, ხოლო $E(f)=D(f^{-1})$.
2. ნებისმიერი $x\in D(f)\Rightarrow f^{-1}(f(x))=x$ და ნებისმიერი $x\in D(f^{-1})\Rightarrow f(f^{-1}(x))=x$.

შექცეული ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $y=f^{-1}(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია ემთხვევა $y=f(x)$ ფუნქციას. ამიტომ f და f^{-1} ფუნქციებს **ურთიერთშექცეული ფუნქციები** ეწოდება.

ძნელი არ არის ვაჩვენოთ, რომ შექცეულ ფუნქციას აგრეთვე აქვს შემდეგი თვისებები:

3. მონოტონური ფუნქციის შექცეული ფუნქცია მონოტონურია. კერძოდ, თუ f ფუნქცია ზრდადია, მაშინ f^{-1} ფუნქციაც ზრდადია, ხოლო, თუ f კლებადია, მაშინ მისი შექცეული ფუნქციაც კლებადია.

დამტკიცება: შევნიშნოთ, რომ, როცა f ფუნქცია ზრდადია ან კლებადია, მაშინ $f:D(f)\to E(f)$ ასახვა ბიექციაა და შექცეული ფუნქცია არსებობს.

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია ზრდადია; ვაჩვენოთ, რომ $y=f^{-1}(x)$ ფუნქციაც ზრდადია. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, $y=f^{-1}(x)$ ფუნქცია არ არის ზრდადი, მაშინ არსებობს $x_1,x_2\in D(f^{-1})$ ისეთი, რომ $x_1<x_2$ და $f^{-1}(x_1)\ge f^{-1}(x_2)$.

ვთქვათ, $f^{-1}(x_1)=y_1$ და $f^{-1}(x_2)=y_2$, $y_1,y_2\in D(f)$. ცხადია, $f(y_1)=x_1$ და $f(y_2)=x_2$.

დაშვების თანახმად, $y_1\ge y_2$ და რადგან f ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ გვექნება $f(y_1)\ge f(y_2)$, ანუ $x_1\ge x_2$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას: $x_1<x_2$. ე.ი. დაშვება არასამართლიანია და $y=f^{-1}(x)$ ფუნქცია ზრდადია.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ f^{-1} ფუნქცია კლებადია, როცა f კლებადია.

4. ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია $y=x$ წრფის მიმართ.

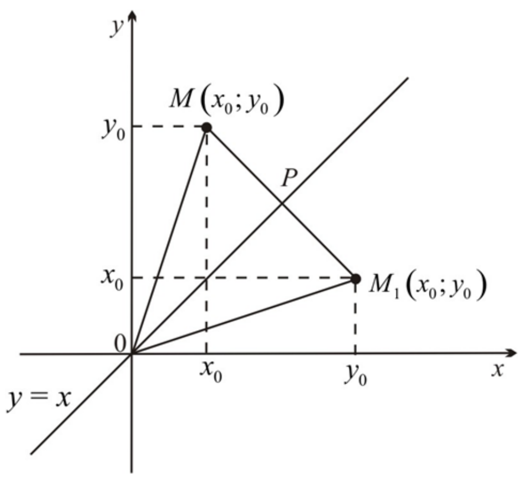
დამტკიცება: ვთქვათ, $M(x_0;y_0)$ წერტილი ეკუთვნის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს,

მაშინ $y_0 = f(x_0)$ და $x_0 = f^{-1}(y_0)$. ამიტომ $M_1(y_0;x_0)$ ეკუთვნის $y = f^{-1}(x)$ ფუნქციის გრაფიკს და პირიქით.

ვაჩვენოთ, რომ $M(x_0;y_0)$ და $M_1(y_0;x_0)$ წერტილები სიმეტრიულია $y = x$ წრფის მიმართ.

როცა $x_0 = y_0$, მაშინ $M(x_0;y_0)$ წერტილი ემთხვევა $M_1(y_0;x_0)$ წერტილს და მდებარეობს $y = x$ წრფეზე. ამ შემთხვევაში დასამტკიცებელი დებულება, ცხადია, სამართლიანია.

დავუშვათ $y_0 \neq x_0$, მაშინ $OM = OM_1 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ (იხ. ნახ. 2). ვთქვათ, P არის MM_1 მონაკვეთის შუა წერტილი, მაშინ P წერტილის კოორდინატები იქნება $P\left(\frac{x_0+y_0}{2};\frac{x_0+y_0}{2}\right)$, ე. ი. P წერტილი ეკუთვნის $y = x$ წრფეს. $OP \perp MM_1$, რადგან $OM = OM_1$. ამრიგად, M და M_1 წერტილები სიმეტრიულია $y = x$ წრფის მიმართ.



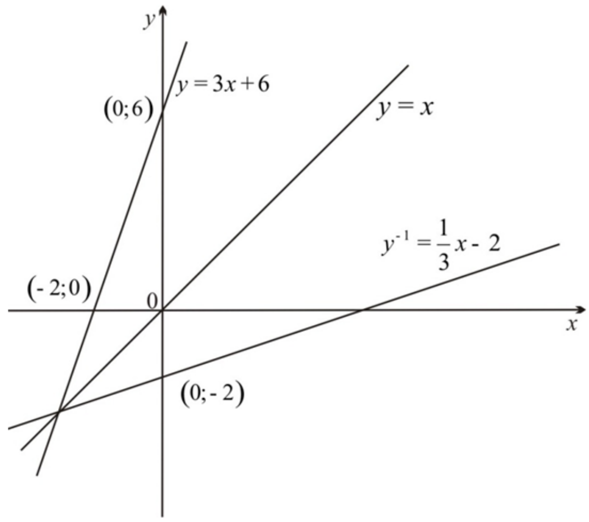
ნახ. 2

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია, მაშინ შექცეული ფუნქციის პოვნისთვის უნდა განვიხილოთ $x = f(y)$ განტოლება და ამ განტოლებიდან y ცვლადი გამოვსახოთ x-ის საშუალებით. ამგვარად, მივიღებთ $y=f^{-1}(x)$ შექცეულ ფუნქციას, რომლისთვისაც $D(f^{-1})=E(f)$ და $E(f^{-1})=D(f)$.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y = 3x + 6$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

ამოხსნა. $y = 3x + 6$ ფუნქცია ზრდადია მთელ რიცხვთა ღერძზე; მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $E(y)=(-\infty;+\infty)$. ამიტომ შექცეული ფუნქცია არსებობს და მისი პოვნისთვის უნდა ამოვხსნათ განტოლება: $x = 3y + 6$, $y = \frac{x-6}{3} = \frac{1}{3}x - 2$, ე. ი. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - 2$ (იხ. ნახ. 3). $y = f^{-1}(x)$ ფუნქცია ზრდადია, $D(f^{-1}) = R$ და $E(f^{-1}) = R$.



ნახ. 3

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ:

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{3}f(x) - 2 =$$
$$= \frac{1}{3}(3x+6) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

და

$$f^{-1}(f(x)) = 3f^{-1}(x) + 6 =$$
$$= 3\left(\frac{1}{3}x - 2\right) + 6 = x - 6 + 6 = x.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ k და b პარამეტრების რა მნიშვნელობისთვის დაემთხვევა $y = kx + b$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია მოცემულ ფუნქციას.

ამოხსნა. ვთქვათ, $k \neq 0$ (თუ $k=0$, $y=b$ და შექცეული ფუნქცია არ არსებობს), მაშინ $y=kx+b$ წრფივი ფუნქცია მონოტონურია. შექცეული ფუნქციის პოვნისთვის ამოვხსნათ $x=ky+b$ განტოლება, გვექნება:

$$y=\frac{1}{k}x-\frac{b}{k}, \text{ ე. ი. } f^{-1}(x)=\frac{1}{k}x-\frac{b}{k}.$$

$f(x)$ და $f^{-1}(x)$ ფუნქციები დაემთხვევა ერთმანეთს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა:

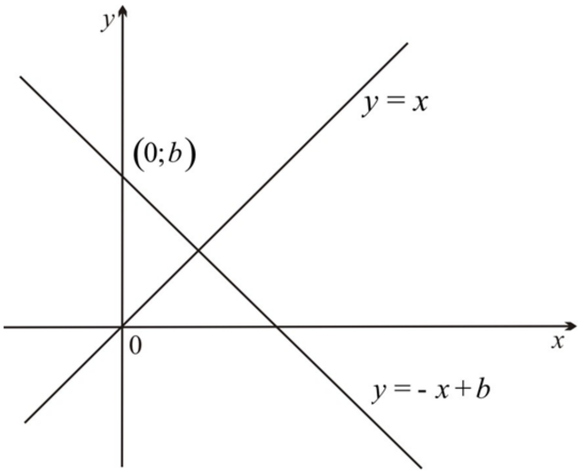
$$\begin{cases}\frac{1}{k}=k\\ -\frac{b}{k}=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k^2=1\\ -b=bk\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=1\\ -b=b\end{cases}\\ \begin{cases}k=-1\\ -b=-b\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=1\\ b=0\end{cases}\\ \begin{cases}k=-1\\ b=(-\infty;+\infty)\end{cases}\end{array}\right.$$

ე. ი. $f_1(x)=x$ და $f_2(x)=-x+b$ ფუნქციების შექცეული ფუნქციები ისევ ასეთი სახით ჩაიწერება, ანუ:

$$f_1^{-1}(x)=x, \quad f_2^{-1}(x)=-x+b$$

(იხ. ნახ. 4).



ნახ. 4

მაგალითი 3. როგორი უნდა იყოს a, b, c და d რიცხვები $(c \neq 0)$, რომ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია დაემთხვეს მოცემულ ფუნქციას.

ამოხსნა. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა:

$$D(y)=\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)\cup\left(-\frac{d}{c};+\infty\right).$$

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია რომ არსებობდეს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერი $x_1, x_2 \in D(y)$, $x_1 \neq x_2$ პირობიდან გამომდინარეობს $y(x_1) \neq y(x_2)$.

$$y(x_1)-y(x_2)=$$
$$=\frac{ax_1+b}{cx_1+d}-\frac{ax_2+b}{cx_2+d}=\frac{(ad-bc)(x_1-x_2)}{(cx_1+d)(cx_2+d)} \neq 0,$$

როცა $ad-bc \neq 0$. ე.ი. შექცეული ფუნქცია არსებობს, როცა $ad \neq bc$.

შევნიშნოთ, რომ $ad=bc$ ტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a(x+b/a)}{c(x+d/c)}=\frac{a}{c}$$

და შექცეული ფუნქცია არ არსებობს.

დავუშვათ, $ad \neq bc$ და ვიპოვოთ შექცეული ფუნქცია $x=\frac{ay+b}{cy+d}$ განტოლებიდან.

$cy+d \neq 0$, რადგან $D(y)=E(y^{-1})$.

$cxy+dx=ay+b$, $(cx-a)y=-dx+b$.

უკანასკნელ განტოლებას ერთადერთი ამონახსნი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $x \neq \frac{a}{c}$ და ეს ამონახსნია $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

ამრიგად,

$$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a},$$

$$D(f^{-1})=E(f)=\left(-\infty;\frac{a}{c}\right)\cup\left(\frac{a}{c};+\infty\right),$$

$$E(f^{-1})=D(f)=\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)\cup\left(-\frac{d}{c};+\infty\right).$$

$y=f^{-1}(x)$ ფუნქცია დაემთხვევა $y=f(x)$ ფუნქციას, როცა $d=-a$ და $bc\neq -a^2$. ამრიგად, $f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$, $bc\neq -a^2$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $f^{-1}(x)=f(x)$.

$y=\frac{ax+b}{cx-a}$ ფუნქციის გრაფიკი დავხაზოთ კონკრეტული a, b და c რიცხვებისთვის. კერძოდ, ვთქვათ, $a=1$, $b=1$, $c=1$ ანუ განვიხილოთ $y=\frac{x+1}{x-1}$ ფუნქცია (იხ. ნახ. 5).

$y=\frac{x+1}{x-1}$ ფუნქცია არ არის მონოტონური, ის არც ზრდადია და არც კლებადი მთელ განსაზღვრის არეზე, მაგრამ არის ურთიერთცალსახა ფუნქცია და გააჩნია შექცეული ფუნქცია. ამრიგად, მონოტონურობა არ არის აუცილებელი პირობა შექცეული ფუნქციის არსებობისთვის.

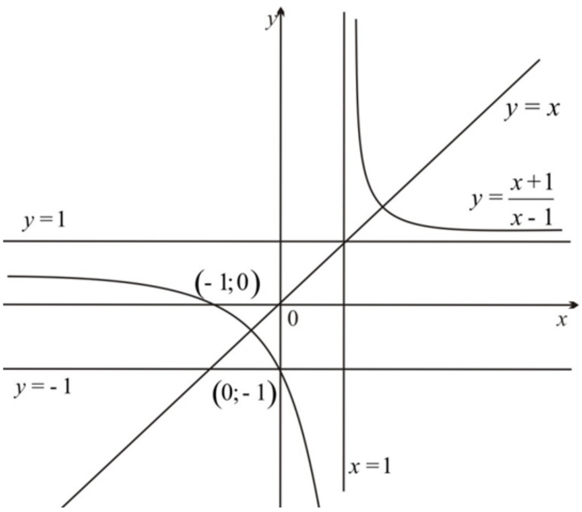
ე. ი. უნდა ვიპოვოთ $f(x)=2x^2+2x-1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. ჩავწეროთ ეს ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$y=2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{2}=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2},$$

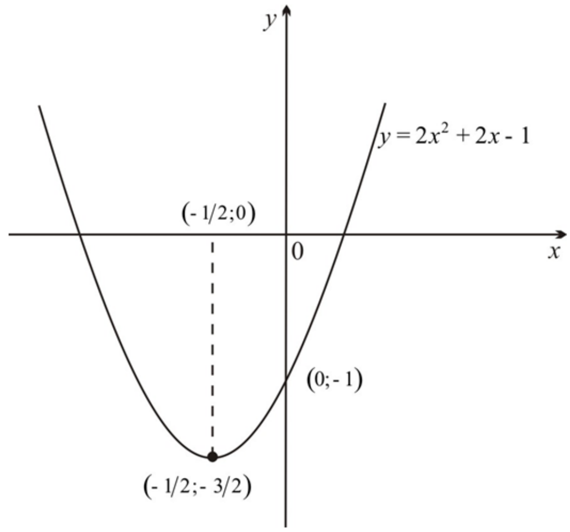
$$D(y)=R,\ E(y)=\left[-\frac{3}{2};+\infty\right).$$

$y\left(\frac{1}{2}\right)=y\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$, ამიტომ ამ ფუნქციას არ აქვს შექცეული ფუნქცია მთელ განსაზღვრის არეზე (იხ. ნახ. 6).

მოცემული ფუნქცია ზრდადია, როცა $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ და კლებადია, როცა $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$. ამიტომ შექცეული ფუნქცია იარსებებს, როცა ა) $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ და ბ) $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$, შესაბამისად.



ნახ. 5



ნახ. 6

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $f(2x+1)=8x^2+12x+3$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა $2x+1=t$, მაშინ $x=\frac{t-1}{2}$ და გვექნება:

$$f(t)=8\cdot\frac{(t-1)^2}{4}+12\cdot\frac{t-1}{2}+3=$$

$$=2(t-1)^2+6(t-1)+3=2t^2+2t-1,$$

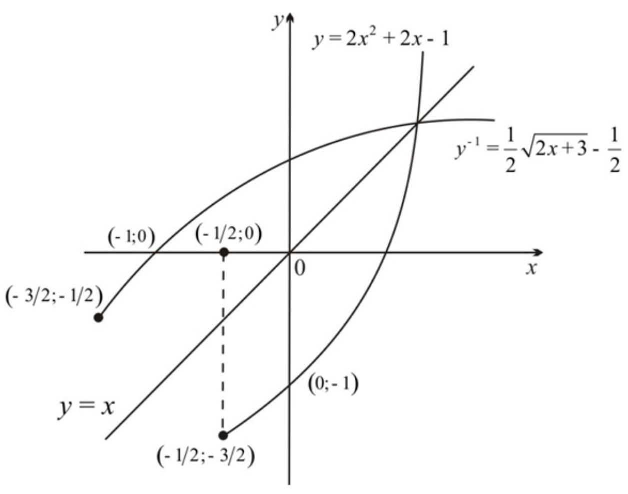
ვთქვათ, $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. შექცეული ფუნქციის საპოვნელად ამოვხსნათ განტოლება:

$$x=2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

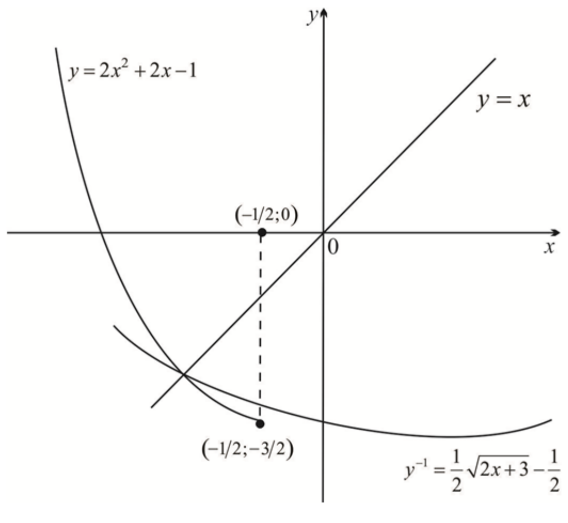
$$2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=x+\frac{3}{2}$$

$$y+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{2x+3}{4}}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ: $D\left(f^{-1}\right)=E(f)=$ $=\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$ და $E\left(f^{-1}\right)=D(f)=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$, ე. ი. $x\geq-\frac{3}{2}$ და $y\geq-\frac{1}{2}$. ამიტომ უკანასკნელი განტოლების ერთადერთი ამონახსნია $y=\frac{1}{2}\sqrt{2x+3}-\frac{1}{2}$. ამრიგად, $f^{-1}(x)=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{2x+3}-\frac{1}{2}$ (იხ. ნახ. 7).



ნახ. 7



ნახ. 8

ანალოგიურად, $f(x)=2x^2+2x-1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, როცა $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ იქნება $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2x+3}-\frac{1}{2}$, რადგან $E\left(f^{-1}\right)=D(f)=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$, ხოლო $D\left(f^{-1}\right)=\ =E(f)=\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$ (იხ. ნახ. 8).

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

ამოხსნა. $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ მას არ გააჩნია შექცეული ფუნქცია მთელ განსაზღვრის არეზე. თუმცა შეიძლება განვიხილოთ განსაზღვრის არიდან მონოტონურობის შუალედები, სადაც შექცეული ფუნქცია არსებობს.

მოცემული ფუნქცია განსაზღვრულია $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ სიმრავლეზე.

ცხადია:

$$y=\frac{1+x^2}{1-x^2}=1+\frac{2x^2}{1-x^2}\geq1,\text{ თუ } -1<x<1.$$

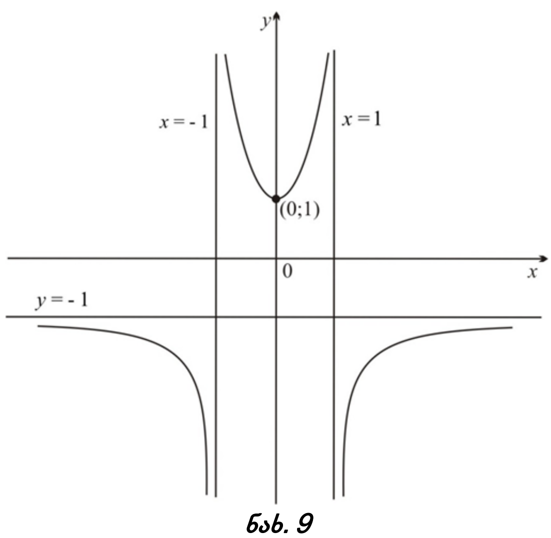
$$y=-\frac{1+x^2}{x^2-1}=-\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)=-1-\frac{2}{x^2-1}<-1,$$

როცა $|x|>1$.

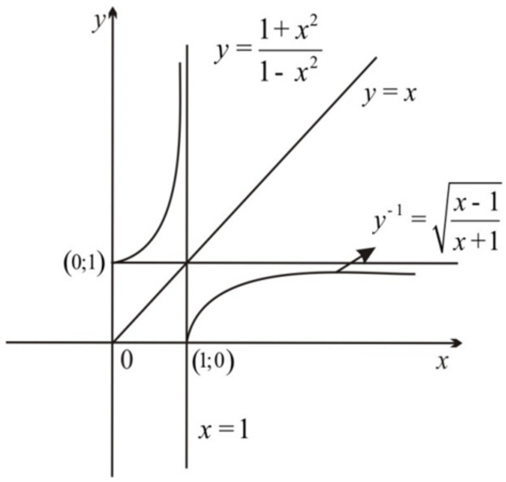
ამრიგად, ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა:

$$E(y)=(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$$

(იხ. ნახ. 9).



ნახ. 9



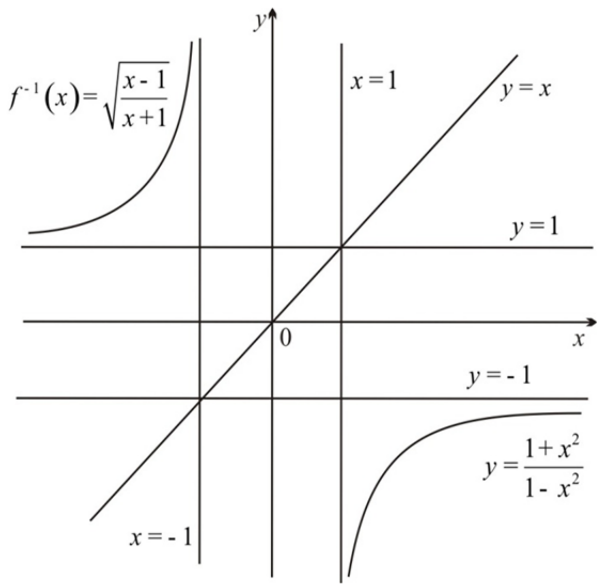
ნახ. 10

ადვილი სანახავია, რომ $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $x\in[0;1)$ ან $x\in(1;+\infty)$ და კლებადია, როცა $x\in(-\infty;-1)$ ან $x\in(-1;0)$. ამიტომ აღნიშნულ შუალედებში არსებობს შექცეული ფუნქცია, შესაბამისად.

ვთქვათ, ვიხილავთ ა) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$, $0\le x<1$, ფუნქციას, მისი შექცეული ფუნქციისთვის $D(y^{-1})=E(y)=[1;+\infty)$ და $E(y^{-1})=D(y)=[0;1)$. აღნიშნულის გათვალისწინებით $x=\frac{1+y^2}{1-y^2}$ განტოლებიდან მივიღებთ, რომ $x-xy^2=1+y^2$, $y^2=\frac{x-1}{x+1}$, ამიტომ

$f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ (იხ. ნახ. 10).

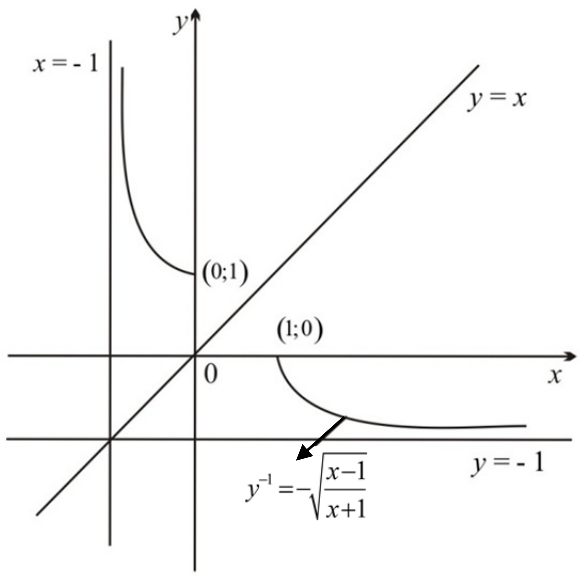
ბ) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$, $1<x<+\infty$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია იქნება: $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $D(f^{-1})=E(f)=(-\infty;-1)$ და $E(f^{-1})=D(f)=(1;+\infty)$ (იხ. ნახ. 11).



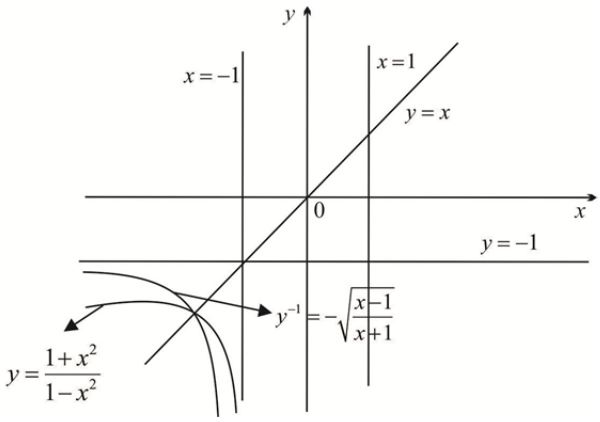
ნახ. 11

გ) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$, $-1<x\le 0$, $E(y)=[1;+\infty)$. ამ შუალედში მოცემული ფუნქციის შექცეული y^{-1} ფუნქცია არსებობს, $D(y^{-1})=E(y)=[1;+\infty)$ და $E(y^{-1})=D(y)=(-1;0]$, $y^{-1}=-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ (იხ. ნახ. 12).

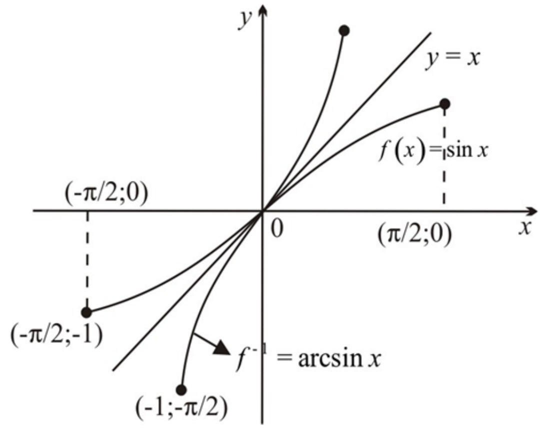
დ) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$, $-\infty<x<-1$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $y^{-1}=-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $D(y^{-1})=E(y)=(-\infty;-1)$, $E(y^{-1})=(-\infty;-1)$ (იხ. ნახ. 13).



ნახ. 12



ნახ. 13

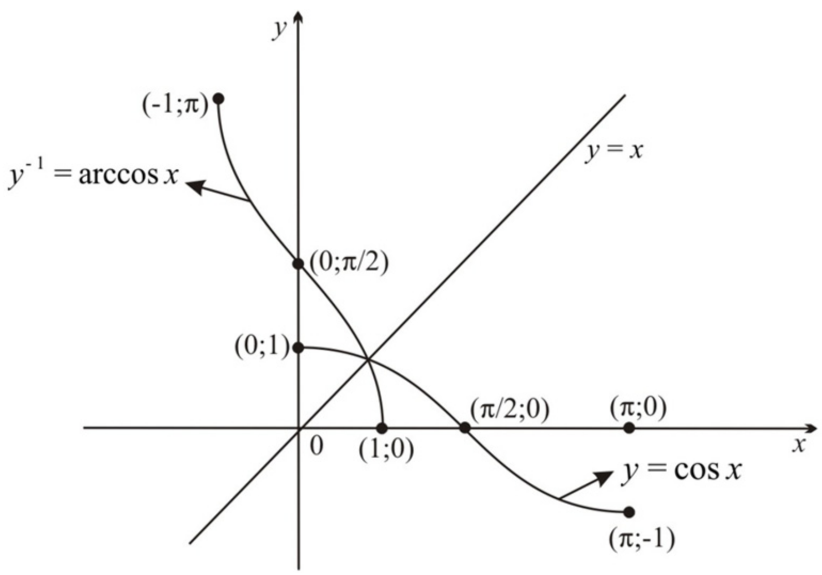


ნახ. 14

გავიხსენოთ ძირითადი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შექცეული ფუნქციები. განვიხილოთ $f(x)=\sin x$ ფუნქცია, $D(f)=R$, $E(f)=[-1;1]$ მოცემული ფუნქცია პერიოდულია უმცირესი დადებითი 2π პერიოდით. ამიტომ მთელ განსაზღვრის არეზე $f(x)=\sin x$ ფუნქციას შექცეული ფუნქცია არ გააჩნია. მოცემული ფუნქცია ზრდადია $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, $-1\le \sin x\le 1$, ამიტომ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია არსებობს და $f^{-1}(x)=\arcsin x$, $D\left(f^{-1}\right)=E(f)=[-1;1]$, $E\left(f^{-1}\right)=D(f)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (იხ. ნახ. 14). ამრიგად, $-\frac{\pi}{2}\le \arcsin x\le \frac{\pi}{2}$ და $\sin(\arcsin x)=x$, $-1\le x\le 1$.

ანალოგიურად, $f(x)=\cos x$ ფუნქციას შექცეული ფუნქცია გააჩნია $[0;\pi]$ შუალედში, რადგან ამ შუალედზე f ფუნქცია კლებადია. $\cos x$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $f^{-1}(x)=\arccos x$, $D\left(f^{-1}\right)=E(f)=[-1;1]$, $E\left(f^{-1}\right)=D(f)=[0;\pi]$ (იხ. ნახ. 15). ამრიგად, $0\le \arccos x\le \pi$, $\cos(\arccos x)=x$, $-1\le x\le 1$.

შევისწავლოთ ფუნქციათა კომპოზიციის შექცეული ფუნქციის პოვნის საკითხი. ვთქვათ, $y=f(u)$ და $u=\varphi(x)$ ფუნქციებს გააჩნიათ შექცეული ფუნქციები, ამასთან, $u=\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შედის f ფუნქციის განსაზღვრის არეში. მაშინ $f\circ\varphi$ ფუნქციათა კომპოზიციას, ანუ $y=f(\varphi(x))$



ნახ. 15

რთულ ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია და სამართლიანია ტოლობა:

$$\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)^{-1}=\varphi^{-1}\left(f^{-1}(x)\right),\quad x\in E\left(f(\varphi)\right).$$

დამტკიცება. რადგან $y=f(u)$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია და $u=\varphi(x)\in D(f)$, ამიტომ $y=f\left(\varphi(x)\right)$ ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია და ის წარმოადგენს $x=f\left(\varphi(y)\right)$ განტოლების ერთადერთ ამონახსნს, სადაც $x\in E\left(f(\varphi)\right)$, ხოლო $y\in D(f)$. f ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია, ამიტომ შეგვიძლია განვიხილოთ:

$$f^{-1}(x)=f^{-1}\left(f\left(\varphi(y)\right)\right)=\varphi(y),$$

რადგან $y\in D(f)\Rightarrow\varphi(y)\in E(\varphi)\subset D(f)$; $u=\varphi(x)$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია, ამიტომ $\varphi^{-1}\left(\varphi(y)\right)=y$ და $f^{-1}(x)=\varphi(y)$ ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\varphi^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)=\varphi^{-1}\left(\varphi(y)\right)=y,\quad y\in D(f).$$

ამრიგად, $y=\varphi^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$ არის $x=f\left(\varphi(y)\right)$ განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, მაგრამ, მეორე მხრივ, ამ განტოლების ამონახსნი არის $y=f\left(\varphi(x)\right)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია:

$$\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)^{-1}=\varphi^{-1}\left(f^{-1}(x)\right),\text{ სადაც}$$
$$x\in E\left(f(\varphi)\right).$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ $y=2^{\cos x}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

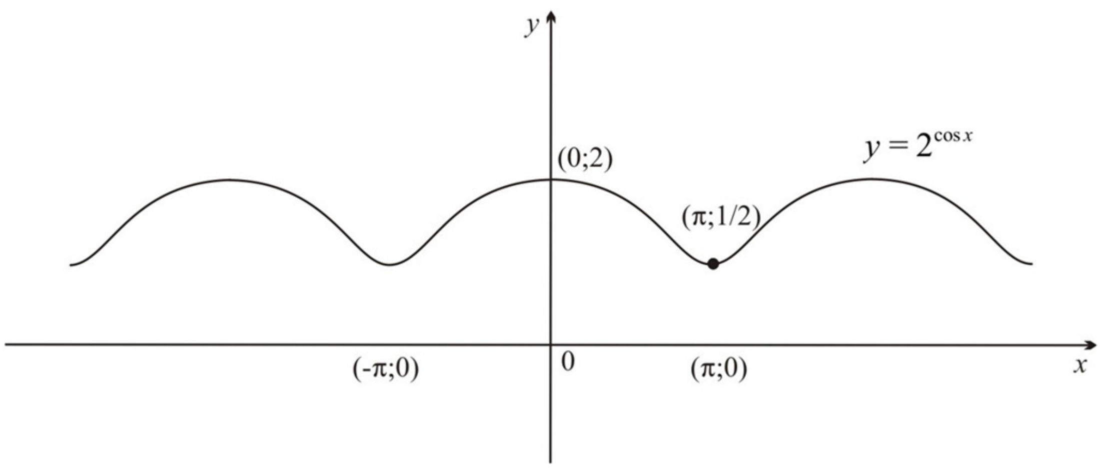
ამოხსნა. $y=2^{\cos x}$ წარმოადგენს $y=f(u)=2^u$ და $u=\varphi(x)=\cos x$ ფუნქციათა კომპოზიციას: $(f\circ\varphi)x=f\left(\varphi(x)\right)=2^{\cos x}$ (იხ. ნახ. 16).

$f(u)=2^u$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული ფუნქცია, რადგან ეს ფუნქცია ზრდადია მთელ განსაზღვრის არეზე და $D(f)=R$, $E(f)=(0;+\infty)$. $f(u)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $f^{-1}(u)=\log_2 u$, $D(f^{-1})=(0;+\infty)$, $E(f^{-1})=(-\infty;+\infty)$. $u=\varphi(x)$ ფუნქციას, როგორც აღვნიშნეთ, შექცეული ფუნქცია გააჩნია, როცა $0\le x\le\pi$ და $\varphi^{-1}(x)=\arccos x$, $x\in[-1;1]$, ხოლო $E(\varphi^{-1})=[0;\pi]$. ამიტომ $f\left(\varphi(x)\right)=2^{\cos x}$ ფუნქციას შექცეული ფუნქცია გააჩნია, როცა $x\in[0;\pi]$ და

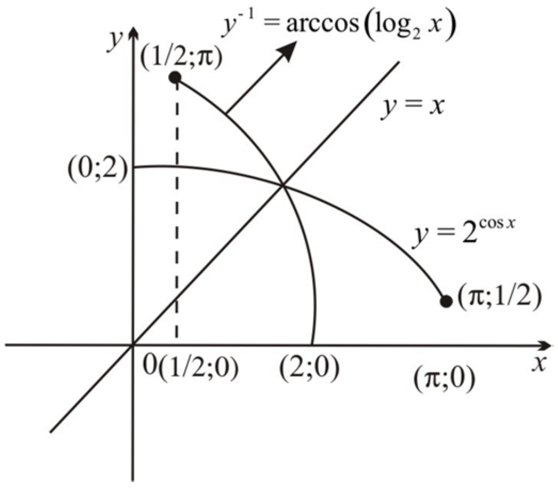
$$\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)^{-1}=\varphi^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)=\arccos\left(\log_2 x\right),$$

როცა $x\in D\left(\left(f(\varphi)\right)^{-1}\right)=E\left(f(\varphi)\right)=\left[\frac{1}{2};2\right]$

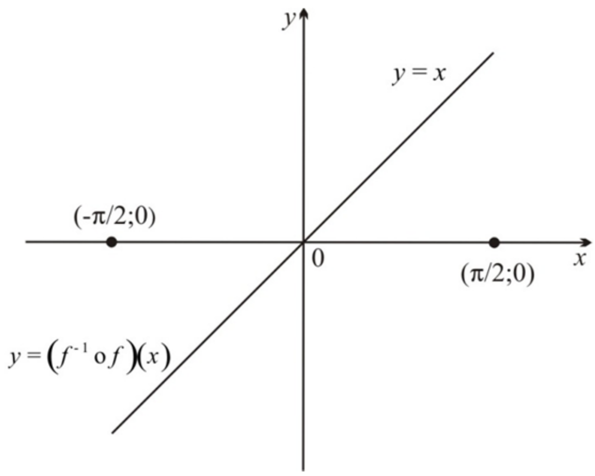
(იხ. ნახ. 17).



ნახ. 16



ნახ. 17



ნახ. 18

$y=2^{\cos x}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია შეგვეძლო გვეპოვა განსაზღვრების საფუძველზეც.

გვინდა ყურადღება გავამახვილოთ f და f^{-1} ფუნქციების კომპოზიციაზე. როგორც აღვნიშნეთ (იხ. შექცეული ფუნქციის თვისება 2), ნებისმიერი $x\in D(f)\Rightarrow f^{-1}(f(x))=x$ და ნებისმიერი $x\in D(f^{-1})\Rightarrow f(f^{-1}(x))=x$. მაგრამ, საზოგადოდ:

$$f^{-1}(f(x))\neq f(f^{-1}(x)),$$

რადგან $f^{-1}\circ f$ და $f\circ f^{-1}$ ფუნქციათა განსაზღვრის არეები განსხვავებულია.

საკითხში უკეთ გარკვევის მიზნით, განვიხილოთ $f(x)=\sin x$ ფუნქცია. ცხადია:

$$(f^{-1}\circ f)(x)=\arcsin(\sin x)=x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

(იხ. ნახ. 18) და

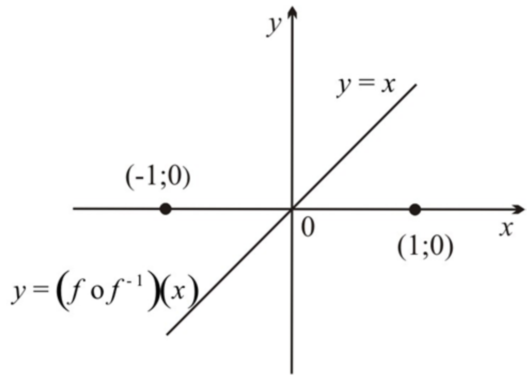
$$(f\circ f^{-1})(x)=\sin(\arcsin x)=x,\quad x\in[-1;1]$$

(იხ. ნახ. 19). ცხადია, რომ:

$$\left((f^{-1}\circ f)(x)\right)^{-1}=(f^{-1}\circ f)(x),\quad x\in D(f)$$

და

$$\left((f\circ f^{-1})(x)\right)^{-1}=(f\circ f^{-1})(x),\quad x\in D(f^{-1}).$$

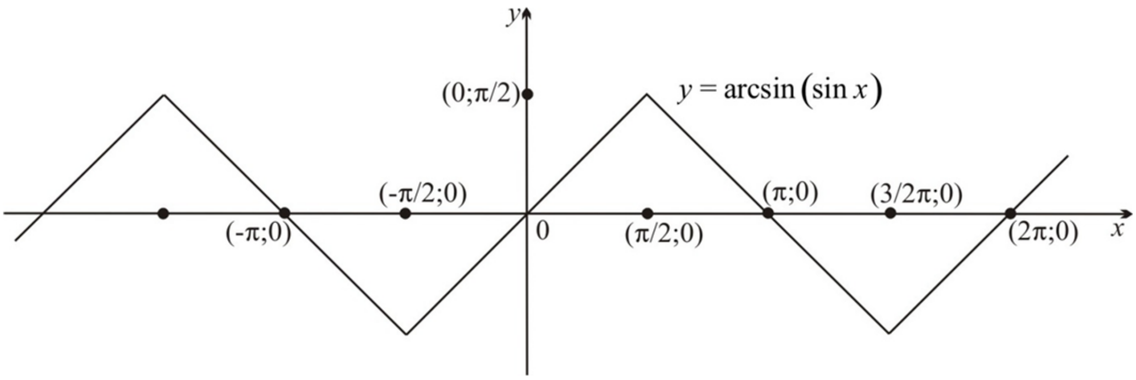


ნახ. 19

დასასრულს, $y=\arcsin(\sin x)$ ფუნქცია შევისწავლოთ. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty;+\infty)$ შუალედზე, პერიოდულია უმცირესი დადებითი 2π პერიოდით, კენტია და $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. გრაფიკის დასახაზად საკმარისია განვიხილოთ 2π სიგრძის ინტერვალი $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$ და შემდეგ პერიოდულობის გათვალისწინებით დავხაზოთ გრაფიკი.

როგორც ვიცით, $\arcsin(\sin x)=x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, ხოლო, როცა $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$, მაშინ $-\frac{\pi}{2}\le\pi-x\le\frac{\pi}{2}$. დაყვანის ფორმულით $\sin x=\sin(\pi-x)$, ამიტომ:

$$\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(\pi-x))=\pi-x.$$



ნახ. 20

ამრიგად:

$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

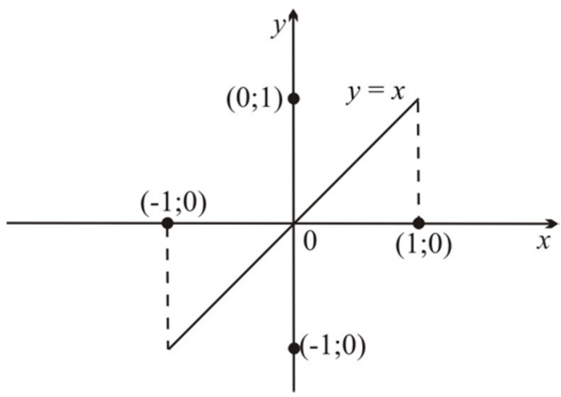
მაშასადამე, $y = \arcsin(\sin x)$ ფუნქციის გრაფიკს პერიოდულობის გათვალისწინებით ექნება შემდეგი სახე (იხ. ნახ. 20):

როგორც ვხედავთ, $\arcsin(\sin x) \neq$ $\neq (f^{-1} \circ f)(x)$, როცა $f(x) = \sin x$. გვინდა ყურადღება მივაქციოთ იმ ფაქტს, რომ $\arcsin(\sin x) = x$, როცა $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ და ნებისმიერი x-თვის ეს ტოლობა არ არის სამართლიანი. მაგალითად:

$$\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{7}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi + \frac{3\pi}{7}\right)\right) =$$

$$= \arcsin\left(-\sin\frac{3\pi}{7}\right) = -\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{7}\right) = -\frac{3\pi}{7}.$$

რაც შეეხება $y = \sin(\arcsin x)$ ფუნქციას, მისი განსაზღვრის არეა $D(y) = [-1;1]$, $E(y) = [-1;1]$ და $\sin(\arcsin x) = (f \circ f^{-1})(x) =$ $= x$, $x \in [-1;1]$ (იხ. ნახ. 21).



ნახ. 21

ლიტერატურა

1. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ., მათემატიკა – XII. გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2014.
2. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ., მათემატიკა – XI. გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2012.
3. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ., მათემატიკა – X. გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2012.
4. Колмогоров А., Что такое функция? Квант, научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов, № 3, 1993

.

ავტორის ელექტრონული მისამართი: rusudan.meskhia@tsu.ge

კონკრეტიზაცია და განზოგადება, როგორც მათემატიკის სწავლების მეთოდები

ია მებონია

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა კანდიდატი, აკადემიური დოქტორი, თსუ-ის მათემატიკურ განათლებაში სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერ-მკვლევარი, ნიუტონის თავისუფალი სკოლის მათემატიკის პედაგოგი

სასწავლო პროცესის დაგეგმვისას პედაგოგი ირჩევს დიდაქტიკურ აქტივობებს („რას გავაკეთებ?“) და მეთოდებს („როგორ გავაკეთებ?“). ორივე ეს არჩევანი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა შედეგის მიღწევა სურს. ამასთანავე, პედაგოგი ვალდებულია ითვალისწინებდეს, რომ მოსწავლეს მხოლოდ კონკრეტული საკითხის შესახებ ცოდნას კი არ უნდა აწვდიდეს, არამედ გამოუმუშაოს მას ისეთი ზოგადი უნარებიც, როგორიცაა, მაგალითად, ინფორმაციის ძიება, კრიტიკული შეფასება, წარდგენა, არგუმენტირებული მსჯელობა. სასურველი შედეგის მიღწევაში ერთ-ერთი ძირითადი ფაქტორი ადეკვატურად შერჩეული სწავლების მეთოდებია.

ჯერ კიდევ მე-17 საუკუნეში, იან ამოს კომენიუსი (კომენსკი) დიდაქტიკის პირველ და უკანასკნელ მიზნად მიიჩნევდა, ეპოვა და მასწავლებლამდე მიეტანა სწავლების ისეთი ხერხები/მეთოდები, რომელთა დახმარებითაც, მასწავლებლის ნაკლები ჩარევით, მოსწავლე მეტს ისწავლიდა და სწავლის პროცესიც მოსაწყენი არ მოეჩვენებოდა. ამის მისაღწევად კომენიუსი მოითხოვდა დიდაქტიკური აზროვნების შეცვლას, რაც იმას გულისხმობდა, რომ მხოლოდ სწავლების შინაარსი კი არ უნდა ყოფილიყო მასწავლებლის ყურადღების ცენტრში, არამედ იმ ხერხების/მეთოდების ძიებაც და პოვნაც, რომელთა მეშვეობითაც მოსწავლეები უფრო ადვილად და მეტი ხალისით აითვისებდნენ შინაარსს. მას შემდეგ, რაც კომენიუსმა ეს დიდაქტიკური პრინციპი ჩამოაყალიბა, სამ საუკუნეზე მეტი გავიდა. ამ ხნის განმავლობაში შემუშავდა, გამოიცადა და პრაქტიკაში დაინერგა უამრავი სასწავლო მეთოდი.

სწავლების მეთოდი მასწავლებლის მიზანმიმართული ქმედებაა მოსწავლეებში შესაბამისი კომპეტენციის განსავითარებლად. მეთოდი მხოლოდ მაშინაა ეფექტიანი, როცა შეესაბამება მოსწავლეთა შესაძლებლობებსა და გამოცდილებას. ამასთანავე, მეთოდის შერჩევისას უნდა დავფიქრდეთ, ტექნიკურად შესაძლებელია თუ არა მისი განხორციელება (ხელმისაწვდომია თუ არა რესურსები; გვეყოფა თუ არა დრო; შესაძლებელია თუ არა მოცემული რაოდენობის მოსწავლეებით მეთოდის ეფექტიანად განხორციელება და სხვა). საზოგადოდ, ცნება „სწავლების მეთოდი“ მოიცავს დიდაქტიკურ ძიებებს, სწავლების პროცესში განსახორციელებელი ეტაპების დროში განაწილებას, ურთიერთობის ხასიათს, ანუ მასწავლებლისა და მოსწავლის როლების ურთიერთდამოკიდებულებას, მოსალოდნელი შედეგების განსაზღვრას.

დიდაქტიკური მეთოდების მრავალნაირი კლასიფიკაცია არსებობს. თუ, მაგალითად, დაჯგუფებას ინფორმაციის წყაროს მიხედვით განვახორციელებთ, შეიძლება გამოვყოთ: ვერ-

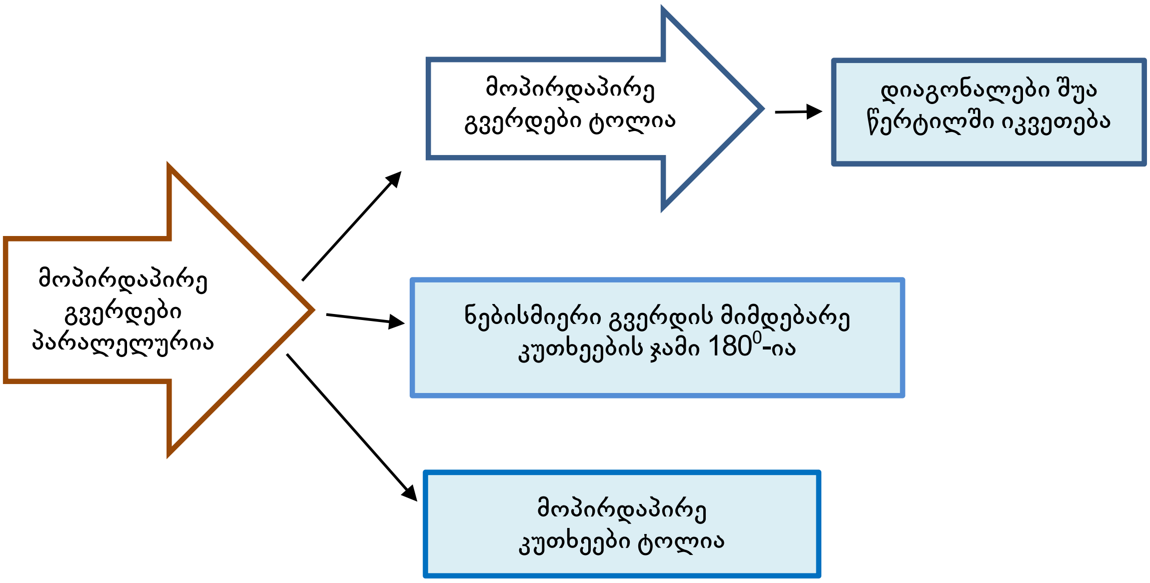
ბალური (თხრობა, ლექცია, დისკუსია და ა.შ.), თვალსაჩინო (მოდელზე ან პროცესზე დაკვირვება, ილუსტრაცია და ა. შ.) და პრაქტიკული მეთოდები (ლაბორატორიული სამუშაოები, ექსპერიმენტი, სავარჯიშოები და ა. შ.); ხოლო, თუ, მაგალითად, დაჯგუფებას მოსწავლის ჩართულობის ხარისხის მიხედვით ვაწარმოებთ, შეიძლება გამოვყოთ: პასიური (იღებს მზა ცოდნას, მაგალითად, პედაგოგის მონათხრობიდან), რეპროდუქციული (იმეორებს მოქმედებებს მოცემული ნიმუშის მიხედვით), პრობლემური (მოსწავლე დასმულ პრობლემას წყვეტს პედაგოგის ჩართულობით და/ან სიტუაციურ მოდელში როლური თამაშით) და კვლევითი (ცოდნის შეძენა ხდება საკითხის დამოუკიდებლად შესწავლით, ინფორმაციის მოძიება/დამუშავებით, ფაქტებისა და კანონზომიერებების აღმოჩენით, ჰიპოთეზების შემუშავება/შემოწმებით და ა. შ.).

ცხადია, სასწავლო პროცესის წარმართვისას მასწავლებელი იყენებს სწავლების სხვადასხვა მეთოდს. ხშირად ეს არჩევანი შინაარსზეც არის დამოკიდებული, თუმცა, ზოგჯერ პირიქით, მეთოდის შერჩევამ შეიძლება გავლენა იქონიოს შინაარსზე, ფაქტობრივი მასალის გადაცემის თანამიმდევრობაზე. მოდით, ეს საკითხი უფრო დეტალურად მათემატიკის სწავლების მაგალითებზე განვიხილოთ.

მათემატიკის სწავლებისას, ტრადიციულად, კონკრეტიზაციის მეთოდს მივმართავთ, ანუ ჯერ ვიხილავთ ზოგად ცნებას და შემდეგ გადავდივართ კერძო შემთხვევებზე, ცნების შინაარსის გაფართოების გზით. თავისთავად, ცნება აბსტრაქციაა, რომელსაც ჩვენი გონება ქმნის. უკეთეს შემთხვევაში, ცნება წარმოგვიდგენია, როგორც რაღაც ობიექტების სიმრავლე; ამ სიმრავლეს ცნების მოცულობას უწოდებენ. ცნების მოცულობაში მოსახვედრად ყოველ ობიექტს უნდა ჰქონდეს გარკვეული თვისებები, ე. წ. ცნების მახასიათებლების ერთობლიობა, ანუ ცნების შინაარსი. ცნებებს შორის შეიძლება იყოს გარკვეული კავშირები. მაგალითად, გვაქვს ორი ცნება: „სამკუთხედი“ და „ტოლფერდა სამკუთხედი“. იმისთვის, რომ ობიექტი იყოს ტოლფერდა სამკუთხედი, ის უნდა იყოს დამატებითი თვისებებით აღჭურვილი სამკუთხედი: სამკუთხედის ცნების შინაარსს ვამატებთ ახალ თვისებას „ორი გვერდი ტოლია“ და ამით სამკუთხედების სიმრავლეში გამოვყოფთ ქვესიმრავლეს — ტოლფერდა სამკუთხედების ერთობლიობას — ახალი ცნების მოცულობას. ამ მაგალითზე ნათელი ხდება, რომ, რაც უფრო ფართოა ცნება მოცულობით, მით უფრო ღარიბია ის შინაარსით და, პირიქით, შინაარსით მდიდარი ცნება უფრო მეტად ისწრაფვის კონკრეტულობისკენ, მაშასადამე, ნაკლებია მისი მოცულობაც. მნიშვნელოვანია გვახსოვდეს, რომ ცნების შინაარსი წარმოადგენს **ყველა** იმ თვისებათა ერთობლიობას, რომელიც ცნების მოცულობაში შემავალ ობიექტებს აქვს საერთო. ხშირად ეს ერთობლიობა საკმაოდ სოლიდურია და რამდენიმე ათეული ფაქტითაა წარმოდგენილი. ბუნებრივია, მიზანშეწონილი არაა ცნების განსაზღვრებისას შინაარსის სრულად წარმოჩენა. მაშ, როგორ ჩამოვაყალიბოთ განსაზღვრება — რა კრიტერიუმებით შევარჩიოთ განსაზღვრებაში მოთხოვნილი თვისებები? ვთქვათ, გვსურს განვსაზღვროთ პარალელოგრამი, რასაც ასე ვახორციელებთ: „პარალელოგრამი არის ოთხკუთხედი, რომელსაც მოპირდაპირე გვერდები პარალელური აქვს, მოპირდაპირე გვერდები ტოლი აქვს, დიაგონალები შუა წერტილში იკვეთება, მოპირდაპირე კუთხეები ტოლი აქვს, ნებისმიერი გვერდის მიმდებარე ორი კუთხის ჯამი 180^0-ია“. ჩამოთვლილი თვისებები მართლაც უნდა ახასიათებდეს ოთხკუთხედს, თუ ის პარალელოგრამია. მაგრამ, რამდენად აუცილებელია ყველა ამ თვისების ჩამოთვლა ცნების შემოტანისას? რომელი თვისება/თვისებები უნდა დავასახელოთ აუცილებლად და რომელი შეიძლება „გამოვტოვოთ“ და, საერთოდ, დასაშვებია თუ არა პარალელოგრამის ალტერნატიული განსაზღვრებები?

ამ კითხვებზე პასუხის გასაცემად შევქმნათ ჩამოთვლილი თვისებების რაიმე იერარქიული (მიზეზშედეგობრივი) სქემა (შევნიშნოთ, რომ ასეთი სქემის მრავალი ვარიანტი შეიძლება არსებობდეს და ჩვენ მხოლოდ ერთ-ერთ მათგანს განვიხილავთ).

ეს სქემა ასე იშიფრება: თუ ოთხკუთხედში მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია, მაშინ ამ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეებიც ტოლია და ნებისმიერი გვერდის მიმდე-

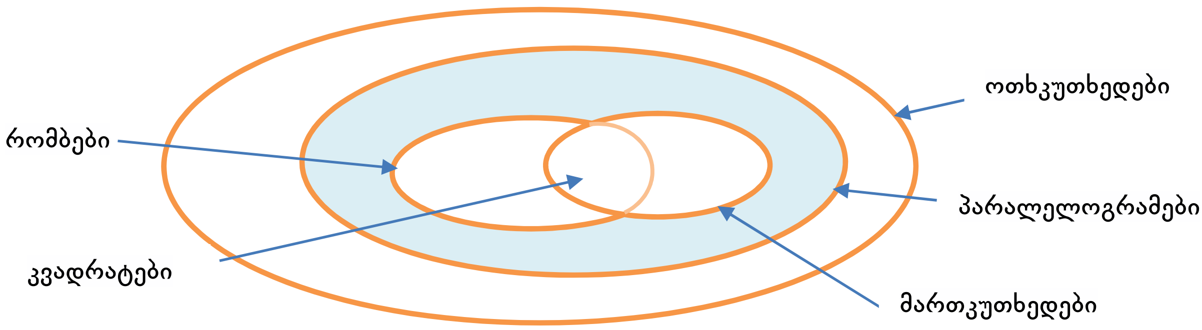


ბარე კუთხეების ჯამიც 180^0-ია; ამასთანავე, მოპირდაპირე გვერდებიც ტოლია და, როგორც შედეგი, დიაგონალები შუა წერტილში იკვეთება.

ამრიგად, ხუთი განხილული თვისებიდან ოთხი არის ერთის (გვერდების პარალელურობის) შედეგი. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ მოპირდაპირე გვერდების პარალელურობა პარალელოგრამის განმსაზღვრელი თვისებაა, პარალელოგრამად ყოფნისთვის საკმარისი პირობაა, ანუ „პარალელოგრამის ნიშანია“. ამის გათვალისწინებით, განსაზღვრება ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს: „პარალელოგრამი არის ოთხკუთხედი, რომელსაც მოპირდაპირე გვერდები პარალელური აქვს“, ხოლო დანარჩენი ოთხი ფაქტიდან თითოეული განმსაზღვრელი თვისების შედეგია, ანუ „პარალელოგრამის თვისებაა“. თუ რაიმე ცნებისთვის შესაძლებელია ორი განმსაზღვრელი თვისების შერჩევა, მაშინ, ცხადია, შევძლებთ ალტერნატიული განსაზღვრებების ჩამოყალიბებასაც. მაგალითად, პარალელოგრამის შემთხვევაში გვექნება: „ოთხკუთხედს, რომელსაც მოპირდაპირე გვერდები ტოლი აქვს, პარალელოგრამი ეწოდება“. მაშასადამე, რამდენი განმსაზღვრელი თვისებაც (ან თვისებათა ჯგუფი) მოიძებნება ცნების შინაარსში, სულ მცირე, იმდენივე ალტერნატიული სახითაც შეგვიძლია განვსაზღვროთ ეს ცნება და, შესაბამისად, იმდენნაირად დავალაგოთ ამ ფიგურის თვისებების შესწავლის თანამიმდევრობაც.

სწავლებისას კარგ შედეგს იძლევა ე.წ. „ცნების რუკის“ წარმოდგენა, რომელიც თვალსაჩინოდ ხდის თვისებათა მემკვიდრეობითობას. ცნების რუკა მათემატიკაში, როგორც წესი, ვენის დიაგრამით წარმოიდგინება. მაგალითად, განვიხილოთ სქემა (ქვემოთ).

ამ რუკის მიხედვით მოსწავლე ადვილად იგებს, რომ ყოველი მართკუთხედი პარალელოგრამია და, მაშასადამე, აქვს პარალელოგრამის ყველა თვისება და საკუთარი განმსაზღვრელი თვისებაც („ყველა კუთხე ტოლია“), რომლითაც ის გამოირჩევა სხვა პარალელოგრამებისგან; ანალოგიურად ვმსჯელობთ რომბებზეც — პარალელოგრამების



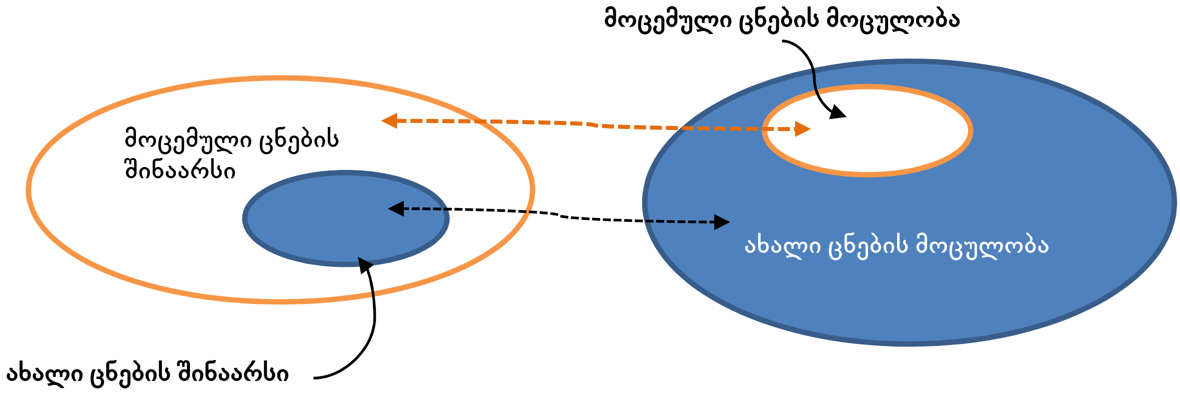
სიმრავლეში რომბების განმსაზღვრელი თვისებაა „ყველა გვერდი ტოლია“; ყოველი კვადრატი პარალელოგრამიცაა, რომბიც და მართკუთხედიც — ამ ცნების შინაარსი უნდა მოიცავდეს აღნიშნული სამი ცნების შინაარსებს. ამის გათვალისწინებით, კვადრატის სხვადასხვა განსაზღვრება არსებობს, შესაბამისად იმისა, თუ რომელი ცნების კონკრეტიზაციას მოახდენთ. მაგალითად, კვადრატი არის:

- პარალელოგრამი, რომლის ყველა გვერდი და ყველა კუთხე ტოლია;
- მართკუთხედი, რომლის ყველა გვერდი ტოლია;
- რომბი, რომლის ყველა კუთხე ტოლია.

ოთხკუთხედების თვისებების შესწავლის აღწერილი მეთოდი — დალაგება „ზოგადიდან კონკრეტულისკენ“ (კონკრეტიზაციის მეთოდი) — ყველაზე პოპულარულია. განხილული რუკის მაგალითზე რომ ვისაუბროთ, ჯერ ისწავლება ცნება „ოთხკუთხედი“, ვამატებთ შესაბამის თვისებას და ვიღებთ ცნებას „პარალელოგრამი“, შემდეგი თვისების დამატებით მივდივართ ახალ ცნებამდე („რომბი“ ან „მართკუთხედი“) და ა. შ.

შედარებით იშვიათად ვიყენებთ განზოგადების მეთოდს, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: მოცემული ცნების შინაარსიდან გამოვყოფთ რაიმე ქვესიმრავლეს („ვზღუდავთ“ მას) და ვიკვლევთ, თუ რა ობიექტების სიმრავლე განისაზღვრება ამით. პირველი სირთულე, რომელიც ამ მეთოდის გამოყენებას ახლავს, ცნების შინაარსიდან ქვესიმრავლის გამოყოფაა — საქმე იმაშია, რომ, თუ ქვესიმრავლეში მოვახვედრებთ რომელიმე განმსაზღვრელ თვისებას (ან განმსაზღვრელ თვისებათა ჯგუფს), მაშინ ცნების მოცულობა არ შეიცვლება და ობიექტებს „აღმოაჩნდება“ ყველა უწინდელი თვისება, არ ექნებათ რაიმე დანაკარგი, რომელიც „შეზღუდვის“ პროცესში თითქოს უნდა ყოფილიყო. შესაბამისად, მოცულობა ფაქტობრივად არ შეიცვლება; მეორე მხრივ, თუ გამოყოფილ ქვესიმრავლეში მოცემული ცნების არცერთი „ნიშანი“ არ შევა, მაშინ მივიღებთ ახალ შინაარსობრივ ჯგუფს, რომელსაც შეესაბამება ობიექტების ახალი სიმრავლე — ახალი ცნების (მოცემულის განზოგადების) მოცულობა, რომლისთვისაც უწინდელი მოცულობა ქვესიმრავლეს წარმოადგენს:

თვალსაჩინოა, რომ სწავლების ეს გზა თვისებრივად რთულია, ამიტომაც მის გამოყენებას სასწავლო პროცესში დიდი სიფრთხილით უნდა მოვეკიდოთ. თუმცა, მიუხედავად სირთულისა, ამ მეთოდზე უარის თქმა არ შეიძლება. მაგალითად, ყველა კლასში მოიძებნება მოსწავლე, რომლის აკადემიური მზაობა აღემატება დანარჩენი მოსწავლეების დონეს. ასეთ მოსწავლეებს არ უნდა მივცეთ მოდუნებისა და მოწყენის საშუალება. მაგრამ დიფერენცირებული დავალების მოფიქრება, თანაც ისეთის, რომელიც შესასწავლ თემატიკასთან უშუალო კავშირში იქნება, ადვილი არაა. ამ სიტუაციაში განზოგადების მეთოდის გამოყენება შეიძლება. მაგალითად, შევთავაზოთ ასეთი დავალება: „დავუშვათ, გვაქვს ოთხკუთხედის ცნება და არ განგვისაზღვრავს პარალელოგრამი, რომბი, მართკუთხედი. ამ პირობებში მოიფიქრეთ კვადრატის ორი მაინც განსხვავებული განსაზღვრება და დაასაბუთეთ, რომ ეს განსაზღვრებები ტოლფასია, ანუ ახასიათებს ფიგურათა ერთსა და იმავე სიმრავლეს“. ასეთი ტიპის დავალებები კვლე-



ვითი ხასიათისაა და მოითხოვს მოსწავლის მაქსიმალურ ჩართულობას. განზოგადების მეთოდის გამოყენება შეიძლება ჯგუფური სასწავლო პროექტების დავალებების შერჩევისას, კლასგარეშე კლუბური მუშაობისას და სხვა.

სასწავლო მეთოდები მრავალფეროვანია, მაგრამ არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ მათი ქმედითობა მნიშვნელოვანწილად იმაზეა დამოკიდებული, რამდენად ადეკვატურად შევარჩევთ და სწორად გამოვიყენებთ.

ლიტერატურა:

1. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы соврем.дидактики: Учеб.пособие по спецкурсу для пед. ин-тов / В.В. Краевский, И.Я. Лернер, М.Н. Скаткин; под ред. М.Н. Скаткина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение, 1982.
2. სოფო ლობჟანიძე, სწავლების მეთოდები და სწავლის სტრატეგიები, ინტერნეტგაზეთი WWW.mastsavlebeli.ge. 16.05.2012.
3. ია მებონია, ცნებათა სწავლების შესახებ, საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის VIII ყოველწლიური საერთაშორისო კონფერენცია, თეზისების კრებული, ბათუმი, 2017.
4. ბესელია ნინო, მეიფარიანი თამარ, მიქიაშვილი ლელა, ჯალაღანია ირინე. ინტერაქტიული სწავლება [რეკომენდაციები პედაგოგიური ტრენინგისათვის],— ნორვეგიის ლტოლვილთა საბჭო, თბ., 2004.

ავტორის ელექტრონული მისამართი: iamebonia@gmail.com

ქართველი მოსწავლეები მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადებზე

ლია შენგელია

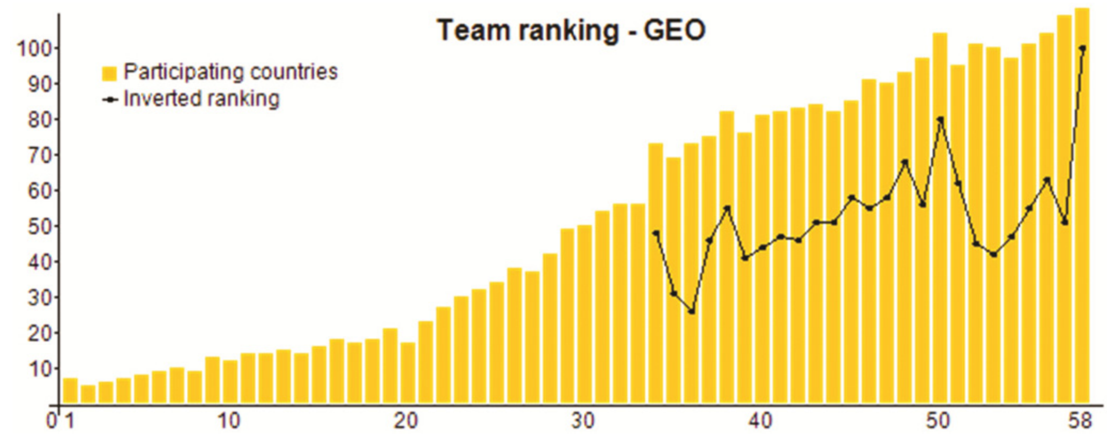
პედაგოგიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ა(ა)იპ საქართველოს მოსწავლე ახალგაზრდობის ეროვნული სასახლის თანამედროვე ტექნოლოგიების და ფინანსური განათლების მიმართულების ხელმძღვანელი

ერთი ვერცხლისა და 5 ბრინჯაოს მედლით დაბრუნდა 6 მოსწავლისაგან შემდგარი საქართველოს ნაკრები გუნდი მათემატიკის 59-ე საერთაშორისო ოლიმპიადიდან, რომელიც 2018 წლის ივლისში რუმინეთის ქ. კლუჟ ნაპოკაში გაიმართა. აღსანიშნავია, რომ მოსწავლეთა პირველი მათემატიკური ოლიმპიადა, სწორედ რუმინეთში, 1959 წელს ჩატარდა და წელს იგი მეექვსედ მასპინძლობდა საერთაშორისო მათემატიკურ ოლიმპიადას.

საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდი ეროვნული ოლიმპიადის შედეგების მიხედვით შეირჩა და დაკომპლექტებული იყო კომაროვის თბილისის ფიზიკა-მათემატიკის N199 საჯარო სკოლის მოსწავლეებით: საბა ლეფსვერიძე, ნიკოლოზ ბირკაძე, თეიმურაზ თოლორაია, ალექსანდრე ხოხიაშვილი, დიმიტრი კორკოტაშვილი და ლუკა მუშკუდიანი.

გუნდს ხელმძღვანელობდნენ: ლიდერი — ასისტენტ-პროფესორი გიორგი ჭელიძე; თანალიდერი — ასისტენტ-პროფესორი გივი ნადიბაიძე; ასისტენტი — IMO 2017 წლის ოქროს მედალოსანი ალექსანდრე საათაშვილი.

მათემატიკის ოლიმპიადაში 2018 წელს 594 მოსწავლე მონაწილეობდა მსოფლიოს 107 ქვეყნიდან. საქართველოს ნაკრებმა 252



შესაძლებელიდან 212 ქულა მოიპოვა და გუნდურ შეჯიბრში 27-ე ადგილი დაიკავა. ინდივიდუალური შედეგებით საბა ლეფსვერიძე გახდა ვერცხლის მედლის მფლობელი, ხოლო დანარჩენმა მოსწავლეებმა ბრინჯაოს მედლები მოიპოვეს.

ზემოთ მოცემულ დიაგრამაზე ასახულია ჩატარებული ოლიმპიადების მიხედვით მონაწილე გუნდების რაოდენობა და ნაჩვენებია საქართველოს გუნდის რეიტინგი, რომელიც უპრეცედენტოდ მაღალი 2017 წელს, 58-ე საერთაშორისო ოლიმპიადაზე იყო. ამ ოლიმპიადზე საქართველოს ნაკრებმა გუნდურ შეჯიბრში მე-12 ადგილი დაიკავა (მანამდე საუკეთესო შედეგი იყო 25-ე ადგილი), ხოლო ინდივიდუალურ შეჯიბრში — ოქროს მედალოსანი ალექსანდრე საათაშვილი მე-5 ადგილზე გავიდა, რაც ასევე საუკეთესო შედეგია ჩვენი ქვეყნისთვის. ეს იყო მესამე შემთხვევა, როდესაც საქართველოს წარმომადგენელი მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადიდან ოქროს მედლით დაბრუნდა. **პირველი ოქროს მედალი 1996 წელს დავით ჩხაიძემ, მეორე კი 2007 წელს — რატი გელაშვილმა მოიპოვეს.**

ახლა კი მოკლედ თვალი გადავავლოთ, ზოგადად, მათემატიკური ოლიმპიადების ისტორიას და იმ ტრადიციებს, რაც ამ მიმართულებით არსებობს საქართველოში.

საგნობრივ ოლიმპიადებს შორის ყველაზე დიდი ხნის ისტორია მათემატიკის ოლიმპიადებს აქვს. მოსწავლეთა საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადები 1959 წლიდან ყოველწლიურად ტარდება. ამ ოლიმპიადებმა სწრაფად მოიპოვეს საერთაშორისო ავტორიტეტი და მასში მონაწილე ქვეყანათა რიცხვი წლიდან წლამდე იზრდება.

პირველი საერთაშორისო მათემატიკური ოლიმპიადა ჩატარდა 1959 წელს რუმინეთში. მასში მონაწილეობდა 7 ქვეყნის 52 მოსწავლე. მას შემდეგ ოლიმპიადებში მონაწილე ქვეყნების რაოდენობა ყოველწლიურად იზრდება და იგი მსოფლიოს სხვადასხვა ქვეყანაში ტარდება.

ბევრმა ქვეყანამ მათემატიკური ოლიმპიადების ჩატარება მხოლოდ მას შემდეგ დაიწყო, რაც საერთაშორისო ოლიმპიადებში ჩაერთვნენ, ზოგიერთ ქვეყანას კი ასეთი ოლიმპიადების ჩატარების გარკვეული ტრადიცია ჰქონდა. მაგალითად, უნგრეთში მათემატიკური კონკურსები 1894 წლიდან ტარდებოდა.

ჩვენთვის საამაყოა იმის აღნიშვნა, რომ საქართველოში მათემატიკური ოლიმპიადები მე-20 საუკუნის 30-იანი წლებიდან იწყება. ჯერ კიდევ 1933 წელს თბილისში ჩატარდა ყოფილ საბჭოთა კავშირში პირველი მათემატიკური ოლიმპიადა (საქკოლო, შემდეგ სარაიონო), ხოლო 1934 წლის მაისში კი — საქალაქო. სასკოლო და სარაიონო ოლიმპიადების მომზადებასა და ჩატარებაში დიდი წვლილი შეიტანა რესპუბლიკის დამსახურებულმა მასწავლებელმა სერგო ვაშაყმაძემ. ნორჩ მათემატიკოსთა საქალაქო შეჯიბრებები ლენინგრადსა და მოსკოვში პირველად 1934-35 წლებში ჩატარდა, ცოტა მოგვიანებით კი — კიევშიც.

მათემატიკის რესპუბლიკური ოლიმპიადების ჩატარება საქართველოში დაიწყო მოსწავლე ახალგაზრდობის სასახლემ (მაშინდელმა პიონერთა და მოსწავლეთა სასახლემ) 1956-57 სასწავლო წლიდან. საოლიმპიადო კომისიის თავმჯდომარე იყო პროფესორი არჩილ ხარაძე, ხოლო მოადგილე — სასახლის მათემატიკის კაბინეტის გამგე გრიგოლ ჯაფარიძე, რომელიც ოლიმპიადის სულისჩამდგ-

მელი და ორგანიზატორიც გახლდათ. შექმნილი იყო მუდმივმოქმედი საორგანიზაციო კომიტეტი, რომელსაც მრავალი წლის განმავლობაში სათავეში ედგა პროფესორი ვლადიმერ ჭელიძე, მისი სიკვდილის შემდეგ კი პროფესორი თენგიზ გეგელია. საორგანიზაციო კომიტეტთან მჭიდროდ თანამშრომლობდნენ ბატონები: ავთანდილ ბენდუქიძე, არჩილ სულაქველიძე, ქალბატონი ნათელა კახნიაშვილი და სხვები.

1961 წელს მოსკოვის ოლიმპიადის მეორე ტურთან ერთად ჩატარდა სრულიად რუსეთის პირველი მათემატიკური ოლიმპიადა, რომელზეც მიწვეული იყვნენ გუნდები რუსეთის ბევრი ოლქიდან და მოკავშირე რესპუბლიკიდან, მათ შორის საქართველოდან.

1966 წელს სრულიად რუსეთის მე-6 ოლიმპიადაზე, ვორონეჟში, პირველად შეიკრიბნენ რუსეთის ყველა ოლქისა და საბჭოთა კავშირის ყველა რესპუბლიკის წარმომადგენლები. გაჩნდა შესაძლებლობა, ოლიმპიადის შედეგების მიხედვით შეედგინათ ნაკრები გუნდი, რომელიც მონაწილეობას მიიღებდა საერთაშორისო ოლიმპიადაზე.

შემდეგი ოლიმპიადა, რომელიც 1967 წელს ჩატარდა თბილისში, უკვე იწოდებოდა I საკავშირო ოლიმპიადად. ოლიმპიადების ნუმერაციის ათვლა თბილისის ოლიმპიადიდან დაკავშირებულია იმასთან, რომ ამ წელს შეიქმნა საბჭოთა კავშირის განათლების სამინისტრო, რომელმაც თავის თავზე აიღო ოლიმპიადების მთავარი ორგანიზატორის ფუნქცია.

1959 წლიდან 1989 წლამდე, ყოფილი საბჭოთა კავშირის არსებობის პერიოდში, საბჭოთა კავშირის ნაკრების შემადგენლობაში საქართველოდან მოხვდნენ და საერთაშორისო ოლიმპიადაში მონაწილეობა მიიღეს ძმებმა — ამირან და მურმან ამბროლაძეებმა.

ამირან ამბროლაძემ 1977 წელს მე-19 საერთაშორისო ოლიმპიადაზე, იუგოსლავიაში, ვერცხლის მედალი დაიმსახურა, ხოლო მურმანი 1979 წელს, 21-ე ოლიმპიადაზე, დიდ ბრიტანეთში, საპატიო დიპლომით დაჯილდოვდა (აღსანიშნავია, რომ მას მხოლოდ ერთი ქულა დააკლდა ბრინჯაოს მედლამდე), იგი ნაკრების პირველი ნომერი და კაპიტანი იყო.

1989 წლის ცნობილი მოვლენების შემდეგ, საქართველოს აღარ მიუღია მონაწილეობა ე.წ. საკავშირო ოლიმპიადებში. საქართველომ, როგორც დამოუკიდებელმა სახელმწიფომ, პირველად 1993 წელს მიიღო მონაწილეობა 34-ე საერთაშორისო ოლიმპიადაში, რომელიც თურქეთში, ქალაქ სტამბულში ჩატარდა. პირველივე ცდა წარმატებით დამთავრდა. ერთი ვერცხლის, სამი ბრინჯაოს მედალი და ორი დიპლომი — ასეთი იყო საქართველოს ნაკრების მონაგარი ამ ოლიმპიადაზე.

1993 წლიდან 2017 წლამდე საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდი რეგულარულად მონაწილეობს საერთაშორისო მათემატიკურ ოლიმპიადებში და ამ ხნის განმავლობაში საქართველოს ნაკრების მონაპოვარია: 3 ოქროს მედალი, 18 ვერცხლის მედალი, 57 ბრინჯაოს მედალი და 48 საპატიო სიგელი.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ოქროს მედლები მოპოვებული აქვთ: დავით ჩხაიძეს (1996 წელს), რატი გელაშვილს (2007 წელს) და ალექსანდრე საათაშვილს (2017 წელს).

ვერცხლის მედლები მოპოვებული აქვთ: ირაკლი ნადირაძეს (1993), დავით ჩხაიძეს (1995), ირაკლი მანელიძეს — 2-ჯერ (1997, 1999), გიორგი მუტაფიანს (2000), მიხეილ მებონიას (2001), ნიკოლოზ ჯიმშელეიშვილს (2003), ზვიად მეტრეველს (2006), გიორგი არაბიძეს (2007), ბექა ერგემლიძეს (2009), ლაშა ლაკირბაიას — 2-ჯერ (2009, 2010), ნიკოლოზ მაჭავარიანს (2009), ლაშა ფერაძეს (2010), ზაურ მეშველიანს — 2-ჯერ (2014, 2015).

ბრინჯაოს მედლები მოპოვებული აქვთ: ვახტანგ ცისკარიძეს (1993), გიორგი კოვალენკოს (1993), ირაკლი ხუციშვილს (1993), დავით გაბელაიას (1994), დავით ჩხაიძეს (1994), არჩილ გაჩეჩილაძეს (1996), ზურაბ დარსაძეს — 2-ჯერ (1996, 1997), ლაშა პაიჭაძეს (1997), მანანა კუპრეიშვილს — 2-ჯერ (1997, 1998), ირაკლი მანელიძეს (1998), ემზარ ოთხოზორიას (1998), ლერი ბანცურს (1999), შოთა ღვინეფაძეს — 2-ჯერ (2001, 2002), არჩილ ცისკარიძეს (2001), გიორგი მუტაფიანს (2001), ნიკა ჯიმშელეიშვილს (2002), გიორგი ორველაშვილს — 2-ჯერ (2003, 2004), გიორგი მერაბიშვილს (2003), ივანე გოქაძეს (2004), ავთანდილ რუხაძეს (2004), ირაკლი მერაბიშვილს — 2-ჯერ (2004, 2005), ალექსანდრე ლომაძეს — 2-ჯერ (2004, 2005), ზვიად მეტრეველს (2005), გიორგი მარიამიძეს (2005), ირაკლი ჩიტაიას (2006),

რატი გელაშვილს (2006), აკაკი მამაგეიშვილს (2006), გიორგი ნადირაძეს (2007), ლევან ვარამაშვილს – 2-ჯერ (2008, 2009), ბექა ერგემლიძეს (2008), ლაშა ფერაძეს – 2-ჯერ (2008, 2009), ლაშა ლაკირბაიას (2008), ცოტნე ტაბიძეს – 2-ჯერ (2008, 2010), გიგა გუმბერიძეს (2010), გიორგი გიგლემიანს (2011), აკაკი მარგველაშვილს – 2-ჯერ (2011, 2013), გიორგი გონაშვილს – 2-ჯერ (2012, 2014), გიორგი სვანაძეს – 2-ჯერ (2013, 2014), ალექსანდრე საათაშვილს (2015), გიორგი კლდიაშვილს (2015), გიორგი ხოსროშვილს (2015), ალექსანდრე საათაშვილს (2016).

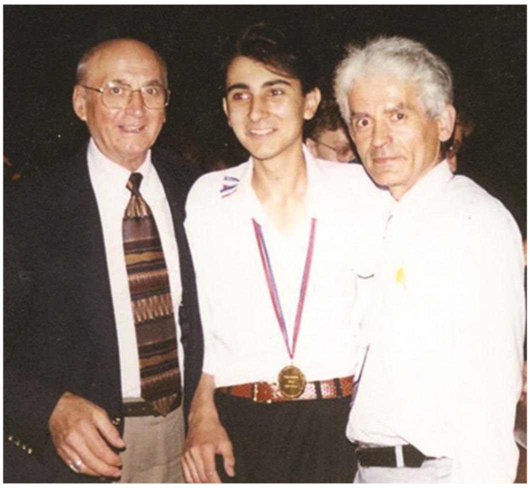
საპატიო სიგელები მოპოვებული აქვთ: დავით გაბელაიას (1993), კახაბერ პაიჭაძეს (1994, 1995), გიორგი კოვალენკოს (1994), ლაშა ჯიქიას (1994), აკაკი ტიკარაძეს (1995), ლაშა პაიჭაძეს (1996), ემზარ ოთხოზორიას (1997), მარიამ ავალიშვილს (1997), ირაკლი გოგიას (1998, 2000), ლიკა აბესაძეს (1998), დავით ლომიაშვილს (1999), მიხეილ მებონიას (2000), დავით სიჭინავას (2000), არჩილ ცისკარიძეს (2000), შოთა ცისკარიძეს (2002), დიმიტრი არაბიძეს (2002), ივანე გოქაძეს (2003), ბახვა ხაჩატუროვს (2003), სალომე ვახტანგიშვილს (2003), დავით ცირეკიძეს (2004, 2005), გიორგი ნადირაძეს (2006), გიორგი გიორგაძეს (2006), ლევან ვარამაშვილს (2007), ნიკოლოზ მაჭავარიანს (2007), ბექა ერგემლიძეს (2007), ნიკოლოზ სალიას (2008), ცოტნე ტაბიძეს (2009), გიორგი გიგლემიანს (2010), ნოდარ ამბროლაძეს (2010), გიგა გუმბერიძეს (2011), გელა მაღალთაძეს (2011, 2012, 2013), აკაკი მარგველაშვილს (2012), თორნიკე მანძულაშვილს (2012, 2013), ამირან მელიას (2013), ზაურ მეშველიანს (2013), საბა ძმანაშვილს (2014, 2015), მიხეილ სოხაშვილს (2014), დავით ბეჟანიშვილს (2016), ბაკურ ცუცხაშვილს (2016), საბა ლეპსვერიძეს (2016), ელენე ყარანგოზიშვილს (2016).

ნაკრების მწვრთნელები სხვადასხვა დროს იყვნენ: კონსტანტინე ცისკარიძე, როინ ნადირაძე, გიორგი ბარელაძე, ლერი გოგოლაძე, გიორგი ჭელიძე და გივი ნადიბაიძე.

საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრების შედეგები წლების მიხედვით მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადებზე

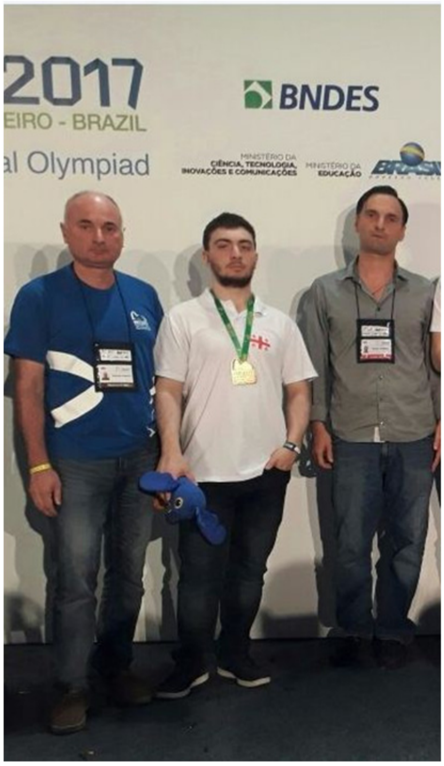
წელი	ოლიმ-პიადა	ჩატარების ადგილი	ოქროს მედალი	ვერცხლის მედალი	ბრინჯაოს მედალი	საპატიო სიგელი
1993	34	თურქეთი	0	1	3	1
1994	35	ჰონგ-კონგი	0	0	2	3
1995	36	კანადა	0	1	0	2
1996	37	ინდოეთი	1	0	2	1
1997	38	არგენტინა	0	1	3	2
1998	39	ტაივანი	0	0	3	2
1999	40	რუმინეთი	0	1	1	1
2000	41	კორეა	0	1	0	4
2001	42	აშშ	0	1	3	0
2002	43	ინგლისი	0	0	2	2
2003	44	იაპონია	0	1	2	3
2004	45	საბერძნეთი	0	0	5	1
2005	46	მექსიკა	0	0	4	1
2006	47	სლოვენია	0	1	3	2
2007	48	ვიეტნამი	1	1	1	3
2008	49	ესპანეთი	0	0	5	1
2009	50	გერმანია	0	3	2	1
2010	51	ყაზახეთი	0	2	2	2

2011	52	ნიდერლანდები	0	0	2	2
2012	53	არგენტინა	0	0	1	3
2013	54	კოლუმბია	0	0	2	4
2014	55	სამხრეთ აფრიკა	0	1	2	2
2015	56	ტაილანდი	0	1	3	1
2016	57	ჰონგ-კონგი	0	0	1	4
2017	58	ბრაზილია	1	2	3	0
2018	59	რუმინეთი	0	1	5	0
სულ:			3	19	62	48



1997 წელი, არგენტინა
ოქროსმედალოსანი — დავით ჩხაიძე
გუნდის ლიდერი — კოტე ცისკარიძე (მარჯვნივ)

2007 წელი, ვიეტნამი
ოქროსმედალოსანი — რატი გელაშვილი



2017 წელი, ბრაზილია
ოქროს მედალოსანი - ალექსანდრე საათაშვილი.
გუნდის ლიდერი - გიორგი ჭელიძე (მარჯვნივ),
ასისტენტი - უშანგი გოგინავა (მარცხნივ).

ლიტერატურა

1. მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადების ოფიციალური ვებგვერდი: www.imo-official.org/organizers.aspx
2. Квант, 1979, N11, 61-62. С. Вашакмадзе. У истоков олимпиадного движения.
3. ენციკლოპედია „საქართველო“, ტ.3, გვ.200. ვაშაყმაძე.

ავტორის ელექტრონული მისამართი: liashengelia@gmail.com

ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები საერთაშორისო ოლიმპიადებში

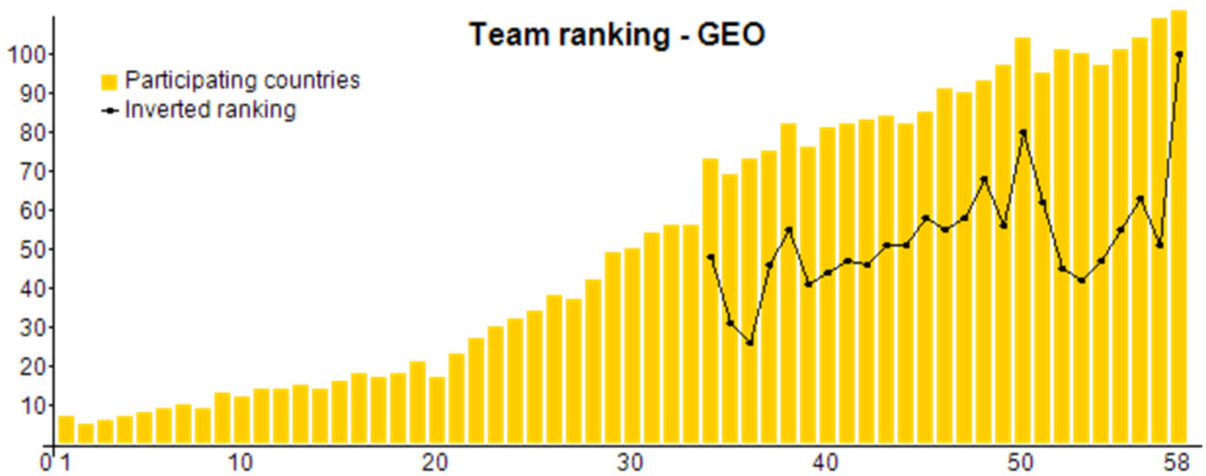
გიორგი ჭელიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების ლიდერი,
ასისტენტ-პროფესორი,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

გივი ნადიბაიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების თანალიდერი,
ასისტენტ-პროფესორი,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

58-ე საერთაშორისო ოლიმპიადა მათემატიკაში ჩატარდა ბრაზილიის ქალაქ რიო-დე-ჟანეიროში, 2017 წლის ივლისის თვეში (IMO 2017). ასპარეზობაში მონაწილე გუნდები 6-6 მოსწავლისაგან შედგებოდა. საქართველოს ნაკრებს წარმოადგენდნენ: ალექსანდრე საათაშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), საბა ლეფსვერიძე (კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), ნიკოლოზ ბირკაძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-9 კლასი), დავით ხვედელიძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი), დავით თათოშვილი (ვეკუას სახ. №42 საჯარო სკოლა, მე-12 კლასი) და ირაკლი შალიბაშვილი (ვეკუას სახ. №42 საჯარო სკოლა, მე-12 კლასი).



საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდი მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადებში მონაწილეობს 1993 წლიდან. 2017 წლის ოლიმპიადაზე საქართველო ოცდამეხუთედ მონაწილეობდა და განსაკუთრებით უნდა აღინიშნოს, რომ ეს იყო საუკეთესო გამოსვლა ძირითადი მახასიათებლების მიხედვით. პირველად საქართველოს ისტორიაში, გუნდის ექვსივე წევრმა დაიმსახურა მედალი (1 ოქრო, 2 ვერცხლი და 3 ბრინჯაო). 111 ქვეყნიდან საქართველოს ნაკრებმა გუნდურ შეჯიბრში მე-12 ადგილი (აქამდე საუკეთესო შედეგი იყო 25-ე) დაიკავა. წინა გვერდზე დიაგრამაზე ნაჩვენები 58-ე პოზიცია გულისხმობს 2017 წელს ჩატარებულ 58-ე საერთაშორისო ოლიმპიადას მათემატიკაში. საქართველომ პირველად მიიღო მონაწილეობა 34-ე ოლიმპიადაში.

ოქროს მედალი დაიმსახურა ალექსანდრე საათაშვილმა. მან ინდივიდუალურ შეჯიბრში მე-5 ადგილი დაიკავა, რაც ასევე საუკეთესო შედეგია ჩვენი ქვეყნისთვის. განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია მე-9-კლასელ ნიკოლოზ ბირკაძის შედეგი, რომელიც პირველად მონაწილეობდა ოლიმპიადაზე და ვერცხლის მედლის მფლობელი გახდა. ვერცხლის მედალი დაიმსახურა საბა ლეფსვერიძემ, ხოლო ბრინჯაოს მედლებით დაჯილდოვდნენ: დავით ხვედელიძე, დავით თათოშვილი და ირაკლი შალიბაშვილი.

საქართველოს ოლიმპიური ნაკრების ფორმირება მოხდა ორი შესარჩევი ტურის შედეგის საფუძველზე. შესარჩევ წერებს ადმინისტრირებას უწევდა საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო. მკაცრად რეგლამენტირებულ 2-ტურიან წერით გამოცდებში მონაწილეობის უფლება კი მოიპოვა რესპუბლიკური სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის დასკვნითი ტურის შედეგებზე დაყრდნობით გამოვლენილმა 21-მა საუკეთესო მოსწავლემ. მათ შორის იყო თორმეტი მეთერთმეტე-მეთორმეტეკლასელი და ცხრა მეათეკლასელი. შესარჩევი წერების საფუძველზე დაკომპლექტდა 6-მოსწავლიანი ნაკრები.

განათლების და მეცნიერების სამინისტროდან ამ პროცესს ადმინისტრირებას უწევდა ქალბატონი ნინო ცანდიშვილი. ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების დაკომპლექტების შემდეგ, ერთთვიანი საწვრთნელი შეკრება ჩატარდა კომაროვის სკოლაში ყოველდღიური 6-საათიანი მეცადინეობებით. ბოლო ეტაპზე კი საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრომ უზრუნველყო ნაკრების წევრების ერთკვირიანი წვრთნები ბაკურიანში, სადაც მოსწავლეებს უტარდებოდათ სატრენინგო წერები საერთაშორისო ოლიმპიადების პირობების გათვალისწინებით.

გუნდის ლიდერისა და თანალიდერის გარდა, მოსწავლეთა მომზადებაში ასევე მონა-

ქვემოთ დიაგრამაზე კი ნაჩვენებია 2017 წლის მონაწილეთა შედეგები

Contestant [♀♂]	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total	Rank Abs.	Rank Rel.	Award
Team results	42	22	0	42	18	3	127	12	90.00%	G, S, S, B, B, B
Aleksandre Saatashvili	7	7	0	7	7	3	31	5	99.35%	Gold medal
Saba Lepsveridze	7	7	0	7	2	0	23	64	89.74%	Silver medal
Nikoloz Birkadze	7	1	0	7	7	0	22	72	88.44%	Silver medal
Davit Khvedelidze	7	4	0	7	0	0	18	139	77.52%	Bronze medal
Davit Tatoshvili	7	3	0	7	0	0	17	188	69.54%	Bronze medal
Irakli Shalibashvili	7	0	0	7	2	0	16	265	57.00%	Bronze medal

Leader: **George Chelidze**
Deputy leader: **Givi Nadibaidze**

წილეობდნენ გამოცდილი ყოფილი ოლიმპიელები: ზაურ მეშველიანი, გიორგი გონაშვილი და გიორგი სვანაძე.

საქართველოს ნაკრები გუნდი ქალაქ რიო-დე-ჟანეიროში ჩავიდა 16 ივლისს. საერთაშორისო ოლიმპიადას ხელმძღვანელობს ჟიური, რომლის წევრები არიან ქვეყნების წარმომადგენლები. ჟიურის შეკრება ჩატარდა ქალაქ რიო-დე-ჟანეიროში, სადაც ჟიურიმ სხდომებზე რამდენიმე ათეული ამოცანიდან (short list) შეარჩია 6 ამოცანა, რომლებიც გადანაწილდა 3–3 ამოცანად და მიეცათ მოსწავლეებს ორ ტურად, ზედიზედ ორ დღეს. წერები ჩატარდა 18 და 19 ივლისს. შემდეგ დღეებში კი ჟიურის წევრებმა კოორდინატორებთან ერთად მოახდინეს ნაწერების შეფასება და ქულების შეჯამება. ქვემოთ მოვიყვანთ იმ ამოცანებს, რომლებიც მიეცათ მოსწავლეებს წერებზე:

ამოცანა 1. *ყოველი მთელი $a_0 > 1$ რიცხვისთვის, განსაზღვრულია $a_0, a_1, a_2, \ldots$ მიმდევრობა შემდეგნაირად:*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, \text{ თუ } \sqrt{a_n} \text{ მთელი რიცხვია,} \\ a_n + 3, \text{ თუ } \sqrt{a_n} \text{ არაა მთელი რიცხვი,} \end{cases}$$

განსაზღვრეთ a_0-ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, რომლისთვისაც არსებობს რიცხვი A ისეთი, რომ $a_n = A$ ტოლობა სრულდება n-ის უსასრულო რაოდენობა მნიშვნელობისთვის.

ამოხსნა: ცხადია, a_{n+1} მნიშვნელობა დამოკიდებულია მხოლოდ a_n-ის მნიშვნელობაზე. ამიტომ, თუ რომელიმე განსხვავებული n და m ინდექსებისთვის $a_n = a_m$, მაშინ მიმდევრობა, რაღაც ნომრიდან დაწყებული, იქნება პერიოდული. ამრიგად, ჩვენი ამოცანაა ვიპოვოთ a_0-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მიმდევრობა, რაღაც ნომრიდან დაწყებული, გახდება პერიოდული.

ფაქტი 1. თუ $a_n \equiv -1 (mod\ 3)$, მაშინ ყოველი $m > n$, a_m არაა სრული კვადრატი. ამიტომ მიმდევრობა n ნომრიდან დაწყებული ზრდადია და, ამრიგად, არაა პერიოდული.

ფაქტი 2. თუ $a_n \not\equiv -1 (mod\ 3)$ და $a_n > 9$, მაშინ არსებობს ინდექსი $m > n$ ისეთი, რომ $a_m < a_n$.

დამტკიცება: ვთქვათ, t^2 არის a_n-ზე ნაკლები უდიდესი სრული კვადრატი. ვინაიდან $a_n > 9$, ამიტომ $t \geq 3$. პირველი სრული კვადრატი $a_n, a_n + 3, a_n + 6, \ldots$ მიმდევრობაში იქნება ან $(t + 1)^2$, ან $(t + 2)^2$, ან$(t + 3)^2$ და, ამრიგად, არსებობს ინდექსი $m > n$ ისეთი, რომ $a_m \leq t + 3 < t^2 < a_n$. რ.დ.გ.

ფაქტი 3. თუ $a_n \equiv 0 (mod\ 3)$, მაშინ არსებობს ინდექსი $m > n$ ისეთი, რომ $a_m = 3$.

დამტკიცება: შევნიშნოთ მიმდევრობის შემდეგი მარტივი თვისებები: 3-ის ჯერადი

წევრის წინ აუცილებლად 3-ის ჯერადი წევრია; თუ $a_n \in \{3,6,9\}$, მაშინ მიმდევრობა გახდება პერიოდული, კერძოდ, გაგრძელდება შემდეგნაირად: 3, 6, 9, 3, 6, 9, ...,; თუ $a_n > 9$, მაშინ $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ სიმრავლის მინიმალური ელემენტი $a_j \le 9$. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ფაქტი 2-ის გამო, a_j არ იქნება მინიმალური. ამრიგად, ვღებულობთ, რომ $a_j \in \{3,6,9\}$, ე.ი. $a_j = 3$. რ.დ.გ.

ფაქტი 4. თუ $a_n \equiv 1(mod\ 3)$, მაშინ არსებობს ინდექსი m ისეთი, რომ $a_m \equiv -1(mod\ 3)$.

დამტკიცება: თუ $a_n = 4$, მაშინ $a_{n+1} = 2 \equiv$ $\equiv -1(mod\ 3)$ და ფაქტი 4 მართებულია. თუ $a_n = 7$, მაშინ შემდეგი წევრები იქნება 10,13,16,4,2,... ანუ ფაქტი 4 ისევ მართებულია. თუ $a_n > 10$ კვლავ განვიხილოთ $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ სიმრავლის მინიმალური a_j ელემენტი. თუ $a_j \equiv 1(mod\ 3)$, მაშინ ფაქტი 2-ისა და a_j მინიმალურობის გამო $a_j \le 9$. ანუ $a_j \in \{4,7\}$, ამრიგად $a_m = 2 < a_j$ რომელიღაც $m > j$, რაც ეწინააღმდეგება a_j-ის მინიმალურობას. ამრიგად, უნდა გვქონდეს $a_j \equiv -1(mod\ 3)$. რ.დ.გ.

მივიღეთ, რომ, თუ a_0 არის 3-ის ჯერადი, მაშინ მიმდევრობა გახდება პერიოდული, კერძოდ, რაღაც ნომრიდან დაწყებული, გვექნება წევრები 3, 6, 9, 3,6, 9,...; თუ $a_0 \equiv -1(mod\ 3)$, მაშინ მიმდევრობა მკაცრად ზრდადია; ხოლო, თუ $a_0 \equiv 1(mod\ 3)$,მაშინ მიმდევრობა, რაღაც ნომრიდან დაწყებული, გახდება ზრდადი.

პასუხი: ყველა 3-ის ჯერადი მთელი დადებითი რიცხვი.

ამოცანა 2. ვთქვათ, R არის ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. იპოვეთ ყველა $f: R \to R$ ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი ნამდვილი x და y რიცხვებისთვის:

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy) \qquad (*).$$

ამოხსნა: შევნიშნოთ, რომ, თუ $f(x)$ წარმოადგენს (*)-ის ამონახსნს, მაშინ $g(x) =$ $= -f(x)$-იც (*)-ის ამონახსნია. ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $f(0) \le 0$.

ყოველი ფიქსირებული $x \ne 1$-თვის შევარჩიოთ $y \in R$ ისეთი, რომ $x + y = xy$, ანუ, ვთქვათ, $y = \frac{x}{x-1}$, მაშინ (*) მიიღებს სახეს:

$$f\left(f(x)f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = 0 \text{ ყოველი } x \ne 1. \qquad (1)$$

კერძოდ, თუ $x = 0$, მაშინ (1)-დან ვღებულობთ, რომ:

$$f((f(0))^2) = 0. \qquad (2)$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა, როცა $f(0) = 0$ და როცა $f(0) < 0$.

1. ვთქვათ, $f(0) = 0$. თუ (*)-ში ავიღებთ $y = 0$, მაშინ მივიღებთ $f(x) = 0$ ყოველი $x \in R$-თვის. ამრიგად, ამ შემთხვევაში, ცხადია, გვაქვს (*)-ის ამონახსნი $f(x) = 0, x \in R$.
2. ახლა, ვთქვათ, $f(0) < 0$.

ლემა 1. *$f(1) = 0$. თუ $f(a) = 0$, მაშინ $a = 1$ და $f(0) = -1$.* (3)

დამტკიცება: უნდა ვაჩვენოთ, რომ რიცხვი 1 არის f-ის ერთადერთი ნული. ჯერ შევნიშნოთ, რომ (2)-ის ძალით f-ს გააჩნია ერთი ნული მაინც, კერძოდ, $a = (f(0))^2$. თუ $a \ne 1$, მაშინ (1)-ში $x = a$-ს ჩასმით ვღებულობთ $f(0) = 0$, რაც წინააღმდეგობაა. ამრიგად, გვაქვს, რომ $a = (f(0))^2 = 1$ და რადგანაც $f(0) < 0$, ამიტომ $f(0) = -1$. ლემა 1 დამტკიცებულია.

ჩავსვათ $y = 1$ (*)-ში. ლემა 1 -ის გამო გვექნება $f(f(x)f(1)) + f(x+1) = f(x)$ ანუ $f(0) + f(x+1) = f(x)$ და ე.ი. $f(x+1) = f(x) + 1$ ყოველი $x \in R$-თვის. მარტივი ინდუქციით ვღებულობთ, რომ:

$f(x+n) = f(x) + n$ ნებისმიერი x-თვის და ყოველი მთელი n-თვის. (4)

ლემა 2. *f არის ინექციური ფუნქცია, ანუ, თუ $a \ne b$, მაშინ $f(a) \ne f(b)$.*

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო, ანუ, ვთქვათ, არსებობს ორი განსხვავებული რიცხვი a და b ისეთი, რომ$f(a) = f(b)$. მაშინ (4)-ის გამო ყოველი მთელი N რიცხვისთვის $f(a+N+1) = f(b+N) + 1$. ავიღოთ N ისეთი, რომ შესრულდეს უტოლობა $N + b < 0$. მაშინ $t^2 - (a+N+1)t + b + N = 0$ კვადრატულგანტოლების დისკრიმინანტი მეტია ნულზე და, ამრიგად, მისი ამონახსენი x_0, $y_0 \in R$ აკმაყოფილებს ტოლობებს $x_0 + y_0 = a + N + 1$, $x_0 y_0 = b + N$. ამ ტოლობების გათვალისწინებით ადვილად ვღებულობთ, რომ $(x_0 - 1)(y_0 - 1) = b - a$. ვინაიდან $a \ne b$, ამიტომ

$x_0 \neq 1$ და $y_0 \neq 1$. ახლა ჩავსვათ x_0 და y_0 (*)-ში, გვექნება:

$$f\big(f(x_0)f(y_0)\big) + f(a+N+1) = f(b+N).$$

საიდანაც ვღებულობთ $f\big(f(x_0)f(y_0)\big)+1=0$ ანუ, (4)-ის ძალით $f(f(x_0)f(y_0)+1)=0$ და (3)-ის ძალით $f(x_0)f(y_0)=0$. მაგრამ, ლემა 1-ის ძალით, f-ის ნული არის მხოლოდ 1. ამრიგად, მივიღეთ წინააღმდეგობა. ლემა 2 დამტკიცებულია.

ახლა ყოველი $t \in R$ ჩავსვათ $(x,y)=(t,-t)$ თავდაპირველ (*) განტოლებაში. (3),(4)-ისა და ინექციურობის გათვალისწინებით ადვილად ვღებულობთ, რომ:

$$f(t)f(-t) = -t^2+1. \tag{5}$$

ანალოგიურად, (*)-ში $(x,y)=(t,1-t)$-ს ჩასმით გვექნება $f(t)f(1-t)=t(1-t)$ და რადგანაც (4)-ის ძალით $f(1-t)=1+f(-t)$, ამიტომ $f(t)+f(t)f(-t)=t(1-t)$. (5)-ის გამო ვღებულობთ, რომ $f(t)=t-1$. შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ ეს ფუნქცია მართლაც (*)-ის ამონახსნია.

პასუხი: $f(x)=0$ ან $f(x)=x-1$ ან $f(x)=1-x, x \in R$.

ამოცანა 3. *მონადირე და უჩინარი კურდღელი თამაშობენ თამაშს სიბრტყეზე. კურდღლის საწყისი წერტილი R_0 და მონადირის საწყისი წერტილი H_0 ერთი და იგივეა. თამაშის $n-1$ რაუნდის შემდეგ კურდღელი იმყოფება R_{n-1} წერტილში, მონადირე კი იმყოფება H_{n-1} წერტილში. თამაშის მე-n რაუნდში შემდეგი სამი რამ ხდება მოცემული თანმიმდევრობით:*

(1) *კურდღელი გადაადგილდება უჩინრად R_n წერტილში ისე, რომ მანძილი R_{n-1} და R_n წერტილებს შორის ზუსტად 1-ის ტოლია.*

(2) *კურდღლის საძებნი მოწყობილობა უჩვენებს მონადირის R_n' წერტილს. ცნობილია, რომ საძებნი მოწყობილობა იძლევა მხოლოდ იმის გარანტიას, რომ მანძილი R_n' და R_n წერტილებს შორის არ აღემატებოდეს 1-ს.*

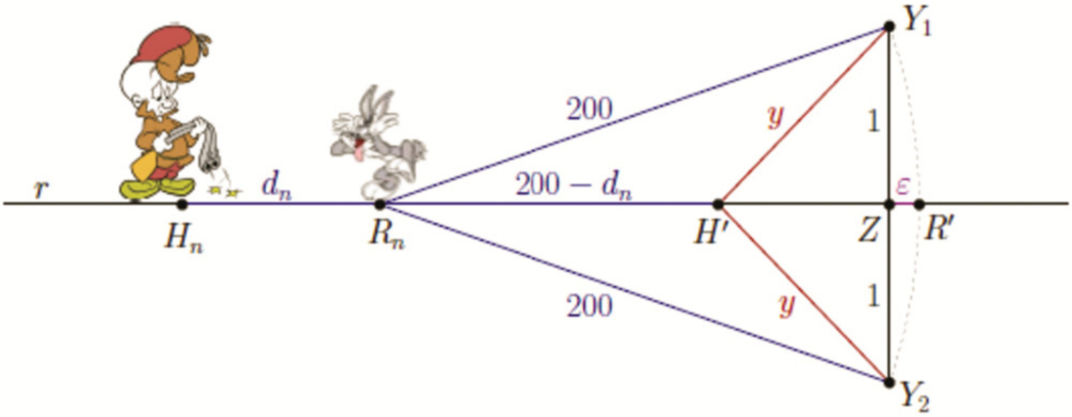
(3) *მონადირე გადაადგილდება, კურდღლისთვის ხილულად, ისეთ H_n წერტილში, რომ მანძილი H_{n-1} და H_n წერტილებს შორის არის ზუსტად 1.*

ყოველთვის შეუძლია თუ არა მონადირეს, როგორც არ უნდა იმოძრაოს კურდღელმა და როგორი წერტილებიც არ უნდა უჩვენოს საძებნმა მოწყობილობამ, შეარჩიოს თავისი გადაადგილებები ისე, რომ 10^9 რაუნდის შემდეგ ჰქონდეს გარანტია, რომ მასა და კურდღელს შორის მანძილი არ აღემატება 100-ს?

ამოხსნა: ვაჩვენოთ, რომ მონადირეს ასეთი სტრატეგიის შემუშავება არ შეუძლია. ამისათვის ავხსნათ, რომ არსებობს კურდღლის ისეთი გადაადგილებები და კურდღლის საძებნი მოწყობილობის ისეთი ჩვენებები, როცა მონადირეს არ ექნება იმის გარანტია, რომ 10^9 რაუნდის შემდეგ მასა და კურდღელს შორის მანძილი ნაკლები იქნება 100-ზე.

ვთქვათ, მონადირესა და კურდღელს შორის მანძილი 10^9 რაუნდის შემდეგ არის d_n. ცხადია, რომ, თუ $d_n \geq 100$ რომელიღაც $n < 10^9$ რაუნდის შემდეგ, მაშინ კურდღელი „მოგებულია". მართლაც, თუ ის იმოძრავებს მონადირესა და მასზე გამავალი წრფის გასწვრივ მონადირის საპირისპიროდ, კურდღელი სულ შეინარჩუნებს (ან გაზრდის) მანძილს მასა და მონადირეს შორის.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ, თუ რომელიღაც რაუნდის შემდეგ $d_n < 100$, მაშინ კურდღელს



სულ შეუძლია, კურდღლის საძებნი მოწყობილობის „დახმარებით“, გაზარდოს $d_n{}^2$-ის მნიშვნელობა 200 რაუნდის შემდეგ მინიმუმ $\frac{1}{2}$ -ით. ამრიგად, $d_n{}^2$ მიაღწევს 10^4 არაუმეტეს $2 \cdot 10^4 \cdot 200 < 10^9$ რაუნდის შემდეგ და, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, შეინარჩუნებს (ან გაზრდის) ამ მანძილს.

ვთქვათ, მონადირე და კურდღელი, შესაბამისად, იმყოფება H_n და R_n წერტილებში. წარმოვიდგინოთ, რომ უეცრად კურდღელი ხდება ხილული მონადირისთვის და შემდეგ ისევ უჩინარი, ანუ წარმოვიდგინოთ, რომ წამიერად ის ენახვება მონადირეს და შემდეგ ისევ ხდება უჩინარი. ამრიგად, შეგვიძლია დავივიწყოთ მოწყობილობის ადრეული ჩვენებები. ვთქვათ, r არის წრფე H_nR_n, ხოლო Y_1 და Y_2 არის ორი წერტილი, რომლებიც დაშორებულია 1 ერთეულით r წრფიდან, ხოლო 200 ერთეულით — კურდღლიდან.

კურდღლის სტრატეგიაა აირჩიოს ერთ-ერთი Y_1 და Y_2 წერტილთაგან და გააკეთოს 200 სვლა მისი მიმართულებით. ამ შემთხვევაში შეიძლება ისე მოხდეს, რომ მოწყობილობა სულ უჩვენებდეს კურდღლის პროექციას r წრფეზე (მანძილი, ცხადია, ერთზე ნაკლებია კურდღლის რეალურ მდებარეობასა და მოწყობილობის მიერ ნაჩვენებ წერტილამდე). რა სტრატეგია აქვს მონადირეს? ცხადია, მისთვის საუკეთესოა წავიდეს 200 ერთეულით r წრფის გასწვრივ მარჯვნივ, ანუ მოწყობილობის მიერ ნაჩვენები წერტილების მიმართულებით. მართლაც, სხვა სტრატეგიის შემთხვევაში, მისი პროექცია წრფეზე იქნება უფრო მარცხნივ H' წერტილთან მიმართებაში და, თუ ის წრფის დაბლა არაა, მაშინ მასა და Y_2 წერტილს შორის მანძილი მეტია $H'Y_2$, ხოლო, თუ მონადირე წრფის მაღლა არაა, მაშინ მასა და Y_1 წერტილს შორის მანძილი უფრო შორსაა, ვიდრე $H'Y_1$ (200 სვლის შემდეგ კურდღელი ხომ შეიძლება იმყოფებოდეს როგორც Y_1, ასევე Y_2 წერტილში). ამრიგად, რა სტრატეგიაც არ უნდა აირჩიოს მონადირემ, მას არ ექნება იმის გარანტია, რომ მასა და კურდღელს შორის მანძილი 200 რაუნდის შემდეგ ნაკლები იქნება, ვიდრე $y = H'Y_1 = H'Y_2$. შევაფასოთ y^2. ვთქვათ, Z არის Y_1Y_2 მონაკვეთის შუა წერტილი, ხოლო R'არის ისეთი წერტილი, რომ $R_nR' = 200$ და $\varepsilon = ZR'$. გვაქვს, $y^2 = 1 + H'Z^2 = 1 + (d_n - \varepsilon)^2$, სადაც:

$$\varepsilon = 200 - R_nZ = 200 - \sqrt{200^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{200 + \sqrt{200^2 - 1}} > \frac{1}{400}.$$

კერძოდ, $\varepsilon^2 + 1 = 400\varepsilon$, ამრიგად:

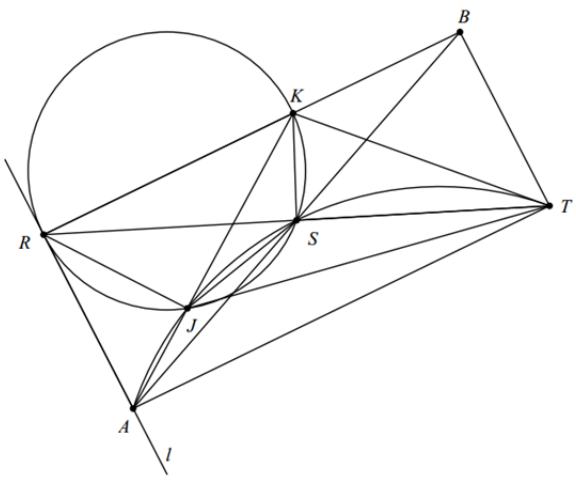
$$y^2 = d_n{}^2 - 2\varepsilon d_n + \varepsilon^2 + 1 = d_n{}^2 + \varepsilon(400 - 2d_n).$$

ვინაიდან $\varepsilon > \frac{1}{400}$ და $d_n < 100$, ამიტომ $y^2 > d_n{}^2 + \frac{1}{2}$. ამრიგად მივიღეთ, რომ კურდღლის ზემოთ მოყვანილი სტრატეგიის შემთხვევაში, თუ საძებნი მოწყობილობა უჩვენებს წერტილებს r წრფეზე, რა სტრატეგიითაც არ უნდა იმოქმედოს მონადირემ, კურდღელს 200 რაუნდის შემდეგ შეუძლია მიაღწიოს, რომ $d_{n+200}{}^2 > d_n{}^2 + \frac{1}{2}$.

პასუხი: ასეთი სტრატეგია მონადირისთვის არ არსებობს.

ამოცანა 4. ვთქვათ, R და S არის Ω წრეწირის ისეთი ორი განსხვავებული წერტილი, რომ RS არაა დიამეტრი. ვთქვათ, l არის Ω წრეწირისადმი R წერტილში გავლებული მხები. T წერტილი არის ისეთი, რომ Sარის RT მონაკვეთის შუა წერტილი. J წერტილი არჩეულია Ω წრეწირის მცირე RS რკალზე ისე, რომ JST სამკუთხედზე შემოხაზული Γ წრეწირი კვეთს l-ს ორ განსხვავებულ წერტილში. ვთქვათ, A არის Γ წრეწირისა და l-ის ის საერთო წერტილი, რომელიც უფრო ახლოსაა R-თან. AJ წრფე კვეთს Ω-ს კიდევ K წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ KT წრფე არის Γ წრეწირის მხები.

ამოხსნა: ვინაიდან $\angle JKR = \angle JSR = \angle JAT$, ამიტომ RK პარალელურია AT-სი. ვთქვათ, AS კვეთს RK-ს Bწერტილში. რადგანაც, S არის



RT-ს შუა წერტილი, ამიტომ $ATBR$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

ვინაიდან, $\angle SKR = \angle ART = \angle RTB$, ვღებულობთ, რომ $STBK$ ციკლურია და ამიტომ $\angle KTS = \angle KBS = \angle SAT$. ეს კი ნიშნავს, რომ KTარის Γ-ს მხები. რ.დ.გ.

ამოცანა 5. მოცემულია მთელი რიცხვი $N \geq 2$. ერთ რიგში დგას $N(N+1)$ ფეხბურთელი, რომელთაგან არცერთ ორს ერთნაირი სიმაღლე არ აქვს. მწვრთნელს სურს გაიყვანოს რიგიდან $N(N-1)$ მოთამაშე ისე, რომ $2N$ ფეხბურთელისგან დარჩენილ ახალ რიგში შესრულდეს შემდეგი N პირობა:

1) არავინ დგას ორ ყველაზე მაღალ ფეხბურთელს შორის,
2) არავინ დგას სიმაღლით მესამე და სიმაღლით მეოთხე ფეხბურთელს შორის,

N) არავინ დგას ორ ყველაზე დაბალ ფეხბურთელს შორის.

დაამტკიცეთ, რომ მწვრთნელს ყოველთვის შეუძლია ამის გაკეთება.

ამოხსნა: დავყოთ მოთამაშეები N ჯგუფად სიმაღლის მიხედვით: პირველ ჯგუფში შევიყვანოთ $N+1$ ყველაზე მაღალი მოთამაშე, მეორეში შემდეგი ყველაზე მაღალი $N+1$ მოთამაშე და ა. შ., ბოლო ჯგუფში შევიყვანოთ $N+1$ ყველაზე დაბალი მოთამაშე.

ახლა მოვყვეთ მარცხნიდან მარჯვნივ მოცემულ რიგს და გავჩერდეთ მაშინ, როდესაც პირველად შეგვხვდება მოთამაშე უკვე ჩავლილი ჯგუფიდან. ვთქვათ, ამ ჯგუფის ნომერია i. ვინაიდან სულ გვაქვს N ჯგუფი, ამიტომ ეს გაჩერება მოხდება მანამდე, სანამ მივაღწევთ $N+1$-ე მოთამაშეს. რიგში დავტოვოთ მხოლოდ ეს ორი მოთამაშე i-ური ჯგუფიდან და რიგიდან გავიყვანოთ ყველა დანარჩენი მოთამაშე ამ i-ური ჯგუფიდან. ასევე რიგიდან გავიყვანოთ ყველა მოთამაშე, რომლებსაც უკვე ჩავუარეთ (და რომლებიც i-ურ ჯგუფს არ ეკუთვნიან). ანუ მივიღებთ, რომ ამ ორ შერჩეულ მოთამაშეს შორის უკვე რიგში არცერთი მოთამაშე არ დგას. ახლა გავაგრძელოთ სკანირების ეს პროცესი. შევნიშნოთ, რომ დარჩენილი გვაქვს $N-1$ ჯგუფი და თითოეულ ჯგუფში არანაკლებ N ფეხბურთელია. ისევ შევარჩიოთ პირველი ორი მოთამაშე საერთო ჯგუფიდან და გავიყვანოთ რიგიდან ყველა დანარჩენი ფეხბურთელი ამ ჯგუფიდან. ასევე, რიგიდან გავიყვანოთ ყველა მოთამაშე, რომელსაც ჩავუარეთ მარცხნიდან მარჯვნივ. გვექნება უკვე შერჩეული ორი წყვილი მოთამაშე და დარჩენილი გვექნება $N-2$ ჯგუფი, ამასთან, თითოეულ ჯგუფში მოთამაშეთა რაოდენობა იქნება არანაკლებ $N-1$-სა. თუ გავაგრძელებთ ასეთნაირად სკანირების პროცესს და წყვილ მოთამაშეთა შერჩევას საერთო ჯგუფიდან, ცხადია, მივიღებთ $2N$ მოთამაშეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამოცანის N პირობას. რ .დ.გ.

ამოცანა 6. *მთელ რიცხვთა დალაგებულ (x,y) წყვილს ვუწოდოთ პრიმიტიული წერტილი, თუ x-ის და y-ის უდიდესი საერთო გამყოფი 1-ის ტოლია. მოცემულია პრიმიტიულ წერტილთა რაღაც სასრული S სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მთელი დადებითი რიცხვი n და მთელი რიცხვები $a_0, a_1,\ldots,a_n$ ისეთი, რომ ყოველი (x,y) -თვის S -დან, სრულდება ტოლობა:*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n = 1.$$

ამოხსნა: შევნიშნოთ, რომ, თუ ჩვენ ვიპოვეთ ორი ცვლადის ერთგვაროვანი პოლინომი $f(x,y)$ ისეთი, რომ S სიმრავლის ყოველი წერტილისთვის $f(x,y)$ უდრის 1 ან -1-ს, მაშინ ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია, ვინაიდან $f(x,y)^2 = 1$ იქნება საძიებელი პოლინომი. ვთქვათ $S = \{(x_i,y_i): i = 1,2,\ldots,n\}$. თუ რომელიმე i და j-თვის (x_i,y_i) და (x_j,y_j) წერტილები ძევს კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრფეზე, მაშინ ამ წერტილთა *პრიმიტიულობის* გამო აუცილებლად გვაქვს ტოლობა $(x_j,y_j) = (-x_i,-y_i)$. ამიტომ, $f(x,y)$, პოლინომის ერთგვაროვნებიდან გამომდინარე, გვაქვს $f(x_j,y_j) = \pm f(x_i,y_i)$. ასე რომ, თუ თუ S სიმრავლე შეიცავს როგორც (x_i,y_i), ასევე $(-x_i,-y_i)$ წერტილს, მაშინ, უბრალოდ, შეგვიძლია წავშალოთ ერთ-ერთი მათგანი და დარჩენილი სიმრავლისთვის ავაგოთ საძიებელი პოლინომი.

ამრიგად, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ S სიმრავლის არცერთი ორი ვექტორი კოლინეარული არაა. აქ, ჩვეულებისამებრ, წერტილს ვაიგივებთ რადიუსვექტორთან, ანუ ვექტორთან, რომლის საწყისია კოორდინატთა სათავე და ბოლო — მოცემული წერტილი.

ყოველი $i=1,2,\dots,n$-თვის, განვიხილოთ ერთგვაროვანი პოლინომი $l_i(x,y)=y_ix-x_iy$ და განვსაზღვროთ პოლინომი:

$$g_i(x,y)=\prod_{j\neq i} l_j(x,y).$$

ვინაიდან S-ის არცერთი ორი წერტილი კოლინეარული არაა, ამიტომ, ცხადია, რომ $l_i(x_j,y_j)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $j=i$. ამრიგად, $g_i(x_j,y_j)=0$ ყოველი $j\neq i$-თვის, ხოლო, როცა $j=i$, მაშინ $g_i(x_i,y_i)=$ $=a_i\neq 0$.

შევნიშნოთ, რომ $g_i(x,y)$ არის $n-1$ რიგის ერთგვაროვანი პოლინომი შემდეგი ორი თვისებით:

1) $g_i(x_j,y_j)=0$, თუ $j\neq i$.
2) $g_i(x_i,y_i)=a_i\neq 0$.

ყოველი $N\geq n-1$, ასევე არსებობს N რიგის პოლინომი, რომელსაც ზემოთ მოცემული ორივე თვისება გააჩნია. მართლაც, ვთქვათ $I_i(x,y)$ არის პირველი ხარისხის ერთგვაროვანი პოლინომი, ისეთი, რომ $I_i(x_i,y_i)=1$ (ცხადია, ასეთი $I_i(x,y)$ არსებობს, ვინაიდან x_i და y_i თანამარტივი რიცხვებია). მაშინ პოლინომს $I_i(x,y)^{N-(n-1))}g_i(x,y)$ აქვს ხარისხი N და გააჩნია 1) და 2) თვისებები.

ლემა: *ყოველი მთელი დადებითი a რიცხვისთვის არსებობს მთელკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი პოლინომი $f_a(x,y)$, რომლის ხარისხიც მეტია ან ტოლი 1-ზე, ისეთი, რომ ყოველი პრიმიტიული(x,y) წყვილისთვის $f_a(x,y)\equiv 1(moda)$.*

შევნიშნოთ, რომ ეს ლემა საკმარისია ჩვენი ამოცანის ამოსახსნელად. მართლაც, a-ს როლში ავიღოთ ყველა a_iრიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი. განვიხილოთ პოლინომი $f_a(x,y)$ ლემიდან და ასევე პოლინომი $f_a(x,y)^k$, სადაც k ისეთია, რომ $f_a(x,y)^k$ პოლინომის ხარისხი მეტია ან ტოლი $n-1$. ახლა, თუ მიღებულ პოლინომებს დავაკლებთ g_i-ებს, გამრავლებულს შესაბამის მთელ რიცხვებზე, მივიღებთ საძიებელ პოლინომს.

ამრიგად, დასამტკიცებელი დაგვრჩა ლემა. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა a=p^k, სადაც p მარტივი რიცხვია. გავიხსენოთ ფერმას მცირე თეორემა, რომელიც გვეუბნება, რომ, თუ b და m მთელი დადებითი თანამარტივი რიცხვებია, მაშინ $b^{\varphi(m)}\equiv 1(modm)$, სადაც $\varphi(m)$ ეილერის ფუნქციაა, რომელიც გვიჩვენებს m-ზე ნაკლებ და m-თან თანამარტივ მთელ დადებით რიცხვთა რაოდენობას. თუ $p=2$, მაშინ ყოველი პრიმიტიული (x,y) წყვილისთვის x^2+xy+y^2 კენტია და ამიტომ $f_a(x,y)=(x^2+xy+y^2)^{\varphi(a)}\equiv 1(moda)$. თუ a=p^k კენტია, მაშინ $x^{p-1}+y^{p-1}$ თანამარტივია p-სთან. მართლაც, პრიმიტიულობის გამო, x და y ერთდროულად ვერ გაიყოფა p-ზე. თუ მხოლოდ ერთ-ერთი ამ რიცხვთაგან არ იყოფა p-ზე, ცხადია, $x^{p-1}+y^{p-1}$-იც არ გაიყოფა p-ზე, ხოლო, თუ არცერთი არ იყოფა p-ზე, მაშინ $x^{p-1}+y^{p-1}\equiv 2(modp)$. ამრიგად, ამ შემთხვევაში $f_a(x,y)$-ს როლში ივარგებს პოლინომი $f_a(x,y)=(x^{p-1}+y^{p-1})^{\varphi(a)}$. ვთქვათ, ახლა $a=q_1\cdot q_2\cdot\dots\cdot q_k$, სადაც q_i-ები არის მარტივი რიცხვის ხარისხები. თითოეული q_i-თვის უკვე ვიცით როგორ ავაგოთ f_{q_i} პოლინომი, რომელიც ლემას აკმაყოფილებს. ავიყვანოთ თითოეული შესაბამის ხარისხებში ისე, რომ მიღებულ F_{q_i} პოლინომებს ჰქონდეთ ერთი და იგივე ხარისხი. შევნიშნოთ რომ:

$\frac{a}{q_i}F_{q_i}(x,y)\equiv\frac{a}{q_i}(moda)$ ყოველი თანამარტივი x და y-თვის. ცხადია, $\gcd\left(\frac{a}{q_1},\dots,\frac{a}{q_k}\right)=1$, ამიტომ არსებობს მათი წრფივი კომბინაცია (მთელი კოეფიციენტებით), რომელიც 1-ის ტოლია, ანუ ვღებულობთ, რომ: $\frac{a}{q_i}F_{q_i}(x,y)$ პოლინომების იგივე წრფივი კომბინაცია არის საძიებელი პოლინომი. ამით ლემის დამტკიცება და, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ავტორების ელექტრონული მისამართები: *giorgi.chelidze@tsu.ge*
givi.nadibaidze@tsu.ge

წინა ნომრის ამოცანების ამოხსნები

ამოცანა 1

ვთქვათ, m და n ნატურალური რიცხვები ისეთია, რომ $m > n \geq 2$. $S_m(n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ყველა იმ ნატურალური რიცხვის შებრუნებული რიცხის ჯამი, რომლებიც m-ზე ნაკლებია და თანამარტივია n რიცხვთან. აჩვენეთ, რომ $S_m(n)$ არ არის მთელი რიცხვი.

ამოხსნა: გვაქვს $S_m(n) = 1 + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_s}$, სადაც $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_s < m$ და თითოეული a_i თანამარტივია n-თან. შევნიშნოთ, რომ $a = a_1$ მარტივი რიცხვია, წინააღმდეგ შემთხვევაში მისი არატრივიალური გამყოფი თანამარტივი იქნება n-თან, რომელიც ნაკლები იქნება a_1-ზე. ვთქვათ, k უდიდესი ნატურალური რიცხვია, რომლისთვისაც $a^k \leq m$. ცხადია არსებობს $i \leq s$ ისეთი, რომ $a^k = a_i$, ვინაიდან a^k სახის რიცხვებიც თანამარტივია n რიცხვთან. გარდა ამისა, თუ a^k ყოფს a_j-ს რომელიმე j ნომრისათვის, მაშინ $j = i$. მართლაც, ვთქვათ, $a_j = ca^k$ რაიმე $c > 1$ რიცხვისათვის. თუ $c < a$, მაშინ c და n რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფი მეტია ერთზე და, აქედან გამომდინარე, a_j არ იქნება თანამარტივი n-თან. თუ $c \geq a$, მაშინ $m > a_j = ca^k \geq a^{k+1}$, რაც წინააღმდეგობაში მოდის k-ს არჩევასთან (ის არის უდიდესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც $a^k \leq m$).

დავუშვათ, m მთელი რიცხვია. აღვნიშნოთ $a_1, a_2, \ldots, a_s$ რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი L-ით. ზემოთ გამართული მსჯელობებიდან ვასკვნით, რომ a^k ყოფს L, მაგრამ a^{k+1} არაა L-ის გამყოფი.

გვაქვს აგრეთვე, რომ:

$$LS_m(n) - L - \sum_{j=1, j \neq i}^{s} \frac{L}{a_j} = \frac{L}{a_i}.$$

თუ m მთელი რიცხვია, მაშინ უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარე უნდა იყოს a-ს ჯერადი. მეორე მხრივ, ტოლობის მარჯვენა მხარე არის $\frac{L}{a_i} = \frac{L}{a^k}$, რომელიც ვერ იქნება a-ს ჯერადი k-ს შერჩევის გამო. მიღებული წინააღმდეგობიდან გამომდინარე, დავასკვნით, რომ m არ არის მთელი რიცხვი.

ამოცანა 2

იპოვეთ ყველა ის რაციონალური r რიცხვი, რომლისთვისაც არსებობს სამი — a, b და c ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომ: $a + b\cos 2\pi r + c\sin 2\pi r = 0$.

ამოხსნა: განვიხილოთ შემთხვევა $0 \leq r < 1$. დავუშვათ სამართლიანია ტოლობა:

$$a + b\cos 2\pi r + c\sin 2\pi r = 0,$$

სადაც a, b, c, r რიცხვები რაციონალურია, გვექნება:

$$(b^2 + c^2)\cos^2 2\pi r + 2ab\cos \pi r + a^2 - c^2 = 0.$$

მაშასადამე, $\cos 2\pi r$ არის კვადრატული განტოლების ამონახსნი, რომლის კოეფიციენტები რაციონალური რიცხვებია. ანალოგიური დასკვნა შეგვიძლია გავაკეთოთ $\sin 2\pi r$ -სთვისაც. განვიხილოთ $\xi = \cos 2\pi r + i\sin 2\pi r$ კომპლექსური რიცხვი. n-ით აღვნიშნოთ r რაციონალური რიცხვის უკვეც წილადად წარმოდგენის მნიშვნელი. შევნიშნოთ, რომ ξ წარმოადგენს ერთიანიდან n რიგის ფესვს. ვინაიდან ორივე — $\cos 2\pi r$ და $\sin 2\pi r$ რიცხვები წარმოადგენენ რაციონალურკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლებების ფესვებს, ამიტომ ისინი რომელიღაც რაციონალურკოეფიციენტებიანი მეოთხე რიგის განტოლების ფესვებია. ჩვენთვის ცნობილია, რომ $\xi^n = 1$, აგრეთვე უმცირესი ხარისხის ირედუცირებული მრავალწევრი, რომელიც ყოფს $x^n - 1$ მრავალწევრს, არის $1 + x + x^2 + \ldots + x^{\varphi(n)}$, სადაც φ ეილერის ფუნქციაა. მაშასადამე, $\varphi(n)$ უნდა იყოს 4-ის გამყოფი და ამიტომ $\varphi(n) \in \{1, 2, 4\}$. გვაქვს შემთხვევები:

$\varphi(n) = 1$. ამ შემთხვევაში $n \in \{1, 2\}$, ამიტომ $r \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

$\varphi(n) = 2$. ამ შემთხვევაში $n \in \{3, 4, 6\}$, ამიტომ $r \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right\}$.

$\varphi(n) = 4$. ამ შემთხვევაში $n \in \{5, 8, 10, 12\}$, ამიტომ $r \in \left\{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}\right\}$.

ზემოთ მოყვანილ ცხრილში ჩვენ არ შევიყვანეთ ის r რიცხვები, რომელთა მნიშვნელიც არის 5 ან 10, ვინაიდან $\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}$ არ წარმოადგენს რაციონალურკოეფიციენტებიანი კვადრატული სამწევრის ფესვს. საბოლოოდ გვექნება, რომ r წარმოადგენს $\frac{m}{24}$ სახის წილადებს, სადაც m ყველა ის მთელი რიცხვია, რომელიც თანამარტივი არ არის 24-თან.

ამოცანა 3

სიბრტყის წერტილთა სიმრავლისათვის განვსაზღვროთ ოპერაცია $A * B$ შემდეგნაირად: თუ $A \neq B$, მაშინ $A * B = C$, სადაც C წარმოადგენს იმ ერთადერთ წერტილს სიბრტყეზე, რომლისთვისაც ორიენტირებული სამკუთხედი ABC ტოლგვერდაა (ვიტყვით, რომ სამკუთხედი ABC ორიენტირებულია, თუ სამკუთხედის გვერდების გასწვრივ $A \to B \to C$ გადასვლების მიმართულება ემთხვევა საათის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებას); იმ შემთხვევაში, როცა $A = B$, მაშინ $A * B = A$. აჩვენეთ, რომ ამგვარად განსაზღვრული ოპერაცია არაკომუტაციური და არაასოსიაციურია და აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$(A * B) * (C * D) = (A * C) * (B * D).$$

ამოხსნა: ვთქვათ, $A \neq B$, $A * B = C$. მაშინ $(A * B) * C = C * C = C$. მეორე მხრივ, $A * (B * C) = A * A = A \neq C$. მაშასადამე, $*$ ოპერაცია არაასოციაციურია. ვინაიდან $A * B$ და $B * A$ წერტილები AB წრფის მიმართ სიმეტრიულია, ამიტომ $*$ ოპერაცია არაკომუტაციურია. სიბრტყის წერტილები გავაიგივოთ კომპლექსურ რიცხვებთან. ვთქვათ, $\xi = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$. გვექნება $A * B = A + \xi(B - A)$. მარტივია ჩვენება იმისა, რომ:

$$(A * B) * (C * D) = (1-\xi)^2 A + \xi(1-\xi)(B + C) + \xi^2 D.$$

მიღებული ტოლობა, ცხადია, სიმეტრიულია B და C ცვლადების მიმართ.

ამოცანა 4

ვთქვათ, $\boldsymbol{a,b}$ და $\boldsymbol{c}$ დადებითი რიცხვებია, რომლებიც არ წარმოადგე-ნენ სამკუთხედის გვერდის სიგრძეებს. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$\begin{aligned}&(abc)^2(a+b+c)^2(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\\ &\geq (a^2+b^2+s^2)^3(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2).\end{aligned}$$

ამოხსნა:

შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია ტოლობა:

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2-c^2)(a+b+c)(a-b+c)(a+c-b)(-a+b+c)\\ &=(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2).\end{aligned}$$

დასამტკიცებელ უტოლობას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი ფორმა:

$$\begin{aligned}&2p(2p-a)(2p-b)(2p-c)\left((abc)^2(2p)^2-(a^2+b^2+c^2)^4\right)\\ &+8(abc)^2(a^2+b^2+c^2)^3\geq 0,\end{aligned}$$

სადაც $2p=a+b+c$. შევნიშნოთ, რომ $(abc)^2(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)^4\leq 0$.

მართლაც,

$$(abc)\ (a+b+c)\ =a^2bc+b^2ca+c^2ab\leq\frac{1}{2}[a^2(b^2+c^2)+b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2+b^2)]$$

$$=\frac{1}{2}\left((a^2+b^2+c^2)^2-a^4-b^4-c^4\right)\leq(a^2+b^2+c^2)^2.$$

ამასთანავე, თუ a,b,c რიცხვები არ განსაზღვრავენ სამკუთხედს, მაშინ $2p(2p-a)(2p-b)(2p-c)\leq 0$. აღნიშნული შენიშვნების გათვალისწინებით მივიღებთ და-სამტკიცებელ უტოლობას.

ამოცანა 5

ვთქვათ, ოთხკუთხედში შესაძლებელია წრეწი-რის ჩახაზვა და, ამასთან, ოთხკუთხედის ფართობი ტოლია $\sqrt{abcd}$, სადაც $\boldsymbol{a,b,c}$ და $\boldsymbol{d}$ ოთხკუთხე-დის გვერდებია. აჩვენეთ, რომ ოთხკუთხედზე შესა-ძლებელია წრეწირის შე-მოხაზვა.

ამოხსნა: გვაქვს $a+c=b+d$. ვთქვათ, d იმ დიაგონალის სიგრძეა, რომლის ერთ მხარესაა განლაგებული ოთხკუთხედის გვერდები სიგრძეებით a და b, და მეორე მხარეს გვერდები, სიგრძეებით c და d. აღვნიშნოთ კუთხე იმ გვერდებს შორის, რომელთა სიგრძეებია a და b, α-თი, ხოლო, კუთხე იმ გვერ-დებს შორის, რომელთა სიგრძეებია c და d, β-თი. გვაქვს:

$$k^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha, k^2=c^2+d^2-2cd\cos\beta.$$

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას $(a-b)^2=(c-d)^2$, მი-ვიღებთ $2ab(1-\cos\alpha)=2cd(1-\cos\beta)$.

ოთხკუთხედის ფართობისათვის გვაქვს ფორმულა: $S=\frac{1}{2}(ab\sin\alpha+cd\sin\beta)$, რომელიც ამოცანის პირობით ტოლია $\sqrt{abcd}$. გვექნება:

$$4S^2=4abcd=a^2b^2(1-\cos^2\alpha)+c^2d^2(1-\cos^2\beta)+2abcd\sin\alpha\sin\beta.$$

თუ გამოვიყენებთ $2ab(1-\cos\alpha)=2cd(1-\cos\beta)$ ტოლობას, მივიღებთ:

$$4abcd=ab(1+\cos\ \alpha)cd(1-\cos\beta)+cd(1+\cos\ \beta)ab(1-\cos\alpha)+2abcd\sin\alpha\sin\beta.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ $4=2-2\cos(\alpha+\beta)$. მაშასადამე $\alpha+\beta=\pi$.

ახალი ამოცანები

ამოცანა 1. ვთქვათ, F მთელ რიცხვთა რაიმე სასრული სიმრავლეა შემდეგი თვისებებით: ა) ყოველი $x \in F$ რიცხვისათვის არსებობს $y, z \in F$ რიცხვები, ისეთი, რომ $x = y + z$; ბ) არსებობს ნატურალური რიცხვი n, ისეთი, რომ ყოველი ნატურალური $1 \le k \le n$ რიცხვისათვის და ნებისმიერად არჩეული $x_1,\dots,x_k \in F$ რიცხვებისათვის, ჯამი $x_1+\dots,+x_k$ ნულის ტოლი არ ხდება. აჩვენეთ, რომ F სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა არაა ნაკლები $2n+2$-ზე.

ამოცანა 2. ვთქვათ, $\pi_2(x)$ აღნიშნავს ყველა იმ p მარტივი რიცხვების რაოდენობას, რომელთათვისაც $p+2$ რიცხვიც მარტივია და $p \le x$ (თუ p და $p+2$ რიცხვებიდან ორივე მარტივია, მათ ტყუპ მარტივ რიცხვებს უწოდებენ). აჩვენეთ, რომ:

$$\pi_2(x) = 2 + \sum_{7 \le n \le x} \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+2)\left[\frac{n!}{n+2}\right]\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}n\left[\frac{(n-2)!}{n}\right]\right)$$

როცა $x > 7$ ($[x]$-ით აღნიშნულია x რიცხვის მთელი ნაწილი).

ამოცანა 3. ვთქვათ, S სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობაა n. განვიხილოთ S სიმრავლის არაცარიელი $M_1,\dots,M_{n+1} \subset S$ $n+1$ რაოდენობის ქვესიმრავლეთა ერთობლიობა. აჩვენეთ, რომ არსებობს $r, s \ge 1$ რიცხვები და ინდექსთა არათანამკვეთი ორი სიმრავლე $\{i_1,\dots,i_r\} \cap \{j_1,\dots,j_s\} = \varnothing$ ისეთი, რომ:

$$\bigcup_{k=1}^{r} M_{i_k} = \bigcup_{k=1}^{s} M_{j_k}.$$

ამოცანა 4. $S(x,y,z)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდების სიგრძეებია x, y და z. აჩვენეთ, რომ:

$$\sqrt{S(a,b,c)} + \sqrt{S(m,n,p)} \le \sqrt{S(a+m, b+n, c+p)}.$$

ამოცანა 5. ვთქვათ, $A_1,\dots,A_n$ წარმოადგენს წესიერი n-კუთხედის წვეროებს, რომელიც ჩახაზულია წრეწირში ცენტრით O. ვთქვათ, B წერტილი მდებარეობს წრეწირის A_1A_n მცირე სიგრძის რკალზე და $\angle A_nOB = \alpha$. გამოსახეთ ჯამი $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,|BA_k|$ წრეწირის r რადიუსის და α-ს საშუალებით.

ჩვენი სტუდენტები წარმატებით მონაწილეობენ საერთაშორისო პროექტებში

ანა დოლიძემ 2012 წელს ჩააბარა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე, მათემატიკის მიმართულებით. 2014 წლის გაზაფხულის სემესტრში მონაწილეობას იღებდა ჯგუფურ პროექტში „მოდელირება კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებით“. პროექტის ფარგლებში, მათემატიკის და კომპიუტერული მეცნიერებების დეპარტამენტის 3 სტუდენტთან ერთად, მუშაობა დაიწყო თემაზე „Level Set მეთოდი ადაპტირებული ბადის გახშირებით“. ჯგუფის წევრებმა ერთობლივი კვლევის შედეგი წარმოადგინეს მეექვსე ქართულ-გერმანულ საზაფხულო სკოლა-ვორკშოფზე ფუნდამენტურ მეცნიერებებში, პოსტერების სესიაზე (6th „Georgian-German School and Workshop in Basic Science“, GGSWBS'14, July 6 – 12, Tbilisi, Georgia). პროექტის შემდეგ ანამ მუშაობა გააგრძელა რიცხვითი ანალიზის მიმართულებით პროფესორ რამაზ ბოჭორიშვილისა და პრივატდოცენტ, დოქტორ ჰენდრიკ ელბერნის (FZJ, Germany) ხელმძღვანელობით. ბაკალავრიატში სწავლების პერიოდში ხელმძღვანელთან და სხვა სტუდენტებთან ერთად ჰქონდა ორი ერთთვიანი ინტერშიფი 2014-2015 წლებში გერმანიაში, იულიხის კვლევით ცენტრში, ენერგიის და კლიმატის კვლევის ინსტიტუტში (Juliech Research Center, at Institute for Energy and Climate Research 8, Germany). 2015 წელს მიიღო შვეიცარიული ფონდის – მეცნიერთა მსოფლიო ფედერაციის (World Federation of Scientists) ერთწლიანი სტიპენდია.

2016 წელს ანა დოლიძემ წარჩინებით დაასრულა საბაკალავრო პროგრამა და სწავლა გააგრძელა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სამაგისტრო პროგრამაზე „გამოყენებითი მათემატიკა“. მაგისტრატურაში სწავლის პერიოდში მუშაობდა ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში. 2017 წელს გაიმარჯვა შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის და იულიხის კვლევითი ცენტრის ერთობლივ პროექტში მაგისტრანტებისთვის, რომლის ფარგლებშიც სამაგისტრო ნაშრომის კვლევები შეასრულა იულიხის კვლევით ცენტრში (მარტი-ივნისი, 2018), ენერგიის და კლიმატის კვლევის ინსტიტუტში (IEK-8) რ.ბოჭორიშვილის და ჰ.ელბერნის ხელმძღვანელობით. სამაგისტრო კვლევის შედეგები წარადგინა მერვე ქართულ-გერმანულ საზაფხულო სკოლა-ვორკშოფზე საბაზისო მეცნიერებებში, მოხსენებით „EURAD-IM-ის ადვექციის სქემები“ (8th “Georgian-German School and Workshop in Basic Science“, GGSWBS'18, Tbilisi, Georgia).

2018 წლის შემოდგომის სემესტრიდან ანა დოლიძე სწავლას აგრძელებს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის და გეორგ-აუგუსტის გოტინგენის უნივერსიტეტის ერთობლივ ინგლისურენოვან საერთაშორისო სადოქტორო

პროგრამაზე მათემატიკაში. ანა დოლიძის სადოქტორო კვლევის ხელმძღვანელები არიან რ.ბოჭორიშვილი (თსუ), ჰენდრიკ ელბერნი (FZ Julich) და რასელ ლუკე (University of Goettingen). სადოქტორო პროგრამა დაფინანსებულია შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდისა და ვოლცვაგენის ფონდის (Volkswagen Foundation) მიერ. იგი საშუალებას აძლევს ქართველ სტუდენტებს მიიღონ საერთაშორისო განათლება და ხარისხი საქართველოში.

გვანცა შავარდენიძემ 2011 წელს ჩააბარა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე, მათემატიკის მიმართულებით. წარჩინებული სწავლისათვის, ბაკალავრიატის პირველი კურსიდან მოყოლებული, ყოველწლიურად იღებდა სტიპენდიას. 2015 წელს გვანცამ წარჩინებით დაასრულა მათემატიკის საბაკალავრო პროგრამა და სწავლა განაგრძო ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სამაგისტრო პროგრამაზე „გამოყენებითი მათემატიკა". მაგისტრატურაში სწავლის პერიოდში (2015 წლის ნოემბრიდან) მუშაობდა და დღემდე მუშაობს თსუ ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში.

გვანცამ 2017 წელს წარჩინებით დაამთავრა სამაგისტრო პროგრამა და ჩააბარა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სადოქტორო პროგრამაზე მათემატიკაში.

2018 წლის შემოდგომის სემესტრიდან გვანცა შავარდენიძე სწავლას აგრძელებს ინგლისურენოვან საერთაშორისო სადოქტორო პროგრამაზე მათემატიკაში. ამჟამად ის სწავლობს განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციებისათვის ფურიე-ვილენკინის მწკრივების ჩეზაროს უარყოფითი რიგით შეჯამებადობის საკითხებს. ამასთან დაკავშირებით მან მოხსენებები გააკეთა სტუდენტთა ყოველწლიურ საფაკულტეტო კონფერენციებზე, ასევე ილია ვეკუას გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარებზე. რამდენჯერმე იყო საზღვარგარეთ სამეცნიერო მივლინებით, კერძოდ, სომხეთში (2014 წ.), სერბეთსა (2016 წ.) და უნგრეთში (2015 წ., 2017 წ.). გვანცამ მონაწილეობა მიიღო სემინარებისა და ვორქშოფების მუშაობაში და თავისი კვლევის შედეგები გააცნო უცხოელ მეცნიერებს.

გვანცა შავარდენიძე არის სტუდენტთა 74-ე საუნივერსიტეტო სამეცნიერო კონფერენციის გამარჯვებული; 2015 და 2016 წელს ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სტუდენტებისთვის მიზნობრივი სამეცნიერო კვლევითი პროგრამის გამარჯვებული პროექტის ერთ-ერთი მონაწილე და შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის მიერ გამოცხადებული, მაგისტრანტთა სასწავლო-კვლევითი პროექტების გრანტით დაფინანსების 2016 წლის კონკურსის გამარჯვებული (no MR_2016_1_132).

უნივერსიტეტი ამაყობს თქვენით

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში 2018 წლის 20-24 აგვისტოს ჩატარდა იულიხის კვლევითი ცენტრისა და პარტნიორი უნივერსიტეტების (თსუ, აგრიუნი, ილიაუნი და სტუ) ერთობლივი, მე-8 ქართულ-გერმანული სკოლა-სემინარი ფუნდამენტურ მეცნიერებებში. ღონისძიება თსუ 100 წლის იუბილესთან დაკავშირებით ჩატარდა და მისი თემატიკა იყო „მეცნიერება საქართველოში არსებულ მულტიდისციპლინურ SMART | ლაბებში“.

ბოლო ორი ათწლეულია იულიხის კვლევითი ცენტრი აქტიურად თანამშრომლობს ოთხ ქართულ უნივერსიტეტთან. ურთიერთობა 1992 წლიდან დაიწყო, როდესაც თსუ მაღალი ენერგიების ფიზიკის ინსტიტუტსა და იულიხის კვლევითი ცენტრის ბირთვული ფიზიკის ინსტიტუტს შორის თანამშრომლობას ჩაეყარა საფუძველი. 2004 წლიდან ურთიერთობა გაგრძელდა „ქართულ-გერმანული სამეცნიერო ხიდის“ (GGSB) კონცეფციის ფარგლებში, რომლის სამი ძირითადი ქვაკუთხედია: — ფუნდამენტური და გამოყენებითი კვლევები, განათლება და სტუდენტები, ცოდნის ტრანსფერი. თანამშრომლობის ფარგლებში ორ წელიწადში ერთხელ ტარდება სკოლა-სემინარი, რომელსაც 2010 წლიდან საქართველოს სხვა უნივერსიტეტებიც შემოუერთდა: საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი და, მოგვიანებით, საქართველოს აგრარული უნივერსიტეტი.

2016 წლის კონფერენციაზე საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროსა და იულიხის კვლევით ცენტრს შორის ხელი მოეწერა მემორანდუმს, რომელიც ითვალისწინებს გრძელვადიან სამეცნიერო და

საგანმანათლებლო თანამშრომლობის ხელშეწყობას. ახალი პროგრამა ასევე მოიცავს საქართველოს უნივერსიტეტებში ე.წ. SMART| ლაბორატორიების გახსნას. აბრევიატურა SMART წარმოდგება ინგლისური შემოკლებებისგან: მეცნიერება (Science), მედიცინა (Medicine), გამოყენებითი კვლევები (Applyed Research) და ტექნოლოგიები (Technology). პირველმა ასეთმა ლაბორატორიამ, SMART | EDM_Lab, ფუნქციონირება დაიწყო თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში 2017 წლის იანვარში. ლაბორატორია არის იულიხში არსებული ლაბორატორიის ანალოგი, რომელიც, JEDI (Juelich Electric Dipole moment Investigations) საერთაშორისო თანამშრომლობის ფარგლებში, ელემენტარული ნაწილაკების ელექტრული დიპოლური მომენტის ექსპერიმენტულ კვლევებშია ჩართული. 2017 წლის 29 სექტემბერს თსუ-ში გაიხსნა მეორე ასეთი ლაბორატორია, SMART|AtmoSim_Lab. ლაბორატორიაში განხორციელდება ატმოსფერული კვლევები, რომელშიც შედის: ატმოსფერული დამაბინძურებლების ქიმიური ანალიზი, მონაცემთა მათემატიკური ანალიზი და ჰაერის დაბინძურების მოდელირება. სმარტლაბები ქართველ ახალგაზრდებს შესაძლებლობას აძლევს სამეცნიერო პროექტები განახორციელონ საქართველოში.

სწორედ GGSB-ის ფარგლებში დაიგეგმა თემატური კონფერენცია — „მულტიდისციპლინარული SMART|ლაბები საქართველოში“, რა დროსაც ფოკუსი გაკეთდა სამ ძირითად კომპონენტზე: ა) სიმეტრიები სუბატომურ ფიზიკაში; ბ) ატმოსფერული კვლევები და მოდელირება, რომელიც დაკავშირებულია SMART| AtmoSim_Lab-თან და გ) ვიზუალიზაცია მედიცინის სფეროში და ბიომარკერები.

კონფერენციის მუშაობაში მონაწილეობა მიიღეს ამაჩქარებლების, ნაწილაკთა ფიზიკის და ტექნოლოგიების მსოფლიო დონის ექსპერტებმა, რომლებიც სხვადასხვა საერთაშორისო კოლაბორაციის (JEDI, Borexino, JUNO, -PAX) წევრები არიან. შეჯამდა ამ სფეროებში არსებული მიღწევები: მოხდება ორ ქვეყანას შორის მეცნიერების და ტექნოლოგიების სფეროში სამომავლო თანამშრომლობის გზების დასახვა.

გარდა ამისა, ბაკალავრიატის, მაგისტრატურის და დოქტორანტურის სტუდენტებისთვის ჩატარდა თემატური სალექციო კურსები საბუნებისმეტყველო და საინჟინრო მეცნიერებებში. ღონისძიების ბოლო დღეს, 24 აგვისტოს, ჩატარდა სტუდენტური სესია, დღის ბოლოს კი შეირჩა სხვადასხვა მიმართულების (ფიზიკა, მათემატიკა, ქიმია, ბიოლოგია, საინჟინრო ტექნოლოგიები) საუკეთესო სტუდენტები ინტერნშიფის გასავლელად იულიხის კვლევით ცენტრში.

(მასალა გამოყენებულია თსუ ვებგვერდიდან. დეტალური ინფორმაციისათვის იხი-

ლეთ ბმული: http://collaborations.fz-juelich.de/ikp/cgswhp/cgswhp18/)

აღნიშნულ კონფერენციაში მონაწილეობდნენ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა საბაკალავრო პროგრამების სტუდენტებიც, რომლებმაც სხვადასხვა საინტერესო საკითხის კვლევა დაიწყეს ჯგუფური პროექტის „გამოთვლითი მათემატიკური მოდელირება„ ფარგლებში და კვლევის შედეგები წარმოადგინეს კონფერენციაზე. გთავაზობთ მათ მონათხრობს.

დავით ჯოხაძე და გიორგი სვანაძე: „ჩვენი მოხსენება ეხებოდა პროექტს, რომელიც მდგომარეობდა დასაკვირვებელი კამერის ვიდეოგამოსახულებიდან სამანქანო გზაზე მოძრავი ავტომობილების სიჩქარის, რაოდენობისა და ტიპის გამოანგარიშებაში. სიჩქარის გამოსათვლელად გამოვიყენეთ კომპიუტერული ხედვის ერთ-ერთი საინტერესო მოდელი — ოპტიკური დინება და განვიხილეთ მისი გამოსაანგარიშებელი სხვადასხვა მეთოდი. ოპტიკური დინების განტოლების ამოხსნისას შევხვდით რამდენიმე პრობლემას, რომლის გადაჭრაშიც დაგვეხმარა გამოსახულების ე.წ. „ხმაურისგან“ გაწმენდის გაუსის წრფივი ოპერატორი და კერძო წარმოებულების გამოსათვლელი პრევიტის ოპერატორი. რაც შეეხება ტიპებს, მათ დასადგენად ვითვლით თითოეული ავტომობილის მიახლოებით ფართობს და ვაჯგუფებთ. თითოეულ ტიპს კი შეესაბამება ფართობთა რაღაც ინტერვალი, ხოლო ეს ინტერვალი იცვლება იმის მიხედვით, თუ რა მანძილითაა დაშორებული დამკვირვებელი კამერა და გზა. ამ ყველაფრის იმპლემენტაცია კი მოვახდინეთ Python-ში, ცნობილი OpenCV ბიბლიოთეკის გამოყენებით“.

მარიამ ჯანანაშვილი და თამაზ სეფიაშვილი: „აგვისტოში ჩატარებულ ვორკშოპზე წარმოდგენილი ჩვენი მოხსენება ეხებოდა

ოპტიკურ დინებას. ოპტიკური დინება არის კომპიუტერული ხედვის ერთ-ერთი კლასიკური მოდელი, რომელიც განათების ინტენსივობის მუდმივობის დაშვებას ემყარება და აღიწერება პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი ჰიპერბოლური განტოლებით. სამეცნიერო თემაზე მუშაობისას მნიშვნელოვანია კლასიკური მეთოდების სიღრმისეული შესწავლა და შემდგომ უკვე მათი მოდიფიცირება. ასე რომ, პირველ ეტაპზე ჩვენი მიზანი იყო არსებული მათემატიკური მეთოდების განხილვა, შესწავლა, შედარება, ასევე ოპტიკური დინების პრაქტიკაში გამოყენების მაგალითები და მეთოდის უპირატესობები. კვლევითი მუშაობა ხანგრძლივი პროცესია, რომელიც დიდ შრომას, მობილიზებასა და მონდომებას მოითხოვს. დასახულ მიზანს, იმ დროის მონაკვეთში რაც სამუშაოდ გვქონდა გამოყოფილი, მივაღწიეთ. თუმცა, აღსანიშნავია, რომ მომავალში შედეგები გაუმჯობესდება: გვაქვს გარკვეული იდეები არსებული მეთოდების გაუმჯობესების თვალსაზრისით“.

გიგია აფციაური და სალომე შეყილაძე: „ჩვენი თანამშრომლობა თსუ SMART|AtmoSim_Lab-თან დაიწყო 2018 წლის თებერვალში. ამჟამად ლაბორატორიის მუშაობაში ჩართულები ვართ სტუდენტი მკვლევრების სტატუსით. ლაბორატორიაში არსებული ინსტრუმენტებით უწყვეტ რეჟიმში ხდება თსუ პირველი კორპუსის მიმდებარე ტერიტორიაზე ატმოსფეროში არსებული სხვადასხვა ნივთიერების შემცველობის გაზომვა. მიღებულ მო-

ნაცემებს ჩვენ ვამუშავებთ და გრაფიკულად ვუკეთებთ ყველაფერს ვიზუალიზაციას. გარდა ამისა, ცხადია მნიშვნელოვანი იყო არა მხოლოდ თსუ პირველი კორპუსის მიმდებარე ტერიტორიაზე მდგომარეობის დაფიქსირება, არამედ სხვა ქუჩებსა თუ რაიონებში ატმოსფეროს მდგომარეობის დადგენა. ტექნიკა, რომელიც SMART Lab-შია, ძვირად ღირებულია. არსებობს იაფი სენსორები, რომლებიც ცდომილებით ზომავს ნივთიერებების შემცველობას ატმოსფეროში. დაისვა ამოცანა, რომ ამ ცდომილების გაფილტვრა მოგვეხდინა დღესდღეობით ერთ-ერთი აქტუალური თემით — მანქანური სწავლებით.

მოცემული საკვლევი თემა — ცდომილებიანი მონაცემების გაფილტვრა მანქანური სწავლებით — გახდა თემა, რომელიც წარვადგინეთ ქართულ-გერმანულ ვორკშოპზე. კვლევის პროცესი რთული აღმოჩნდა, ბევრი მეთოდის მოსინჯვა მოგვიხდა, შევისწავლეთ მანქანური სწავლების მეთოდები, გავეცანით სხვადასხვა ალგორითმს, დიდი ცოდნა შევიძინეთ. აღსანიშნავია, რომ კვლევის ამ ეტაპზე სინთეზირებული მონაცემების გენერირებას ვახდენთ, SMART Lab-ის მონაცემებს ვაშფოთებდით და სხვადასხვა მეთოდის რეალიზაციას ამ შეშფოთებულ მონაცემებზე ვაკეთებდით.

ჩვენ დღესაც ვაგრძელებთ მუშაობას, მეტ ცოდნას ვიძენთ და ვიყენებთ პრაქტიკაში; გვაქვს გარკვეული იდეები, რომელთა იმპლემენტირებასა და შედეგების გაუმჯობესებას ვაპირებთ".

სალომე კახაია და მარიამ რაზმაძე: „მე-8 „ქართულ-გერმანულ სკოლასა და ვორკშოპში" ჩვენ მიერ წარდგენილი მოხსენება „რადიალურ-ბაზისური ფუნქციების (RBF) ფორმის პარამეტრის ოპტიმიზაცია" ემსახურებოდა RBF ნეირონული ქსელების ეფექტიანობის გაზრდას, ფუნქციათა ინტერპოლება/აპროქსიმაციის გაუმჯობესებასა და Smartlab-ის მიერ ჩატარებული ატმოსფეროს ქიმიური ანალიზის შედეგების რეკონსტრუქციას უცნობ ლოკაციებში. კვლევის ამ მომენტში, 4-დან ათამდე განსხვავებულ ლოკაციაზე იყო ხელმისაწვდომი გაზომილი მონაცემები და ჩვენი მეთოდიც ზუსტად ამ მონაცემებზე არის მორგებული. მოხსენებას დადებითი შეფასება მოჰყვა, რის შედეგადაც მივიღეთ მიწვევა იულიხის კვლევით ცენტრში 1-თვიან ინტერნშიფზე. ამ ეტაპზე ვაგრძელებთ მუშაობას ჩვენ მიერ შემუშავებული მეთოდების გამრავალფეროვნებაზე, ვამატებთ ახალ მოდიფიკაციებს, რომელთა შორის ოპტიმალური ნეირონული ქსელის საშუალებით აირჩევა.

დიდი ინტერესით ველოდებით ვიზიტს იულიხში — ევროპის ერთ-ერთ უმთავრეს კვლევით ცენტრში, სრულიად განსხვავებულ სოციალურ, განათლებისა და განვითარების გარემოში, სადაც უნივერსიტეტსა და Smartlab-ში მიღებული დიდი გამოცდილების კიდევ უფრო გამდიდრების საშუალება მოგვეცემა".

ამრიგად, 2018 წლის ვორკშოპზე პროფესორ რამაზ ბოჭორიშვილის ხელმძღვანელობით რვა სტუდენტმა გააკეთა მოხსენება. ყველამ, ვინც აღნიშნული მიმართულებით მუ-

შაობის გაგრძელების სურვილი გამოთქვა, მიიღო ერთთვიანი ინტერნშიფი იულიხის კვლევით ცენტრში. 2019 წლის თებერვალში ხუთი სტუდენტი გაემგზავრა გერმანიაში, კერძოდ, გიგია აფციაური, სალომე კახაია და სალომე შეყილაძე იმუშავებენ იულიხის კვლევითი ცენტრის ენერგიის და კლიმატის ინსტიტუტში, ატმოსფეროში ქიმიური ნივთიერებების გაზომვის შედეგად მიღებული მონაცემების დამუშავებაზე. მარი ჯანანაშვილი იმუშავებს ბიო- და გეომეცნიერებების ინსტიტუტში, კვლევის თემა იქნება „კომპიუტერული ხედვის კერძოწარმოებულიან განტოლებებზე დაფუძნებული მეთოდების და ხელოვნური ნეირონული ქსელის კომბინაცია ვიდეოგამოსახულების დასამუშავებლად“. მარიამ რაზმაძე იმუშავებს ნეირომედიცინის ინსტიტუტში და მისი სამუშაო დაკავშირებული იქნება მაგნეტორეზონანსულ ტომოგრაფიასთან.

უნივერსიტეტის ამაგდარი პროფესორები

ლერი გოგოლაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი;
ასოცირებული პროფესორი,
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი;
იყო ზოგადი მათემატიკის კათედრის გამგე და თსუ პრორექტორი სასწავლო მუშაობის დარგში

ლერი დავითის ძე გოგოლაძე დაიბადა თბილისში, 1938 წლის 1 აპრილს. მამა — დავით გოგოლაძე იყო დამსახურებული ინჟინერი, დედა — თამარ ფაილოძე — ეკონომისტი. 1956 წ. დაამთავრა თბილისის 30-ე საშუალო სკოლა ვერცხლის მედალზე, 1961 წელს — თსუ მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი წარჩინების დიპლომით, 1965 წელს — ასპირანტურა ფუნქციათა თეორიისა და ფუნქციონალური ანალიზის განხრით.

1970 წელს დაიცვა საკანდიდატო, ხოლო 1985 წელს — სადოქტორო დისერტაციები.

ლ.გოგოლაძე მუშაობდა ფუნქციათა თეორიისა და ფუნქციათა ანალიზის კათედრაზე ჯერ დოცენტის, ხოლო შემდეგ პროფესორის თანამდებობაზე. იგი იყო ზოგადი მათემატიკის კათედრის გამგე, უნივერსიტეტის პრორექტორი სასწავლო მუშაობის დარგში.

მის მიერ გამოქვეყნებულია 81 სამეცნიერო შრომა, მათგან 37 იმპაქტ ფაქტორის მქონე ჟურნალებში. მისი შრომები ეძღვნება ფუნქციათა თეორიის საკითხებს. მიღებული შედეგებიდან აღვნიშნავთ შემდეგს:

დადგენილია ფუნქციათა მაქსიმალურად ფართო ინტეგრალური კლასი, სადაც ჯერადი ტრიგონომეტრიული ფურიეს მწკრივები ძლიერად შეჯამებადია თითქმის ყველგან;

ამოხსნილია პ.ულიანოვის ამოცანა მრავალი ცვლადის ფუნქციათა შეუღლებული ფუნქციების არსებობის შესახებ. ეს ამოცანა დასმული იყო 1973 წ. ჟურნალში „Успехи математических наук“(იხ. ტ.28, გვ. 65-119);

ამოხსნილია მ. გუსმანის ამოცანა L(1+ln^+L) (R^2) სივრცის დახასიათების შესახებ ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის საშუალებით. ეს ამოცანა დასმულ იქნა 1970 წ. მ.გუსმანის მონოგრაფიაში „Дифференцирование интегралов в R^n“ (იხ.გვ.63);

ამოხსნილია ლ.ლეინდლერის ამოცანა ძლიერი აპროქსიმაციისა და ლიპშიცის კლასებს შორის ურთიერთკავშირის შესახებ. ეს ამოცანა დასმული იყო 1979 წ. საერთაშორისო კონფერენციაზე (იხ. Proceedings of the International conference, held in Gdansk.)

ლ.გოგოლაძე არის 5 საკანდიდატო დისერტაციის ხელმძღვანელი და ერთი სადოქტორო დისერტაციის კონსულტანტი.

11 წლის განმავლობაში ლ.გოგოლაძე იყო საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდის ხელმძღვანელი საერთაშორისო მათემატიკურ ოლიმპიადებზე. მის დროს საქართველოს გუნდმა მოიპოვა 1 ოქროს, 10 ვერცხლის, 32 ბრინჯაოს მედლები და 17 ქების სიგელი.

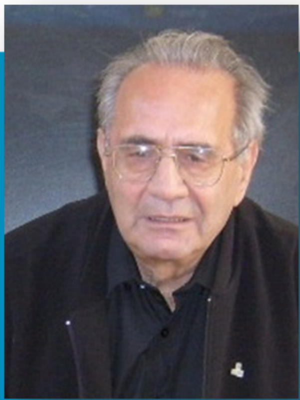
ლ.გოგოლაძე არის რომის 1960 წლის ოლიმპიადის, ლაიპციგის 1962 წლის ევროპის ჩემპიონატის და პორტო-ალეგრეს მსოფლიო უნივერსიადის ვერცხლის მედლების

მფლობელი, საბჭოთა კავშირის ჩემპიონი წყალბურთში, სამგზის ვერცხლისა და ხუთგზის ბრინჯაოს მედალოსანი საბჭოთა კავშირის ჩემპიონატებში და ხალხთა სპარტაკიადებზე.

პროფესორ ლერი გოგოლაძის მთელი ცხოვრება გამორჩეულია თავისი განსაკუთრებულობით — ერთი მხრივ, ბრწყინვალე მეცნიერული კარიერა და, მეორე მხრივ, უმაღლესი სპორტული მიღწევები. სწორედ ასეთი ადამიანები მიგვაჩნია საამაყოდ და მისაბაძად მომავალი თაობებისათვის.

პროფესორი *ვ. ცაგარეიშვილი*

უნივერსიტეტის ამაგდარი პროფესორები



თამაზ ვაშაყმაძე

თსუ ემერიტუს პროფესორი;
მთავარი მეცნიერ-თანამშრომელი,
თსუ ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი;
საქართველოს საინჟინრო მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი;
საქ. მეცნ.ეროვნ. აკადემიის ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი

პროფესორი თამაზ ვაშაყმაძე დაიბადა 1937 წლის 16 სექტემბერს თბილისში, ცნობილი პედაგოგის, სერგო ვაშაყმაძის ოჯახში. მან 1954 წ. ვერცხლის მედალზე დაამთავრა თბილისის ვაჟთა მე-7 საშუალო სკოლა, ხოლო 1959 წელს წარჩინებით — თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი. თ. ვაშაყმაძის სადიპლომო ნაშრომმა გაიყო უნივერსიტეტის პირველი პრემია (ვ. კოკილაშვილთან ერთად), ხოლო შესაბამისი შედეგი ციტირებულ იქნა გამოჩენილი მათემატიკოსის, რიჩარდ ბელმანის მონოგრაფიაში. მან 1964 წელს დაიცვა საკანდიდატო დისერტაცია გამოთვლით მათემატიკაში. სადოქტორო დისერტაციის წინასწარი დაცვა შედგა მ. ლომონოსოვის სახ. მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში 1983 წ., ოფიციალური კი — 1987 წ. ა. რაზმაძის სახ. თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტში (მექანიკის მიმართულებით 01.02.04). დისერტაციათა ხელმძღვანელი და მეცნიერ-კონსულტანტები იყვნენ აკადემიკოსები: შალვა მიქელაძე, ოლეგ ბელოცერკოვსკი, ილია ვეკუა. 1962-1968 წწ., ასპირანტურის დამთავრების შემდეგ, თ. ვაშაყმაძე მუშაობდა მათემატიკის ინსტიტუტში, 1968 წლიდან დღემდე კი თსუ ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის თანამშრომელია. ამჟამად იგი რიცხვითი მეთოდებისა და მათემატიკური მოდელირების მიმართულების ხელმძღვანელი და მთავარი მეცნ. თანამშრომელია. პარალელურად, იგი ეწევა პედაგოგიურ მოღვაწეობას; იყო სრული პროფესორი, ამჟამად თსუ-ის ემერიტუსი და მოწვეული პროფესორია.

თ. ვაშაყმაძე 200-ზე მეტი სამეცნიერო სტატიის, მათ შორის, 10-მდე მონოგრაფიისა და სახელმძღვანელოს, ავტორია. მონაწილეობდა 180-ზე მეტ საერთაშორისო და რესპუბლიკური მნიშვნელობის სამეცნიერო ფორუმების მუშაობაში, წაკითხული აქვს 130-ზე მეტი სექციური და 30-ზე მეტი პლენარული მოხსენება; იყო ორ ათეულზე მეტი საერთაშორისო კონფერენციის და კონგრესის ორგკომიტეტის წევრი; არის ოთხი ჟურნალის, მათ შორის, „Journal of Applied Functional Analysis“ (აშშ, მემფისი) რედკოლეგიის წევრი. 1998-2003 წწ. თსუ-ის შრომების, სერიით „გამოყენებითი მათემატიკა და კომპიუტერული მეცნიერებანი“, მთავარი რედაქტორია; გახლავთ რიგი სამეცნიერო (მათ შორის, თსუ დიდი საბჭოს) და სადისერტაციო საბჭოების წევრი. მისი მოღვაწეობიდან აღსანიშნავია: სსრკ მეცნიერებისა და ტექნიკის სახელმწიფო კომიტეტის გრანტი, N 0. 80. 14. 09. 20 (ხელმძღვანელი); COBASE-ს ხაზით, დელა-

ვერის უნივერსიტეტი, პროფესორი-მკვლევარი, 6 თვით; ჯონ სოროსის ფონდის ინდივიდუალური და გრძელვადიანი გრანტი KZ-200 (ჯგუფის ხელმძღვანელი); პრეზიდენტის ბრწყინვალებისა და ღირსების ორდენები; ივანე ჯავახიშვილისა (1977, 2009) და თსუ-ის მედლები; საქ. მეცნ. აკადემიის აკად. ილია ვეკუას პრემია; თურქეთის მათემატიკოსთა საზოგადოების საერთაშორისო პრემია, ვერცხლის ლანგრითურთ, უცხოელი მათემატიკოსებისათვის: „მთელი ცხოვრება მათემატიკის სამსახურში".

თ. ვაშაყმაძე არის 15-ზე მეტი, დაცული, საკანდიდატო და სადოქტორო დისერტაციების ხელმძღვანელი და მეცნიერ-კონსულტანტი. იგი ხუთ წელზე მეტია ხელმძღვანელობს და უანგაროდ ემსახურება, თსუ-ის რამდენიმე თანამშრომელთან ერთად, მოსწავლეთათვის სკოლას „ნაბიჯ-ნაბიჯ ცოდნისაკენ", სადაც მომზადდა და პრაქტიკა გაიარა 400-მდე ქართველმა და უცხოელმა ახალგაზრდამ მათემატიკასა და მომიჯნავე დარგებში.

თამაზ ვაშაყმაძე კვლევას ეწევა მათემატიკასა და მექანიკაში; გადაჭრილი აქვს რიგი პრობლემები (იხ. ვიკიპედია) და ძირითადი შედეგები შეიძლება ჩამოყალიბდეს ასე:

1. განსაზღვრულ იქნა მაღალი სიზუსტით (მძიმის შემდეგ 1200-ზე მეტი ნიშნადი ციფრით) საუკუნის განტოლების კოეფიციენტები და ფესვები;
2. ჯამთა აღრიცხვის საფუძველზე, არსებითად დაზუსტდა და განზოგადდა შესაბამისი კლასიკური (კოლატცის, ჰენრიჩის, მიქელაძის, რიჰტმაიერის, ჰარტმანის, ბერეზინისა და ჟიდკოვის, ენგელ-მიულგერისა და როიტერის, მარჩუკის, კანტოროვიჩისა და კრილოვის, შროდერის, ორტეგასა და რეიბოლდტის წიგნებში მოყვანილი) შედეგები. დამტკიცდა, რომ მიახლოებითი ამონახსნის ასაგებად საჭირო არითმეტიკულ ოპერაციათა რიცხვი (იტერაციის ყოველ ეტაპზე არაწრფივი მოდელის შემთხვევაში) 1/h (h-ბადის ბიჯია) რიგისაა;
3. დაფუძნებულ და რეალიზებულ იქნა კომპიუტერზე ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის ვარიაციულ-დისკრეტული მეთოდი როგორც შემოსაზღვრული, ისე შემოუსაზღვრელი არეებისათვის;
4. წრფივი ოპერატორული განტოლებისათვის შეიქმნა შეშფოთების (პუანკარე-ლიაპუნოვის) თეორიის ალტერნატიული კრებადი მეთოდი;
5. თერმოდრეკადი ანიზოტროპული არაერთგვაროვანი ცვლადი სისქის თხელკედლოვანი სტრუქტურებისათვის შეიქმნა მათემატიკური თეორია. ფოროვანი სტრუქტურებისათვის აგებული მათემატიკური მოდელი აზუსტებს პასკალ-დარსის კანონს;
6. აღმოჩენილ იქნა რელეი-ლემბის ტიპის ტალღური პროცესი, რომელიც ვრცელდება თხელკედლოვანი სტრუქტურის შუა ზედაპირის გასწვრივ, ფაქტობრივად, მას აქვს მოცულობითი ტალღური ქცევა;
7. უწყვეტი გარემოსათვის, ნიუტონ-ნოლის მექანიკის ფარგლებში, შეიქმნა ერთიანი მათემატიკური მოდელი, რომლის საფუძველზე ფორმირებულ იქნა დებულება იმის შესახებ, რომ რომელიმე გარემოსათვის აღმოჩენილი მოვლენა ან პროცესი საერთოა უწყვეტი გარემოს ყველა ფორმისათვის **(კანონი უწყვეტი გარემოსათვის,** იხ. „საქართველო", ენციკლოპედია, ტ. 3, გვ. 200);
8. გადაიჭრა ტრუსდელ-სიარლეს პრობლემა ფონ კარმანის განტოლებათა სისტემის ფიზიკური ინტერპრეტაციის შესახებ;
9. განზოგადებული აზრით ტრანსვერსალურად იზოტროპული დრეკადი თხელკედლოვანი სტრუქტურებისათვის აგებულ იქნა ორგანზომილებიანი მათემატიკური მოდელი, რომელიც წრფივ შემთხვევაში მიიყვანება კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემაზე. გავრცელებულ იქნა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორია არაწრფივი ამოცანებისათვის, როდესაც იგი შეიცავს მონჟ-ამპერისა და პუასონის ფრჩხილების სახის ოპერატორებსაც;
10. თ. ვაშაყმაძის σ-აღრიცხვის საფუძველზე, დამტკიცდა ანიზოტროპული (13 დრეკადობის მუდმივზე დამოკიდებული) დრეკადობის წრფივი სივრცული თეორიის შესაბამისი მახასიათებელი — ორადწრფივი ფორმის ნიშანგანსაზღვრულობა (ფრიდრიხსისა და პუანკარეს ტიპის უტოლო-

ბები ფიზიკური სიდიდეების ტერმინებში). ანალოგიური უტოლობები იზოტროპული შემთხვევისათვის წარმოადგენს ვ.კუპრაძისა და მისი თანაავტორების ცნობილი მონოგრაფიის ბაზისს;

11. გამოკვლეულ იქნა განზოგადებულ ფუნქციათა (განაწილებათა) თეორიის შექმნასთან დაკავშირებული პრობლემატიკა. ნაჩვენებია, რომ ამ თეორიის შექმნის სათავეებთან იდგა ა.რაზმაძე;
12. ნახევრად უსასრულო შუალედში გამოკვლეულ იქნა ი.ვეკუას გარსთა თეორიის იერარქიული მოდელის მდგრადობასთან დაკავშირებული პრობლემები;
13. აგებულ იქნა თხელკედლოვან თერმოდინამიკურ (არამარტო დრეკად) სტრუქტურათა შესაბამისი ორგანზომილებიანი (სივრცული ცვლადის მიმართ) მათემატიკური მოდელები, რომლის შექმნის ევოლუცია გარკვეული აზრით უკავშირდება ერნსტ ჰლადნისა და კურტ გიოდელის მემკვიდრეობას და წარმოადგენს დაპირისპირებულთა ბრძოლის და ერთიანობის და უარყოფის უარყოფის კანონთა რეალიზაციის მაგალითს;
14. „მეცნიერული გამოთვლების" მიმართულებით, რიგი პრობლემებისათვის განზოგადდა (მაგისტრანტ ზ.ვაშაკიძესთან ერთად) არსებული მეთოდოლოგია დასაშვებ კლასთა შევიწროების გარეშე, რაც მომხმარებლებს სთავაზობს კომპიუტერული ამონახსნის ასაგებად საჭირო არითმეტიკულ ოპერაციათა ოპტიმალურ რაოდენობას;
15. პოლინომთა ნამრავლისათვის აიგო ახალი ოპტიმალური სქემა. შესაბამისი მასალა დეპონირებულია საქპატენტის მიერ 17.09.2015, დეპონირების დამადასტურებელი მოწმობა N6353.

ომარ ფურთუხია

გამომცემლობის რედაქტორი	**მარინე ვარამაშვილი**
გარეკანის დიზაინი	**მარიამ ებრალიძე**
კომპ. უზრუნველყოფა	**ლალი კურდღელაშვილი**

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel: +995 (32) 2250484, 6284; 6278
www.press.tsu.edu.ge

ISSN 2298-0938