

# მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი  
№10

2024



ივანე ჯავახიშვილის  
სახელობის თბილისის  
სახელმწიფო  
უნივერსიტეტი

ზუსტ და  
საბუნებისმეტყველო  
მეცნიერებათა  
ფაკულტეტი



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტი

## მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი  
მასწავლებლებისა და მოსწავლეებისთვის

დაარსდა 2013 წელს;  
მიეძღვნა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის  
95 წლის იუბილეს.

ჩვენი მიზანია მასწავლებლებსა და  
მოსწავლეებში მათემატიკური ცოდნის  
პოპულარიზაცია, მათემატიკის  
მასწავლებელთა პროფესიული ზრდის  
ხელშეწყობა, მოსწავლეთა ჩართვა  
მათემატიკის ლამაზ სამყაროში  
მოგზაურობისა და საინტერესო  
ამოცანების ამოხსნის პროცესში;  
მოგაწვდით ინფორმაციას ჩვენი  
წარმატებული კურსდამთავრებულების  
საქმიანობისა და მომავალი სტუდენტების  
პერსპექტივების შესახებ.

### სარედაქციო საბჭო:

რამაზ ბოჭორიშვილი,  
თეიმურაზ ვეფხვაძე  
(მთავარი რედაქტორი),  
ომარ ფურთუხია  
(მთავარი რედაქტორის მოადგილე),  
როლანდ ომანაძე,  
გია გიორგაძე,  
ილია თავხელიძე,  
თენგიზ კოპალიანი,  
ქეთევან შავგულიძე,  
თინათინ დავითაშვილი,  
ბეჟან ღვაბერიძე,  
პეტრე ბაბილუა.



უნივერსიტეტის  
გამომცემლობა

## მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი  
№10 2024



თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტი



## სარჩევი

### თამაზ თადუმაძე

ბურამ ხარაბიშვილი-90 ..... 4

### დავით ნუცუბიძე

სამბანგომილებიან სივრცეში  
ჩვეულებრივ დიფერენციალურ  
განტოლებათა წრფივი სისტემის  
ამონახსნის ფაზური წირის აგება ..... 8

### ილია თავხელიძე

გამონათქვამები მათემატიკის  
გამოყენების შესახებ ..... 16

### თეიმურაზ ვეფხვაძე

საშუალო და უმაღლეს სკოლაში  
რიცხვთა თეორიის ელემენტების  
სწავლების მნიშვნელობის შესახებ ... 25

### გიორგი ჭელიძე, გივი ნადიბაიძე

ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები  
საერთაშორისო ოლიმპიადაში ..... 30

### თენგიზ კოპალიანი, ბეჟან ღვაბერიძე

წინა ნომრის ამოცანების  
ამოხსნები ..... 39

### თენგიზ კოპალიანი, ბეჟან ღვაბერიძე

ახალი ამოცანები ..... 42

# სარჩევი

|                                 |                                |    |
|---------------------------------|--------------------------------|----|
| გიორგი ჯაიანი                   | ინსტრუქცია ავტორებისთვის ..... | 47 |
| 1963 წლის შემოდგომა. მოხსენება  |                                |    |
| მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის |                                |    |
| შექმნის 45 წლის იუბილეზე.       |                                |    |
| თსუ სააქტო დარბაზი .....        |                                | 43 |

# ჟურნალი „მათემატიკა“

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“ დაარსდა 2013 წელს, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით. ჟურნალის შექმნის იდეა ფაკულტეტის დეკანს – რამამ ბოჭორიშვილს ეკუთვნის.

ჟურნალის მთავარი რედაქტორია თეიმურაზ ვეფხვაძე, მთავარი რედაქტორის მოადგილე – ომარ ფურთუხია.

ჟურნალში რამდენიმე განყოფილებაა, რომლებსაც სა-რედაქციო საბჭოს წევრები ხელმძღვანელობენ: „მათემატიკური სკოლები“ (ომარ ფურთუხია) – გადმოიცემა მასალა მათემატიკური ცნებებისა და პრობლემების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ, გამოჩენილი ქართველი მათემატიკოსების შესახებ; „თარგმანი“ (ილია თავხელიძე) – უცხოელი ავტორების სამეცნიერო-პოპულარული სტატიები; „მეთოდოლოგია“ (თეიმურაზ ვეფხვაძე, ქეთევან შავგულიძე) – მასალა, რომელიც ხელს შეუწყობს მასწავლებელთა პროფესიულ ზრდას; „მოსწავლეები“ (თენგიზ კოპალიანი, ბეჟან დვაბერიძე) – მასალა, რომელიც განკუთვნილია მოსწავლეებში მათემატიკის პოპულარიზაციისთვის, მათემატიკური ოლიმპიადების მიმოხილვა, საინტერესო ამოცანები მოსწავლეებისთვის; „თსუ“ (თინათინ დავითაშვილი) – საინტერესო ფაქტები და მოვლენები ჩვენი უნივერსიტეტის ისტორიიდან.

ჟურნალი იღებს სტატიებს ჩამოთვლილი განყოფილებების მიხედვით და, დადებითი რეცენზიის მიღების შემთხვევაში, იბეჭდება.

სტატიის წარმოდგენისას ავტორებმა უნდა დაიცვან მათთვის განკუთვნილი ინსტრუქციის მოთხოვნები.



# გურამ ხარატიშვილი —90

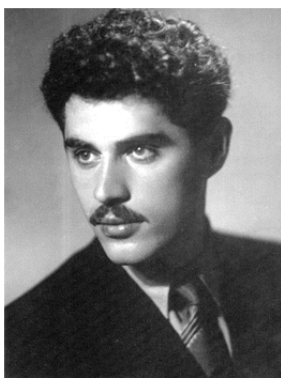
მ  
ე  
ც  
ნ  
ი  
ე  
რ  
ე  
ბ  
ა  
თ  
ა  
მ  
ა  
თ  
ე  
მ  
ა  
ტი  
კ  
ი  
ს  
ი



## თამაზ თადუმაძე

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა  
დოქტორი, თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო  
მეცნიერებათა ფაკულტეტის პროფესორი.

ცნობილი ქართველი მათემატიკოსი, სა-  
ქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკა-  
დემიის აკადემიკოსი, პროფესორი გურამ ხა-  
რატიშვილი დაიბადა 1934 წლის 14 იანვარს,  
ქალაქ გორში. დედა — ირინე რაზიკაშვილი  
იყო დამსახურებული ექიმი, გენიალური ქარ-  
თველი პოეტის, ვაჟა-ფშაველას უახლოესი  
ნათესავი. მამა — ლევან ხარატიშვილი იყო  
დამსახურებული ინჟინერი. გ. ხარატიშვილმა  
1951 წელს მედალზე დაამთავრა გორის მე-2  
საშუალო სკოლა და იმავე წელს სწავლა გა-  
ნაგრძო მ. ლომონოსოვის სახელობის მოს-  
კოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, მექანი-  
კა-მათემატიკის ფაკულტეტზე.



გ. ხარატიშვილი მოსკოვის  
სახელმწიფო უნივერსიტეტის სტუდენტი

გ. ხარატიშვილმა თავისი სადიპლომო ნა-  
შრომი „სქელი გარსების თეორიის ზოგიერთი  
ამოცანა“ შეასრულა გამოჩენილი მათემატი-  
კოსის, ილია ვეკუას ხელმძღვანელობით.



ილია ვეკუა

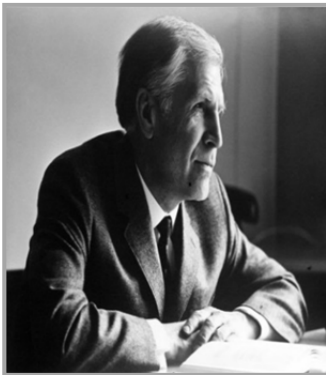
ი. ვეკუას რჩევითა და რეკომენდაციით,  
იგი 1956 წელს დაბრუნდა თბილისში და მუ-  
შაობა დაიწყო საქართველოს მეცნიერებათა  
ეროვნული აკადემიის გამოთვლით ცენტრში  
(ახლანდელი ნ. მუსხელიშვილის სახელობის  
გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტი), სა-  
დაც მან 1957-1966 წწ. განვლო გზა უმცროსი  
მეცნიერი თანამშრომლიდან განყოფილების  
გამგებდე. გ. ხარატიშვილის პირველი გამოკ-  
ვლევა ეხებოდა მინიმალური საკუთრივი  
რიცხვების გამოთვლის მეთოდის დამუშავე-  
ბას სპეციალური კლასის ინტეგრალური გან-  
ტოლებებისათვის. გ. ხარატიშვილის ცხოვრე-  
ბაში მნიშვნელოვანია 1958 წელი. იგი ამ  
წელს პირველად შეხვდა გენიალური რუსი  
მათემატიკოსის, ლევ პონტრიაგინის მოწაფე-  
სა და მისი სკოლის ერთ-ერთ თვალსაჩინო  
წარმომადგენელს, ოპტიმალური მართვის მა-  
თემატიკური თეორიის ერთ-ერთ ფუძემდე-  
ბელ რევამ გამყრელიძეს, რომელმაც პირვე-  
ლად დაამტკიცა პონტრიაგინის მაქსიმუმის  
პრინციპი (მართვის ოპტიმალურობის აუცი-

ლებელი პირობა) წრფივი ოპტიმალური ამოცანისთვის.



რევაზ გამყრელიძე

რ. გამყრელიძესთან შეხვედრას შედეგად მოჰყვა ის, რომ გ. ხარატიშვილი 1958-1961 წლებში, რ. გამყრელიძის ხელმძღვანელობით, გადიოდა სამეცნიერო სტაჟირებას მოსკოვში, სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში, სადაც ფუნქციონირებდა ლ. პონტრიაგინის სახელგანთქმული სემინარი.



ლევ პონტრიაგინი

სემინარის ერთ-ერთ სხდომაზე, ავტომატური მართვის თეორიის ცნობილი მეცნიერების — ალექსანდრე ფელდბაუმისა და მარკ აიზერმანის მიერ განხილულ იქნა ერთი მარტივი სამართავი მათემატიკური მოდელი, რომელიც შეიცავდა დაგვიანების ფაქტორს.



ა. ფელდბაუმი

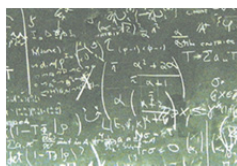


მ. აიზერმანი

რას ნიშნავს დაგვიანების ფაქტორი? დაგვიანების ფაქტორს შეიცავს ისეთი სისტემები, რომელთა მდგომარეობა მოცემულ მომენტში დამოკიდებულია სისტემის ყოფაქცევაზე წარსულში, ანუ სისტემის წინაისტორიაზე. ასეთი სისტემები წარმოიშობა ეკონომიკაში, ბიოლოგიაში, ტექნიკაში და სხვა დარგებში. რ. გამყრელიძემ დასვა პრობლემა: დაამტკიცეთ პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის ანალოგი ისეთი ოპტიმალური ამოცანისთვის, რომელშიც გათვალისწინებული იქნება დაგვიანების ფაქტორი. პრობლემაზე მუშაობისას გ. ხარატიშვილმა აღმოაჩინა, სამეცნიერო ლიტერატურაში მაშინ ჯერ კიდევ უცნობი, ე. წ. „დიფერენციალური განტოლება წინმსწრები არგუმენტით“, რომლის საფუძველზეც 1960 წელს დაამტკიცა თეორემა, სადაც გადაწყვეტილი იყო რ. გამყრელიძის მიერ დასმული პრობლემა. აღსანიშნავია, რომ მოგვიანებით, გ. ხარატიშვილისგან დამოუკიდებლად, დიფერენციალური განტოლება წინმსწრები არგუმენტით, სხვა მათემატიკურ პრობლემასთან დაკავშირებით, გამოვლენილ იქნა მართვის თეორიის ერთ-ერთი ფუძემდებლის, ამერიკელი მათემატიკოს რიჩარდ ბელმანის მიერ.



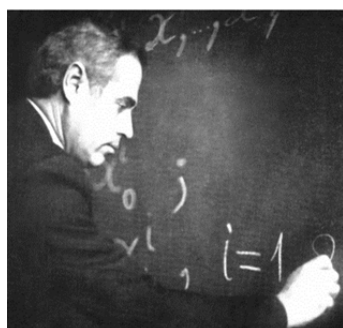
რიჩარდ ბელმანი



გ. ხარატიშვილის თეორემა, ლ. პონტრიაგინის წარდგინებით, გამოქვეყნდა ჟურნალში:

G. L. Kharatishvili, The maximum principle in the theory of optimal processes with delay. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 136(1) (1961), 39-42.

ამ შედეგმა გ. ხარატიშვილს მოუტანა ფართო საერთაშორისო აღიარება და პოპულარობა. 1961 წელს მას მიენიჭა ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხი.



გ. ხარატიშვილი

გ. ხარატიშვილის ფუნდამენტური შედეგი საფუძვლად დაედო ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებების ოპტიმალური მართვის თეორიას და შეტანილ იქნა მრავალი მეცნიერის წიგნში (N. M. Ogustoreli, L. W. Neustadt, R. Gabasov and F. Kirillova და ა. შ.); მას ცალკე პარაგრაფი აქვს დათმობილი მსოფლიოში აღიარებულ მონოგრაფიაში:

L. S. Pontriagin, V. G. Boltianskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Wiley, New-York, 1962.

გ. ხარატიშვილის მეცნიერული ინტერესები მრავალფეროვანი იყო. იგი ეხებოდა: ექსტრემალური ამოცანების ზოგად თეორიას, დიფერენციალური თამაშების თეორიას, გამოთვლით მეთოდებს ოპტიმალურ ამოცანებში, ცვლადსტრუქტურულ სამართ სისტემებს, ეკონომიკური სისტემების მოდელირებასა და ოპტიმიზაციას, ჩვეულებრივი და ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებების თვისებრივი თეორიის სხვადასხვა ასპექტს. გ. ხარატიშვილი ავტორია ოთხი მონოგრაფიის:

1. Г. Л. Харатишвили, Оптимальные процессы с запаздываниями. "Мецниереба", 1966;

2. Г. Л. Харатишвили, З. А. Мачаидзе, Н. И. Маркозашвили, Т. А. Тадумадзе. Абстрактная вариационная теория и ее применения к оптимальным задачам с запаздываниями. "Мецниереба", 1973;

3. G. Kharatishvili, T. Tadumadze, N. Gorgodze, Continuous dependence and differentiability of solution with respect to initial data and righthand side for differential equations with deviating argument. Mem. Diff. Eq. Math. Phys. 19 (2000), 3-105;

4. G. Kharatishvili, T. Tadumadze, Variation formulas of solutions and optimal control problems for differential equations with retarded argument. J. Math. Sci. (N.Y.), v. 104, No. 1(2007), 1-175.

ასევე ავტორია 50-ზე მეტი სამეცნიერო ნაშრომისა. გ. ხარატიშვილმა 1969 წელს დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია თემაზე: „ექსტრემალური ამოცანები წრფივ ტოპოლოგიურ სივრცეებში“; 1970 წ. მიენიჭა თსუ პროფესორის წოდება; 1979 წ. აირჩიეს საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული (სმე) აკადემიის წევრ-კორესპონდენტად, ხოლო 1988 წელს — აკადემიკოსად. 2001 წელს გ. ხარატიშვილს (მოწაფეებთან ერთად) მიენიჭა სმე აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის პრემიის ლაურეატის წოდება ნაშრომთა ციკლისათვის: „გადახრილარგუმენტიანი დიფერენციალურ განტოლებათა ამონახსნების ვარიაციის თეორია და მისი გამოყენება ოპტიმალური მართვის ამოცანებში წყვეტილი საწყისი პირობით“.



ანდრია რაზმაძის სახელობის პრემიის ლაურეატები: ნიკა გორგოძე, თამაზ თაღუმაძე, გურამ ხარატიშვილი. სურათი გადაღებულია თსუ-ის ეზოში, ანდრია რაზმაძის ძეგლის ფონზე. გ. ხარატიშვილი მრავალი საერთაშო-

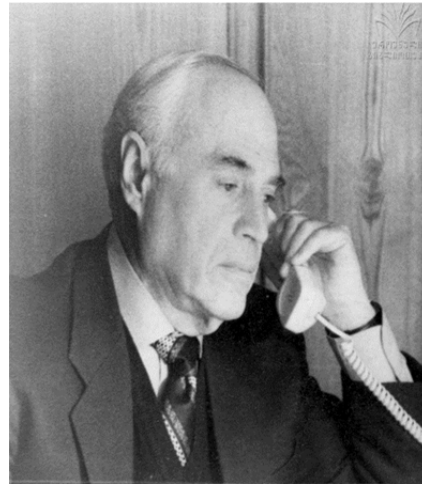
რისო სამეცნიერო ფორუმის მონაწილე და ორგანიზატორი იყო, მათ შორის აღსანიშნავია: საერთაშორისო სიმპოზიუმი მართვის თეორიაში (ლოს ანჯელესი — 1967, აშშ, სამხრეთ კალიფორნიის უნივერსიტეტი), თბილისი (1969, 1976); მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესი (ნიცა — 1970, საფრანგეთი). მართვის თეორიის პრობლემებზე ლექციების წასაკითხად არაერთხელ იყო მიწვეული უცხოეთის სამეცნიერო ცენტრებში: აშშ, კანადა, პოლონეთი და სხვა. რ. გამყრელიძემ და გ. ხარატიშვილმა 1968 წელს, ი. ვეკუას ხელშეწყობით, თსუ გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტზე ჩამოაყალიბეს მართვის თეორიის კათედრა; თსუ გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში — დიფერენციალური განტოლებებისა და მართვის თეორიის განყოფილება. მოკლე ხანში კათედრა და განყოფილება გადაიქცა ახალგაზრდა სამეცნიერო კადრების მომზადებისა და მეცნიერული კვლევების მძლავრ კერად. რ. გამყრელიძე და გ. ხარატიშვილი არიან საქართველოში ოპტიმალური მართვის თეორიის განვითარების ორგანიზატორები და პირველი ქართველი მათემატიკოს-მეცნიერის, ანდრია რაზმაძის მეცნიერული მემკვიდრეობის გამგრძელებელნი.



ანდრია რაზმაძე

გ. ხარატიშვილი იყო: თსუ გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის განყოფილების გამგე, თსუ მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის დეკანი, თსუ მართვის თეორიის კათედრის გამგე, მართვის სისტემების ინსტიტუტის დირექტორი, კიბერნეტიკის ინსტიტუტის დი-

რექტორი, საქართველოს 1991 წლის მოწვევის უზენაესი საბჭოს დეპუტატი, თსუ სადისერტაციო საბჭოს თავმჯდომარე, სმე აკადემიის ვიცე-პრეზიდენტი და ფიზიკა-მათემატიკის ბიუროს წევრი; მრავალი სამეცნიერო საბჭოსა და სამეცნიერო ჟურნალის რედაქციის წევრი.



გ. ხარატიშვილი

გ. ხარატიშვილი გამორჩეული ლექტორი და მოსაუბრე იყო. იგი მომხიბვლელად კითხულობდა ლექციებს თსუ მექანიკა-მათემატიკის, თსუ გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტზე. დიდია მისი წვლილი ახალგაზრდა სამეცნიერო კადრების მომზადებაში. მის მრავალრიცხოვან მოწაფეებს შორის მრავლადაა მეცნიერებათა კანდიდატი და დოქტორი, რომელთა გამოკვლევები აღიარებულია და ცნობილია საერთაშორისო მასშტაბით. გ. ხარატიშვილის ჰობი იყო ფერწერა და, როგორც ბუნებით ოპტიმისტი, ყოველთვის ნათელ ფერებში ხედავდა საქართველოს უკეთეს მომავალს. გ. ხარატიშვილი გარდაიცვალა 2009 წლის 8 სექტემბერს, რაც დიდი დანაკლისი იყო ჩვენი სამშობლოსთვის და, საერთოდ, მათემატიკისთვის, მისი მრავალრიცხოვანი მოწაფეებისთვის. გ. ხარატიშვილის მიერ განვლილი ცხოვრების გზა და დატოვებული მეცნიერული მემკვიდრეობა მომავალი თაობებისთვის იქნება მისაბაძი და სტიმული შემოქმედებითი მუშაობისთვის.



# სამგანზომილებიან სივრცეში ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა წრფივი სისტემის ამონახსნის ფაზური წირის აგება



## დავით ნუსუბიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა  
კანდიდატი;  
მოსკოვის სახელმწიფო ჰუმანიტარულ-  
ეკონომიკური უნივერსიტეტის უმაღლესი  
მათემატიკის კათედრის დოცენტი,  
რუსეთის ფედერაციის განათლების  
სფეროს საპატიო მოღვაწე.

**ანოტაცია.** სამგანზომილებიან სივრცეში ცხადი სახით აგებულია ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა კონკრეტული წრფივი სისტემის ამონახსნის ფაზური წირი.

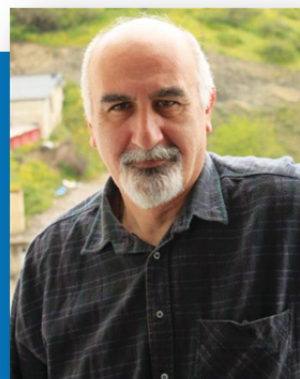
**AMS 2010 Mathematics Subject Classifications:** 34A05;

**Keywords:** *the phase curve, linear system of differential equations.*

**საკვანძო სიტყვები:** ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა წრფივი სისტემა; ფაზური წირი.

## რუსულიდან თარგმნა ილია თავხელიძემ

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,  
ასოცირებული პროფესორი;  
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა  
ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი;  
1984 წ. დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009  
წლის ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის  
მემორიალური ოქროს მედლით.



## შესავალი

სტატიაში განხილული ტიპის ამოცანას ფაზური წირის აგების შესახებ, მოსკოვის მ. ვ. ლო-  
მონოსოვის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის  
სტუდენტებს გვთავაზობდა პროფესორი ვლადიმერ არნოლდი (მე<sup>1</sup> და დავით ნუსუბიძე ვიყა-

<sup>1</sup> იგულისხმება ილია თავხელიძე.

ვით თანაჯგუფელები 1971-1976 წწ.). წარმოდგენილ ნაშრომში შემოთავაზებულია აღნიშნული ამოცანის ცხადად ამოხსნის ერთი გზა, რომელიც ნათლად გვიჩვენებს მჭიდრო კავშირს წრფივ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემასა და წრფივ ალგებრას შორის.

**ამოცანის დასმა:** ააგეთ მოცემული

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{z}(t) = 3x(t) + z(t) \end{cases} \quad (1)$$

სისტემის ამონახსნის ფაზური წირი, რომელიც გადის

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

წერტილში [1]. აქ

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$$

მოცემული სისტემა (1) ჩავწეროთ ვექტორული ფორმით:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t), \quad (2)$$

სადაც:

$$X(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X}(t) \equiv \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad A \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**ფაზური სივრცე ეწოდება**

$$X \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ვექტორების ერთობლიობას, სადაც  $X$ ,  $Y$  და  $Z$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. ცხადია, ამ კონკრეტული ამოცანის შემთხვევაში ფაზური სივრცის განზომილება ტოლია სამის და მას აღვნიშნავთ სიმბოლოთი  $R^3$ . ვთქვათ:

$$X(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

არის (1) სისტემის, ანუ (2) განტოლების ამონახსნი. შესაბამისად,  $t$  ცვლადის ცვლილების შედეგად,  $X(t)$  ფაზურ სივრცეში აღწერს წირს, რომელსაც ეწოდება ფაზური წირი. ამოცანის ამოხსნა შედგება 4 ეტაპისგან.

**ეტაპი I. წარმოდგენილი სისტემის  $A$  მატრიცის საკუთრივი რიცხვებისა და საკუთრივი ვექტორების პოვნა**

**საკუთრივი რიცხვი.**  $A$  მატრიცის  $\mu$  საკუთრივი რიცხვი ეწოდება მახასიათებელი განტოლების

$$|A - \mu E| = \begin{vmatrix} 1 - \mu & -1 & -1 \\ 1 & 1 - \mu & 0 \\ 3 & 0 & 1 - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

ამონახსნს, სადაც  $|\cdot|$  – აღნიშნავს მატრიცის დეტერმინანტს, ხოლო  $E$  არის ერთეულოვანი მატრიცა, ანუ ამ კონკრეტულ შემთხვევაში:

$$E \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



გამოვთვალოთ (3) განტოლებაში შემავალი მე-3 რიგის დეტერმინანტი. გვექნება:

$$(1 - \mu) \cdot \begin{vmatrix} 1 - \mu & 0 \\ 0 & 1 - \mu \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 - \mu \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 - \mu & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

მე-2 რიგის დეტერმინანტების გამოთვლის შედეგად დავინახავთ, რომ მახასიათებელი განტოლება (3) არის შემდეგი სახის კუბური განტოლება:

$$(1 - \mu)^3 - (-(1 - \mu)) + 3(-(1 - \mu)) = (1 - \mu) \cdot ((1 - \mu)^2 + 4) = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ან  $1 - \mu = 0$ , ან  $(1 - \mu)^2 + 4 = 0$ ; ამრიგად, A მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1 - 2i, \quad \mu_3 = 1 + 2i.$$

**საკუთრივი ვექტორი.**  $\mu$  –საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი ეწოდება არანულოვან

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$AX = \mu X, \text{ რაც იგივეა } (A - \mu E)X = 0.$$

თუ  $\mu = \mu_1 = 1$ , მაშინ მისი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი X აკმაყოფილებს ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$(A - \mu_1 E) \cdot X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y - z = 0 \\ x = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(4) სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი, რადგანაც მისი მთავარი დეტერმინანტი ნულის ტოლია (იხ. (3)). ამრიგად,  $\mu_1 = 1$  საკუთრივ რიცხვს შეესაბამება უსასრულო რაოდენობა საკუთრივი ვექტორებისა, რომლებსაც აქვთ შემდეგი სახე:

$$X_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix},$$

სადაც y ნებისმიერი არანულოვანი ნამდვილი რიცხვია. დავრწმუნდეთ ამაში, ანუ:

$$A \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} = \mu_1 \cdot X_1.$$

მაგალითად, თუ  $y = 1$ , მაშინ

$$\hat{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

იქნება  $\mu = 1$  საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი ერთ-ერთი საკუთრივი ვექტორი. თუ  $X_1$  საკუთრივი ვექტორების ერთობლიობას დავუმატებთ ნულოვან ვექტორს, მივიღებთ წრფივ სივრცეს, რომელსაც  $\mu_1$  საკუთრივი რიცხვის ქვესივრცე („A მატრიცის საკუთრივი ქვესივრცე“) ეწოდება. ამგვარად,  $\mu_1$  შესაბამისი საკუთრივი ქვესივრცეა შემდეგი ვექტორების:

$$X_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix}$$

ერთობლიობა, სადაც y ნებისმიერი რიცხვია. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ქვესივრცე არის YOZ სიბრტყის ქვესიმრავლე და, ფაქტობრივად, ის არის YOZ სიბრტყის სათავეში გამავალი ბისექტრისა.

თუ  $\mu = \mu_2 = 1 - 2i$ , მაშინ:

$$A - \mu_2 E = \begin{pmatrix} 2i & -1 & -1 \\ 1 & 2i & 0 \\ 3 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

და სამართლიანია მსჯელობა:

$$(A - \mu_2 E) \cdot \bar{X} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2i & -1 & -1 \\ 1 & 2i & 0 \\ 3 & 0 & 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2ix - y - z = 0 \\ x + 2iy = 0 \\ 3x + 2iz = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2iy = 0 \\ -6iy + 2iz = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2iy = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2iy \\ y \\ 3y \end{pmatrix}.$$

ამრიგად,  $\mu_2 = 1 - 2i$ -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორია:

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2iy \\ y \\ 3y \end{pmatrix},$$

ანუ ვექტორების ერთობლიობა, სადაც  $y$  ნებისმიერი არანულოვანი რიცხვია.

$$A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2iy \\ y \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y - 2iy \\ y - 2iy \\ 3y - 6iy \end{pmatrix} = (1 - 2i) \cdot \begin{pmatrix} -2iy \\ y \\ 3y \end{pmatrix} = \mu_2 \cdot X_2.$$

ცხადია, რომ  $\mu_2$ -ის ერთ-ერთი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორია:

$$\hat{X}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

თუ  $\mu = \mu_3 = 1 + 2i$ , მაშინ:

$$A - \mu_3 E = \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

და:

$$(A - \mu_3 E) \cdot \bar{X} = \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2iy - y - z = 0 \\ x - 2iy = 0 \\ 3x - 2iz = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2iy = 0 \\ 6iy - 2iz = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2iy = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2iy \\ y \\ 3y \end{pmatrix}.$$

ამგვარად, საკუთრივ რიცხვს  $\mu_3 = 1 + 2i$  შეესაბამება საკუთრივი ვექტორი:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 2iy \\ y \\ 3y \end{pmatrix},$$

სადაც  $y$  ნებისმიერი არანულოვანი რიცხვია.

შემოწმება:

$$A \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2iy \\ y \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y + 2iy \\ y + 2iy \\ 3y + 6iy \end{pmatrix} = (1 + 2i) \cdot \begin{pmatrix} 2iy \\ y \\ 3y \end{pmatrix} = \mu_3 X_3.$$



ცხადია, რომ  $\mu_3$ -ის ერთ-ერთი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორია:

$$\hat{X}_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ამგვარად, საკუთრივ რიცხვს  $\mu_1 = 1$ , შესაბამება საკუთრივი ვექტორი:

$$\hat{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

საკუთრივ რიცხვს  $\mu_2 = 1 - 2 \cdot i$ , შესაბამება საკუთრივი ვექტორი:

$$\hat{X}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ხოლო საკუთრივ რიცხვს  $\mu_3 = 1 + 2i$ , შესაბამება საკუთრივი ვექტორი:

$$\hat{X}_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**ეტაპი II. წარმოდგენილი ამოცანის საკუთრივი წრფივი ქვესივრცეების პოვნა**

**A** მატრიცის ინვარიანტული და საკუთრივი ქვესივრცე:  $R^3$  სივრცის რაიმე  $\Omega$  ქვესივრცეს ეწოდება ინვარიანტული **A** მატრიცის (ოპერატორის) მიმართ, თუ

$$A: \Omega \rightarrow \Omega,$$

ხოლო, თუ დამატებით

$$\Omega \neq R^n,$$

მაშინ  $\Omega$ -ს **A** მატრიცის საკუთრივი ქვესივრცე ეწოდება.

კონკრეტულად ამ შემთხვევაში, **A** მატრიცას გააჩნია ერთგანზომილებიანი საკუთრივი წრფივი ქვესივრცე  $\Pi_1$ , რომელიც წარმოიქმნება

$$\hat{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ვექტორის საშუალებით, სახელდობრ:

$$\Pi_1 \equiv \{\alpha \hat{X}_1: \alpha \in R^1 \equiv (-\infty, \infty)\} \subseteq R^3$$

და ორგანზომილებიანი წრფივი საკუთრივი ქვესივრცე  $\Pi_2$ , რომლის წარმოქმნაშიც მონაწილეობას იღებს ორი ვექტორი:

$$\vec{X}_2 = \frac{\hat{X}_2 + \hat{X}_3}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \vec{X}_3 = \frac{\hat{X}_2 - \hat{X}_3}{2i} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ეს,  $\vec{X}_2$  და  $\vec{X}_3$  ვექტორები ურთიერთმართობულია, მართლაც:

$$(\vec{X}_2 \cdot \vec{X}_3) = 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0.$$

ეს ვექტორები წარმოშობენ ორგანზომილებიან წრფივ ქვესივრცეს:

$$\Pi_2 \equiv \{\alpha \vec{X}_2 + \beta \vec{X}_3: \alpha, \beta \in R^1 \equiv (-\infty, \infty)\} \neq R^3.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს ქვესივრცე ინვარიანტულია  $A$  მატრიცის მიმართ. ეს იმას ნიშნავს, რომ ეს მატრიცა ამ ქვესივრცეს გადასახავს თავის თავში. მართლაც:

$$A \cdot \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{X}_2 + 2 \cdot \vec{X}_3$$

და

$$A \cdot \vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \vec{X}_2 + \vec{X}_3.$$

ახლა ვიპოვოთ ამ ორგანზომილებიანი  $\Pi_2$  საკუთრივი ქვესივრცის (სიბრტყის) განტოლება. განვიხილოთ ვექტორული ნამრავლი:

$$\vec{X}_2 \times \vec{X}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}.$$

ამრიგად,  $\Pi_2$  საკუთრივი ქვესივრცის (სიბრტყის) განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$-6 \cdot y + 2 \cdot z = 0,$$

ანუ

$$-3 \cdot y + z = 0. \quad (5)$$

შევნიშნოთ, რომ წერტილი

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

რომელშიც უნდა გაიაროს საძიებო წირმა, ეკუთვნის  $\Pi_2$  საკუთრივ ქვესივრცეს (იხ. სიბრტყის განტოლება (5)).

### ეტაპი III. დასმული ამოცანის ნამდვილ ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემის პოვნა

მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ნამდვილ ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემა შემდეგი სახისაა:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t, \\ \operatorname{Re} \left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{(1-2i)t} \right\} = \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} \cdot e^t$$

და

$$\operatorname{Im} \left\{ \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{(1-2i)t} \right\} = \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ -\sin 2t \\ -3 \sin 2t \end{pmatrix} \cdot e^t.$$

შესაბამისად, მოცემული სისტემის ნამდვილი ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} \cdot e^t + C_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ -\sin 2t \\ -3 \sin 2t \end{pmatrix} \cdot e^t, \quad (6)$$

სადაც  $C_1, C_2$  და  $C_3$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.



#### ეტაპი IV. დასმული ამოცანის ამოხსნა

ვიპოვოთ (1) სისტემის ის ამონახსნი, რომელიც საწყის პირობას

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

აკმაყოფილებს, რისთვისაც ზოგადი ამონახსნის წარმოდგენაში, (6) -ში დავუშვათ, რომ  $t=0$  და გავითვალისწინოთ პირობა (7), მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

საიდანაც ჩანს, რომ მიღებულ სისტემას აქვს შემდეგი ამონახსნი:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -0,5.$$

აქედან ვასკვნით, რომ სისტემის საძიებო ამონახსნი შემდეგი სახისაა:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ -\sin 2t \\ -3 \sin 2t \end{pmatrix} \cdot e^t$$

ან

$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t \cdot e^t \\ y(t) = 0,5 \cdot \sin 2t \cdot e^t \\ z(t) = 1,5 \cdot \sin 2t \cdot e^t \end{cases}$$

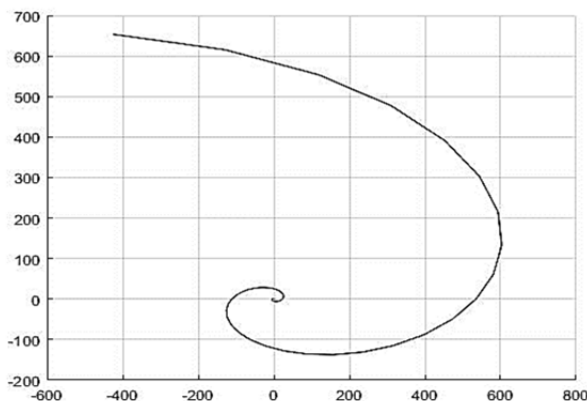
მარტივად საჩვენებელია, რომ ნაპოვნი წირი მთლიანად განთავსებულია  $-3 \cdot y + z = 0$  სიბრტყეში.

მართლაც:

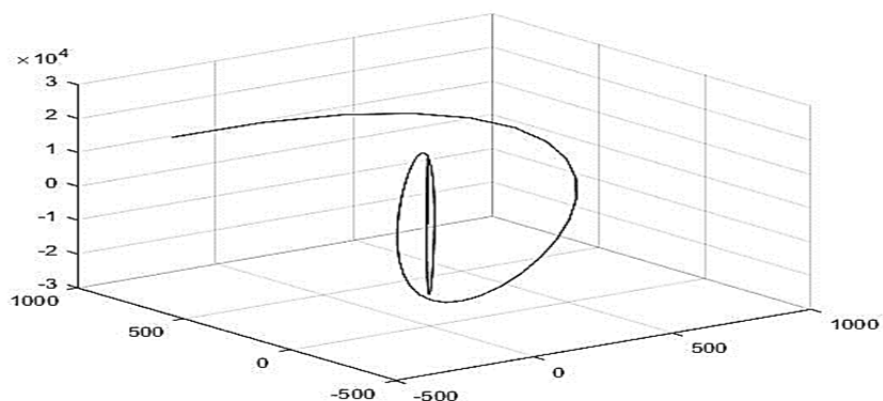
$$-3 \cdot 0,5 \cdot \sin 2t \cdot e^t + 1,5 \cdot \sin 2t \cdot e^t = 0.$$

ამგვარად, დასმული (1),(7) ამოცანის ფაზური წირი განთავსებულია  $-3 \cdot y + z = 0$  სიბრტყეში (იხ. ნახ. 1).

ამ შემთხვევაში დასმული ამოცანის განსაკუთრებულობა იმაში მდგომარეობს, რომ ფაზური წირი „ბრტყელია“ (განთავსებულია სიბრტყეში). ეს ხდება იმ შემთხვევაში, როდესაც საწყის პირობაში მოცემული წერტილი საკუთრივ ქვესივრცეშია.



ნახ.1. ფაზური წირის სახე  $-3 \cdot y + z = 0$  სიბრტყეში.



ნახ. 2. ამონახსნის სახე სივრცეში.

## ლიტერატურა

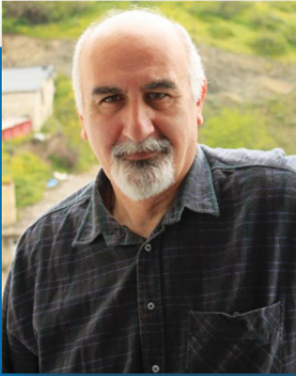
1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: МЦНМО, 2012. – 344 с.

## ბოლოთქმა

2024 წლის 13 მარტს ავტორს შეუსრულდა 70 წელი. ჟურნალის რედაქციის სახელით ვულოცავთ ბატონ დავითს ამ ღირსშესანიშნავ თარიღს და ვუსურვებთ მას წარმატებასა და ჯანმრთელობას! აგრეთვე ავტორი და მთარგმნელი დიდ მადლობას უხდის პროფესორ თამაზ თადუმაძეს ძალიან სასარგებლო შენიშვნებისათვის, რომელთა გათვალისწინებამ გაცილებით ადვილად გასაგები გახდა სტატიის შინაარსი მკითხველთა ფართო წრისათვის.



# გამონათქვამები მათემატიკის გამოყენების შესახებ

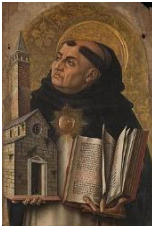
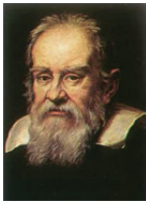


## შეაგროვა და თარგმნა ილია თავხელიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,  
ასოცირებული პროფესორი;  
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა  
ფაკულტეტი, აკადემიკოს ილია ვეკუას პრემიის ლაურეატი;  
1984 წ. დაჯილდოებულია უკრაინის მათემატიკოსთა 2009 წლის  
ყრილობის, აკადემიკოს ნიკოლოზ ბოგოლიუბოვის  
მემორიალური ოქროს მედლით.

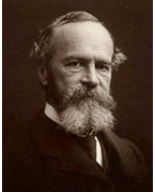
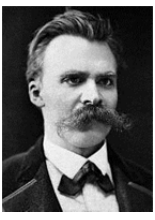
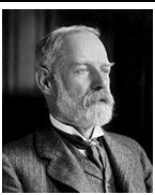
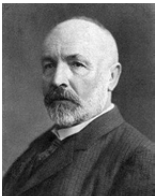
40 წელზე მეტია ვასწავლი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. ყოველთვის მაინტე-  
რესებდა სხვადასხვა ადამიანის აზრი გამოყენებითი მათემატიკისა და ე.წ. „წმინ-  
და“ მათემატიკის გამოყენების მნიშვნელობასა და მეთოდებზე. ამ თემაზე ახლა შემოგთა-  
ვაზებთ ჩემ მიერ სხვადასხვა დროს და გარემოებაში შეგროვებულ, ქრთულად გადათარგმნილ  
და ჩაწერილ გამონათქვამებს. ზოგიერთ გამონათქვამს მე ხანდახან არც კი ვეთანხმები  
(ზოგჯერ კატეგორიულადაც), მაგრამ მკითხველმა უნდა იცოდეს ამ ულამაზესი მეცნიერების  
შესახებ გამოთქმული სხვადასხვა მოსაზრება. წინა ნომრებში შემოგთავაზეთ გამონათქვა-  
მები: მათემატიკის – N6, გეომეტრიის – N7, რიცხვის და დამტკიცების – N8 და მათემატიკის  
შესწავლის შესახებ – N 9. შემდგომ ვაპირებ წარმოგიდგინოთ ასეთივე კოლექციები: მათემა-  
ტიკური კანონზომიერების, მათემატიკური დარგებისა და სხვ... შესახებ. სამწუხაროდ, ამ გა-  
მონათქვამებს აკლია ციტირება, მაგრამ ჩვენი მკითხველი, მგონი, მომიტევებს. მოხარული  
ვიქნები, თუ ჩვენს ჟურნალს გაამდიდრებთ ჩემ მიერ ვერმოძიებული ციტატებით.

|                                                                                                                                                                                                           |                                         |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|--|
| კარგი იქნებოდა, რომ ეს ცოდნა თვით სახელმწიფოში ყოფი-<br>ლიყო მოთხოვნი და სახელმწიფოს უმაღლეს თანამდებო-<br>ბის პირებს ასწავლიდნენ მათემატიკას, რომ საჭიროების შემ-<br>თხვევაში მათ ის გამოიყენონ.         | <b>პლატონი</b><br>429 – 347<br>ძვ.წ.    |  |
| 1. ბუნების შესახებ სწავლებაც და მათემატიკაც უნდა ჩაითვა-<br>ლოს სიბრძნის ნაწილებად;<br>2. მათემატიკა გამოარჩევს წესრიგს, სიმეტრიასა და გარკვე-<br>ულობას, ეს კი მშვენიერების უმნიშვნელოვანესი სახეობებია. | <b>არისტოტელე</b><br>384 – 322<br>ძვ.წ. |  |
| მათემატიკა – ესაა რეალური სამყაროს ანარეკლი<br>გონების ეკრანზე.                                                                                                                                           | <b>არქიმედე</b><br>287 – 212<br>ძვ.წ.   |  |

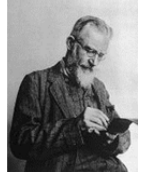
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                               |                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| ბუნების კანონები მხოლოდ ღმერთის მათემატიკური აზრებია.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>ეპკლიდე</b><br>IV – III ძვ.წ.                              |    |
| ფიზიკისა და მათემატიკის მჭიდრო კავშირიდან იხადება პრაქტიკა.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>როჯერ ბეკონი</b><br>1212 – 1292<br><i>Doctor Mirabilis</i> |    |
| სილამაზე მდგომარეობს შესაბამის პროპორციებში: გრძნობებს მოსწონთ ის ნივთები, რომელთაც მათი შესაბამისი პროპორცია გააჩნიათ, რადგან გრძნობები არის რაღაცნაირი შეგრძნება, როგორც, ზოგადად, ყოველგვარი შემეცნებითი უნარები.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>თომა აქვინელი</b><br>1225 – 1275<br><i>ფილოსოფოსი</i>      |    |
| ინდოეთში მოგზაურობისას მე არ გამომიყენებია ინტელექტი, მე გამოვიყენე მათემატიკა და რუკები.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>ქრისტეფორე კოლუმბი</b><br>1451 – 1506                      |   |
| ღმერთმა სამყაროში ჩააქსოვა მკაცრი მათემატიკური აუცილებლობა, რომლებსაც ადამიანები ძალზე რთულად იგებენ, თუმცა მათი გონი შექმნილია ღვთიური გონის მსგავსად და სადარად... ბუნების კვლევა ისეთივე ღვთისმოსავი საქმეა, როგორც ბიბლიის შესწავლა. ღვთიურ ქმედებებში ღმერთი წარმოგვიდგება არანაკლებ ალსაფრთოვანებელი სახით, ვიდრე ბიბლიის ღვთიურ წერილებში.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>გალილეო გალილეი</b><br>1564 – 1642                         |  |
| 1. ბუნება განასახიერებს იმას, რასაც თეორიულად ეფუძნება მათემატიკა;<br>2. მეცნიერული კვლევების მიზანი უნდა იყოს გონის ისეთნაირად მომართვა, რომ მან შეძლოს მყარი და ჭეშმარიტი მსჯელობა ყოველ შემხვედრ მოვლენაზე!.. თითქმის არავინ არ ფიქრობს კარგ გონზე ან ამ ყოვლისმომცველ სიბრძნეზე, მიუხედავად იმისა, რომ ყველა დანარჩენი ქმედებანი არა მარტო ფასეულნი არიან თავისთავად, არამედ იმიტომ, რომ სხვადასხვანაირად ემსახურებიან მას!<br>შესაბამისად, ის, ვინც ცდილობს ჭეშმარიტების შემეცნებას, არ უნდა შემოიფარგლოს ერთი რომელიმე მეცნიერებით, რადგან ყველა მათგანი მჭიდრო ურთიერთკავშირშია ერთმანეთთან, არამედ უნდა ზრუნავდეს მხოლოდ ბუნებრივი გონის გაფართოებისაკენ და არა ამა თუ იმ სასკოლო სიძნელეების ამოხსნისაკენ! | <b>რენე დეკარტი</b><br><b>კარტეზიო</b><br>1596 – 1650         |  |
| ხელოვნების მშვენიერი ნიმუშის დათვალიერებისას განცდილი კმაყოფილება მომდინარეობს იქიდან, რომ მასში დაცულია წესები და ზომა, რადგან კმაყოფილებას ჩვენში მხოლოდ პროპორციები იწვევენ.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>ფრანსუა ბლონდელი</b><br>1618 – 1686<br><i>არქიტექტორი</i>  |  |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                            |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. მათემატიკის სარგებლიანობა, ჩვეულებრივ, ცნობილია თავისი ელემენტარული დარგებით, რომლებიც კი არ იწურება მათი უმაღლეს დარგებში გადასვლით, არამედ იზრდება მეცნიერების განვითარებასთან ერთად;</p> <p>2. თუ ჩვენ ხელთ არ გვეწიფება სრულად შევიცნოთ სითხის მოძრაობა, წარუმატებლობის მიზეზი არ უნდა ვეძებოთ მექანიკასა და მოძრაობის ცნობილი კანონების არასაკმარისობაში. ჩვენ არ გვეოფნის (მათემატიკური) ანალიზი, სითხის მოძრაობის მთელი თეორია ამჟამად დაყვანილია ანალიზური ფორმულების გამოკვლევაზე.</p> | <p><b>ლეონარდ ეილერი</b><br/>1707 – 1783</p>                               |    |
| <p>ბრმაა ფიზიკოსი მათემატიკის გარეშე.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <p><b>მიხეილ ლომონოსოვი</b><br/>1711 – 1765</p>                            |    |
| <p>არ არსებობს უფრო ყოვლისმომცველი, უფრო მარტივი, უშეცდომო და ბუნდოვანებისაგან დაცული ენა, ვიდრე ანალიზური განტოლებები, ანუ რეალური სამყაროს დამოკიდებულებათა ასახვისათვის უფრო ღირსეული მეთოდი.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p><b>ჟან ბატისტ ჟოზეფ ფურიე</b><br/>1768 – 1830</p>                       |    |
| <p>ასტრონომია და „წმინდა“ მათემატიკა არის მაგნიტური პოლუსები, რომლებისკენაც ჩემი გონების კომპასია მიმართული.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <p><b>კარლ ფრიდრიხ გაუსი</b><br/>1777 – 1855</p>                           |   |
| <p>1. ვგონებ, ცნებების სირთულე იზრდება ბუნების ჭეშმარიტ საწყისებთან მიახლოებით, იმნაირად, როგორც ის იზრდება მეორე მიმართულებით, იმ საზღვრისაკენ, საითკენაც მიისწრაფვის გონი ახალი შემეცნებისათვის;</p> <p>2. არ არსებობს მათემატიკის ისეთი მიმართულება, რაც არ უნდა აბსტრაქტული იყოს ის, რომელიც როდისმე არ იქნება გამოყენებული რეალური სამყაროს მოვლენის შესამეცნებლად.</p>                                                                                                                          | <p><b>ნიკოლოზ ლობაჩევსკი</b><br/>1792 – 1856</p>                           |  |
| <p>მეცნიერების ერთდერთი მიზანია ადიდოს ადამიანის გონი, ამიტომ რიცხვთა თეორიის ნებისმიერი ამოცანა იმსახურებს არანაკლებ ყურადღებას, ვიდრე პლანეტარულ სისტემაში წამოჭრილი ნებისმიერი ამოცანა.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <p><b>კარლ გუსტავ იაკობ იაკობი</b><br/>1804 – 1851</p>                     |  |
| <p>მათემატიკასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებს შორის უნდა დამყარდეს ახლანდელზე უფრო მჭიდრო ურთიერთობა, ვიდრე ისეთი, რომელსაც აქვს ადგილი. თუგინდ, მაგალითად, ფიზიკა უყურებს მათემატიკას მხოლოდ როგორც დამხმარეს, თუნდაც აუცილებელ დისციპლინას, და მათემატიკა განიხილავს ფიზიკოსებისაგან შემოთავაზებულ საკითხებს, როგორც მხოლოდ თავისი მეთოდების ნოყიერი მაგალითების კრებულს.</p>                                                                                                                   | <p><b>კარლ ვეიერშტრასი</b><br/>1815 – 1897</p>                             |  |
| <p>მხოლოდ გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა გონის წვრილმანი და გასართობი ვარჯიშია, თუ ის არ გამოიყენება ვარსკვლავურ სისტემაზე უფრო დიდ სისტემაზე. მათემატიკა უნდა იყოს შერეული არა მხოლოდ ფიზიკაში, არამედ ეთიკაში; ეს არის შერეული მათემატიკა.</p>                                                                                                                                                                                                                                                      | <p><b>ჰენრი დავიდ თორეუ</b><br/>1817 – 1862<br/>ნატურალისტი ფილოსოფოსი</p> |  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                   |                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. მათემატიკური აღმოჩენების ყველაზე ნოყიერი ნიადაგი არის ფაქტებზე ყურადღებით დაკვირვება;</p> <p>2. თუ არ ვცდები, არსებობს სამყარო, რომელიც შედგება მათემატიკური ჭეშმარიტებებისაგან, და ის მიღწევადია მხოლოდ ჩვენი გონების საშუალებით, – ზუსტად ასევე არსებობს რეალური ფიზიკური სამყარო.</p>                                                                | <p><b>შარლ ერმიტი</b><br/>1822 – 1901</p>                                         |    |
| <p>მე არ მგონია, რომ საგნის ორ ნაწილად დაყოფა – გამოყენებით მათემატიკად და ექსპერიმენტულ ფიზიკად, კარგია. რადგან ნატურფილოსოფია ექსპერიმენტის გარეშე მხოლოდ მათემატიკური სავარჯიშოა, ხოლო ექსპერიმენტი მათემატიკის გარეშე არც საკმარისად აწესრიგებს გონებას და არც საკმარისად აფართოებს ჩვენს ცოდნას ისეთ დარგში, როგორიცაა ფიზიკა.</p>                       | <p><b>ბალფურ სტიუარტი</b><br/>1828 – 1887<br/><i>ფიზიკოსი<br/>მეტეოროლოგი</i></p> |    |
| <p>უმეტესი ცხოვრებისეული ამოცანა იხსნება, როგორც ალგებრული განტოლება: მარტივ სახეზე დაყვანით.</p>                                                                                                                                                                                                                                                             | <p><b>ლევ ტოლსტოი</b><br/>1828 – 1910<br/><i>მწერალი</i></p>                      |    |
| <p>მათემატიკისა და ბუნებისმეტყველების ყველა გრანდიოზული მიღწევა... მომდინარეობს ჩვენი დაუოკებელი სურვილიდან, მივცეთ ჩვენს წარმოდგენაში სამყაროს უფრო რაციონალური ფორმა, ვიდრე ის, რაც მას ჩვენი ცდების უხეშმა წესებმა მისცეს.</p>                                                                                                                             | <p><b>უილიამ დ ჯეიმსი</b><br/>1842 – 1910<br/><i>ფილოსოფოსი</i></p>               |   |
| <p>ჩვენ გვინდა შევიტანოთ, რამდენადაც ეს შესაძლებელია, მათემატიკის სინათლე და სიმკაცრე ყველა მეცნიერებაში; ჩვენ ეს გვინდა არა იმიტომ, რომ ამ გზით შევიცნობთ საგნებს, არამედ, რომ დავაყაროთ ადამიანური დამოკიდებულება ამ საგნებთან. ადამიანის კვლევის ზოგადი და უმაღლესი საშუალება არის მხოლოდ მათემატიკა .</p>                                                 | <p><b>ფრიდრიხ ნიცშე</b><br/>1844 – 1900<br/><i>ფილოსოფოსი</i></p>                 |  |
| <p>ყოველი ახალი აღმოჩენა არის ფორმით მათემატიკური, რადგან ჩვენთვის არ არსებობს სხვა გზამკვლევის შესაძლებლობა.</p>                                                                                                                                                                                                                                             | <p><b>ჯორჯ ჰოვარდ დარვინი</b><br/>1845 – 1912</p>                                 |  |
| <p>მათემატიკოსი არ სწავლობს წმინდა მათემატიკას, რადგან ის სასარგებლოა; ის სწავლობს, რადგან სიამოვნებს და სიამოვნებს, რადგან ლამაზია.</p>                                                                                                                                                                                                                      | <p><b>გეორგ კანტორი</b><br/>1845 – 1918</p>                                       |  |
| <p>ჩვენი დღეების მათემატიკა მოგვაგონებს მშვიდობიან დროს იარაღის წარმოებას. ვიტრინა სავსეა ნიმუშებით, რომლებიც თავისი გონებადამხილი, ოსტატური და თვალში საცემი შესრულებით ადაფრთოვანებენ მცოდნეებს. ხოლო მათი წარმომავლობა, დანიშნულება, შესაძლებლობა ისროლოს და გაანადგუროს მტერი, გადადის ადამიანთა ცნობიერებაში უკანა პლანზე, ანდა სრულად დავიწყებულია.</p> | <p><b>ფელიქს კლაინი</b><br/>1849 – 1925</p>                                       |  |

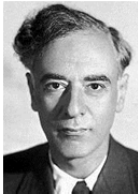
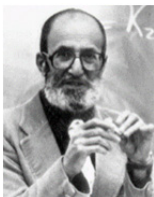


|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                 |                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>მათემატიკა საჭიროა მრავალი მეცნიერების შესასწავლად, მაგრამ თვითონ ის არ საჭიროებს არცერთს.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p><b>პეტრე<br/>კაპტერევი</b><br/>1849 – 1922<br/>პედაგოგი</p>  |    |
| <p>1. საბოლოოდ უნდა დაივიწყო მეცნიერების ისტორია, რომ ვერ გაიხსენო, რომ ბუნების შემეცნებისაკენდ მისწრაფებას ჰქონდა ყველაზე მუდმივი და ყველაზე ბედნიერი გავლენა მათემატიკის განვითარებაზე... წმინდა მათემატიკოსს რომ დავიწყებინა გარე სამყაროს არსებობა, ის დაემგვანებოდა იმ მხატვარს, რომელსაც ძალუძს ფერების ჰარმონიული შერევა, მაგრამ არა ჰყავს მოდელი. მისი შემოქმედებითი ძალა მალე ამოიწურებოდა;</p> <p>2. მათემატიკური დარგი, თავისი მკაცრად ლოგიკური ფორმით, იძენს იმდენად ხელოვნურ ხასიათს, რომ ნებისმიერი შეჰყავს ჩიხში. გვაუწყდება ისტორიული საწყისები და ვხედავთ, როგორაა შესაძლებელი ამოცანების ამოხსნა, მაგრამ ვეღარ ვგებულობთ, რატომ და რისთვის დაისვა ისინი.</p> | <p><b>ანრი პუანკარე</b><br/>1854 – 1912</p>                     |    |
| <p>როდესაც ვგრძნობ, რომ აღარ შემიძლია ცივილიზებულ საზოგადოებაში ყოფნა, მე ვცდილობ გადავრჩე მათემატიკაში;</p> <p>ვინ აიღებს თავზე ვაჟკაცობას და იტყვის, რომ მათემატიკური და ლოგიკური მცჯელობა დაცლილია ვნებისაგან!</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <p><b>ჯორჯ<br/>ბერნარდ შოუ</b><br/>1856 – 1950<br/>მწერალი</p>  |   |
| <p>1. არსებობს გამოსაყენებლად საიმედო წესი: როდესაც მათემატიკოსი ან ფილოსოფოსი ბუნდოვნად წერს, ის უაზრობას ლაპარაკობს;</p> <p>2. წმინდა მათემატიკის მეცნიერება, თავის თანამედროვე განვითარებაში, შეიძლება აცხადებდეს, რომ არის ადამიანის სულის ყველაზე ორიგინალური ქმნილება.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p><b>ალფრედ<br/>ნორტ<br/>უაიტჰედი</b><br/>1861 – 1913</p>      |  |
| <p>ნებისმიერი მეცნიერება, ლოგიკისა და მათემატიკის ჩათვლით, თავისი ეპოქის პროდუქტია. მეცნიერება არანაკლებ განხორციელებულია თავის იდეალებში, ვიდრე შედეგებში.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p><b>ელიაკიმ<br/>ჰასტინგს მური</b><br/>1862 – 1932</p>         |  |
| <p>1. რომ შექმნა ჯანსაღი ფილოსოფია, უნდა გაემიჯნო მეტაფიზიკას, მაგრამ იყო კარგი მათემატიკოსი;</p> <p>2. სწორად გაგებული მათემატიკა ფლობს არა მარტო ჭეშმარიტებას, არამედ უდიდეს სილამაზეს, როგორც ძერწვის ხელოვნება;</p> <p>3. „შეიძლება ჩანდეს, რომ ემპირიული ფილოსოფოსი მისი მასალის მონაა, მაგრამ წმინდა მათემატიკოსი, ისევე როგორც მუსიკოსი, არის თავისი მოწესრიგებული სილამაზის სამყაროს თავისუფალი შემოქმედი.</p>                                                                                                                                                                                                                                                         | <p><b>ბერტრან<br/>რასელი</b><br/>1872 – 1970<br/>ფილოსოფოსი</p> |  |
| <p>ყველაზე მნიშვნელოვანი ფაქტი მდგომარეობს იმაში, რომ მეცნიერების მიერ შემოთავაზებული ბუნების ყველა „ნახატი“, რომელიც შესაძლოა თანხმობაში იყოს დაკვირვებებთან, არის მათემატიკური „მოდელი“... მათემატიკური ფორმულების გარეშე ჩვენ გავდივართ საკუთარი შიშებისა და რისკის ფასად.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p><b>ჯიმს ჰოპვუდ<br/>ჯინსი</b><br/>1877 – 1946</p>             |  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                 |                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. მე ვთვლი, რომ მაქსველი და აინშტაინი, ედინგტონი და დირაკი „წმინდა“ მათემატიკოსები არიან. მათი მიღწევები გამოყენებით მათემატიკაში — ფარდობითობის თეორიასა და კვანტურ მექანიკაში, დღეს, ნებისმიერ შემთხვევაში, თითქმის ისეთივე „უსარგებლო“, როგორც რიცხვთა თეორია;</p> <p>2. „წმინდა“ მათემატიკა მთლიანობაში აშკარად უფრო სასარგებლოა, ვიდრე გამოყენებითი... რამეთუ, უპირველეს ყოვლისა, სასარგებლოა ტექნიკა, ხოლო მათემატიკური ტექნიკა ძირითადად წმინდა მათემატიკის საშუალებით ისწავლება.</p>                                                                                                                                                                   | <p><b>გოდფრი ჰაროლდ ჰარდი</b><br/>1877 – 1947</p>               |    |
| <p>„წმინდა — სუფთა“ მათემატიკა, თავის მხრივ, ლოგიკური იდეების პოვნია.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <p><b>ალბერტ აინშტაინი</b><br/>1879 – 1955</p>                  |    |
| <p>ვგონებ, ახალი მათემატიკური აღმოჩენები, რომლებიც ფიზიკის ნაკარნახევია, ყოველთვის უფრო მნიშვნელოვანი იქნება, რადგან ბუნებამ გაკვალა გზა და დააფუძნა კანონები, რომელთაც უნდა მიყვეს მათემატიკა, რომელიც ბუნების ენას წარმოადგენს.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p><b>ჯორჯ დევიდ ბირხოფი</b><br/>1884 – 1944</p>                |    |
| <p>ბუნებაში არის მისთვის დამახასიათებელი იდუმალი ჰარმონია, რომელიც ჩვენ გონებაში აისახება მარტივი მათემატიკური კანონების სახით.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p><b>ჰერმან ვეილი</b><br/>1885 – 1955</p>                      |   |
| <p>ერთი კარგი მათემატიკური ხუმრობა უკეთესია, ვიდრე თორმეტი უღიმღამო ნაშრომი; ამავე დროს, ის არის საუკეთესო მათემატიკა.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <p><b>ჯონ ედენსორ ლიტლვუდი</b><br/>1885 – 1977</p>              |  |
| <p>მათემატიკა და მუსიკა არიან ადამიანის სულის საწინააღმდეგო პოლუსებზე. ამ ორი ანტიპოდით შემოიფარგლება და განისაზღვრება ადამიანის მთელი სულიერი შემოქმედებითი მოღვაწეობა და მათ შორისაა ყველაფერი, რაც შექმნა კაცობრიობამ მეცნიერებასა და ხელოვნებაში.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <p><b>ჰენრი გუსტავ ნეიჰაუზი</b><br/>1888 – 1964<br/>არტისტი</p> |  |
| <p>ჩვენი მეცნიერების სასიცოცხლო „სითხე“ მომდინარეობს ფესვებიდან; ეს ფესვები, თავისი უამრავი განტოლებით, მიდიან, რასაც, შესაძლოა, ვუწოდოთ რეალობა, მექანიკაში, ფიზიკაში, ბიოლოგიურ ფორმებში, ეკონომიკურ ყოფაცქევაში, გეოდეზიაში... აბსტრაქცია და განზოგადება მათემატიკისთვის არანაკლებ ცხოვრებისეულია, ვიდრე ფენომენის ინდივიდუალურობა და, უპირველეს ყოვლისა, ინტუიციის ინდუქტიურობა. მხოლოდ ამ ძალების ურთიერთქმედება და მათი სინთეზი შეძლებს შეინარჩუნოს მათემატიკა ცოცხლად და არ მისცეს მას საშუალება გადაიქცეს გამომშრალ ჩონჩხად. . . ჩვენ უნდა უარვყოთ ღვთისმგმობი უაზრობა, რომ მათემატიკის უკანასკნელი გამართლება „ადამიანის გონის სიდიადეს“ წარმოადგენს.</p> | <p><b>რიხარდ კურანტი</b><br/>1888 – 1972</p>                    |  |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                       |                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>თურმე ბუნების ერთ-ერთი ძირითადი განსაკუთრებულობა მდგომარეობს იმაში, რომ ფიზიკის ფუნდამენტური კანონები აღიწერება ძალზე დახვეწილი და ძლიერი მათემატიკური თეორიებით. ამ თეორიების გასაგებად მათემატიკოსი უნდა იყოს მაღალი დონის. თქვენ შეგიძლიათ გაიკვიროთ: რატომაა ბუნება ასე მოწყობილი? ერთადერთი პასუხი თანამედროვე ცოდნის დონიდან ასეთია — ბუნება ამგვარადაა მოწყობილი. ისღა დაგვრჩენია, მივიღოთ ეს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ღმერთი — უმაღლესი დონის მათემატიკოსია და მან სამყაროს შესაქმნელად ყველაზე სრულყოფილი მათემატიკა გამოიყენა. ჩვენი სუსტი მათემატიკური ძალისხმევა საშუალებას იძლევა სამყაროს მხოლოდ ძალიან მცირე ნაწილის მოწყობა გავიაზროთ. მათემატიკის შემდეგი განვითარება იმედს იძლევა სამყაროს მოწყობის უკეთესად გააზრებისა.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p><b>პოლ ადრიენ მორის დირაკი</b><br/>1902 – 1984</p> |    |
| <p>საბუნებისმეტყველო საგნებში მათემატიკის კოლოსალური ეფექტურობა, გარკვეული აზრით, მისტიკას ესაზღვრება და ამას არავითარი რაციონალური ახსნა არ გააჩნია.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <p><b>იუჯინ პოლ ვიგნერი</b><br/>1902 – 1995</p>       |    |
| <p>მათემატიკური იდეები წარმოიქმნება გამოცდილებიდან, თუმცა მათი გენეალოგია ხანდახან ხანგრძლივი და ბუნდოვანია. მაგრამ, მათი ჩამოყალიბების შემდეგ, ისინი იწყებენ საკუთარი უნიკალური გზით ცხოვრებას. ამავე დროს, მათემატიკის საგანი შეიძლება შევადაროთ შემოქმედებით დისციპლინას, რომელიც ექვემდებარება თითქმის ექსკლუზიურად ესთეტიკურ დასაბუთებებს, მაგრამ არავითარ შემთხვევაში ემპირიულ მეცნიერებას. ...</p> <p>ვინაიდან მათემატიკური დისციპლინა შორს დგას თავისი ემპირიული საწყისისგან, მას ძალიან სერიოზული საფრთხე ემუქრება. ის სულ უფრო და უფრო ესთეტიკური ხდება, უფრო და უფრო უახლოვდება წმინდა ხელოვნებას ხელოვნებისთვის. ეს არც ისე ცუდია, თუ სფერო გარშემორტყმულია ურთიერთდამოკიდებული სტრუქტურებით უფრო მჭიდრო ემპირიული კავშირებით ან, თუ დისციპლინაზე გავლენას ახდენენ განსაკუთრებით კარგი გემოვნების მქონე ადამიანები.</p> <p>თუმცა არსებობს სერიოზული საფრთხე, რომ დარგი თავისი განვითარების პროცესში დადგეს უმცირესი წინააღმდეგობის გზაზე; რომ წყაროდან ასე შორს მიტანილი ნაკადი დაიშალოს მრავალ პატარა ნაკადად და გადაიქცეს ჩახლართულ უწყესრიგო მასად. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ მათემატიკის დარგი ძალიან დაშორდება თავის ემპირიულ წყაროს ან დაექვემდებარება გაძლიერებულ „აბსტრაქტულ“ შეჯვარებას, მას გადაგვარების საფრთხე ემუქრება. თავიდან, როგორც წესი, კლასიკური სტილი გვხვდება. თუმცა, როგორც კი ბაროკოს ნიშნები გამოჩნდება, დაგვიანება სახიფათო ხდება... თუ ამ ეტაპს მივაღწიეთ, ერთადერთი წამალი საწყისებთან დაბრუნებაა, ე.ი. ახალი მიდგომა მეტ-ნაკლებად აშკარად ემპირიული იდეებისადმი. დარწმუნებული ვარ, წარსულშიც ეს აუცილებელი პირობა იყო მათემატიკის სიახლისა და სიცოცხლისუნარიანობის შესანარჩუნებლად და იგივე გველოდება მომავალშიც.</p> | <p><b>ჯონ ფონ ნეიმანი</b><br/>1903 – 1957</p>         |  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                 |                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| მათემატიკის ცოდნის გარეშე არ შეიძლება არც თანამედროვე ტექნიკის საფუძვლების გაგება და არც იმის, თუ როგორ შეისწავლიან მეცნიერები ბუნების ან სოციალურ მოვლენებს.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>ანდრეი კოლმოგოროვი</b><br>1903 – 1987                        |    |
| <p>1. მათემატიკის ეს ახალი ორიენტაცია, რომელიც შესაძლებელი გახდა მხოლოდ გამოყენებებიდან გასვლის შედეგად, იყო გასული საუკუნის განმავლობაში მათემატიკის არაჩვეულებრივი სიცოცხლისუნარიანობისა და განვითარების ნამდვილი წყარო...</p> <p>2. მხოლოდ იმდენად, რამდენადაც მათემატიკა გათავისუფლდა იმ გამოყენებებისგან, რომლებიც მას წარსულში აკავშირებდა რეალობის ამა თუ იმ კონკრეტულ ასპექტთან, შეიძლება გახდეს მოქნილი და ძლიერი ინსტრუმენტი, რომელიც ასე აუცილებელია იმ სფეროებში, რომლებიც ცოდნის მიღება.</p>                                                                       | <b>მარშალ ჰარვეი სტოუნი</b><br>1903 – 1989                      |    |
| დღეისათვის არა მარტო ჩვენმა მმართველებმა არ იციან მათემატიკა, არამედ ჩვენმა ფილოსოფოსებმაც და, უფრო მეტიც, ჩვენმა მათემატიკოსებმაც არ იციან მათემატიკა.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>რობერტ ოპენჰეიმერი</b><br>1904 – 1967<br>ფიზიკოს-თეორეტიკოსი |    |
| ადამიანის გენიის უმაღლესი მიღწევაა, რომ ადამიანს შეუძლია გაიგოს ის, რაც ვერც კი წარმოედგინა.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>ლევ ლანდაუ</b><br>1908 – 1968<br>ფიზიკოსი                    |   |
| გამოყენებით მათემატიკას ყოველთვის სჭირდება სუფთა მათემატიკა, ისევე, როგორც ჭიანჭველიჭამიას ჭიანჭველა.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>პოლ ჰალმოში</b><br>1919 – 2006                               |  |
| <p>1. თანამედროვე სამყაროს სწრაფი „მათემატიზაციის“ მიზეზების კვლევა, რა თქმა უნდა, უფრო ადვილი იქნება მეცნიერების მომავალი ისტორიკოსებისთვის, ვიდრე ჩვენთვის, მისი თანამედროვეებისთვის. თუმცა ახლაც შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მთავარი მდგომარეობს არა მხოლოდ და არა იმდენად მათემატიკის ბოლო წლების სპეციფიკურ წარმატებებში, არამედ მისი გამოყენების გაუთავებელი შესაძლებლობების გაცნობიერებაში და ამ გამოყენებაზე „მწვავე მოთხოვნის“ გაჩენაში; გამოყენების დიაპაზონში.</p> <p>2. მათემატიკური მოდელი არის ძირითადი ფორმა, რომლითაც მათემატიკა დაკავშირებულია გარე სამყაროსთან.</p> | <b>იური მიტროპოლსკი</b><br>1917 – 2008                          |  |
| თანამედროვე ფიზიკოსისთვის მათემატიკა იგივეა, რაც კომპოზიტორისთვის სრულყოფილი სმენა.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>იური ნაგიბინი</b><br>1920 – 1994<br><i>მწერალი</i>           |  |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                |                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>რაც შეეხება მათემატიკას, მე ადრე ხაზგასმით გითხარით: საჭიროა მისი ღრმად გაგება. თუ ვინმეს სურს გამოიყენოს მათემატიკა ახალი ობიექტების შესასწავლად, ის უნდა იყოს შემოქმედი მათემატიკოსი და პირიქით, მათემატიკის გამოყენებისადმი ინტერესი შესაძლოა მას დაეხმაროს წმინდა მათემატიკურ გამოკვლევებში.</p>                                                                                                                                                                                     | <p><b>ალფრედ რენი</b><br/>1921 – 1970</p>                                      |    |
| <p>საქმით — ფიზიკა,<br/>არსით — მათემატიკა</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p><b>ალექსანდრს ლემსბერგს</b><br/>1921 – 1985<br/>ბალეტმაისტერი</p>           |    |
| <p>გონების მოთხოვნილებამ, შეექმნა გარემომცველი სამყაროს მოდელი, წარმოშვა მათემატიკური იდეები.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <p><b>რენე ტომი</b><br/>1923 – 2002</p>                                        |    |
| <p>პროგრამირება გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთი ყველაზე რთული დარგია; სუსტი მათემატიკოსები ჯობს წმინდა მათემატიკოსებად დარჩნენ.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <p><b>ედსგერ დეიქსტრა (ინფორმატიკოსი)</b><br/>1930-2002</p>                    |   |
| <p>ვფიქრობ, რომ განსხვავება წმინდა და გამოყენებითი მათემატიკას შორის უფრო სოციალურია, ვიდრე მეცნიერული. წმინდა მათემატიკოსს ფულს უხდიან მათემატიკური აღმოჩენებისთვის. გამოყენებითი მათემატიკოსი ანაზღაურდება მოცემული ამოცანების ამოხსნისთვის.</p> <p>როდესაც კოლუმბი გაემგზავრა, ის იყო გამოყენებითი მათემატიკოსი, რომელსაც გადაუხადეს კონკრეტული პრობლემის გადაჭრისთვის: „იპოვე ინდოეთში მიმავალი ახალი გზა“. მისი ახალი სამყაროს აღმოჩენა წმინდა მათემატიკოსის ნაშრომის მსგავსი იყო.</p> | <p><b>ვლადიმერ არნოლდი</b><br/>1937 – 2010</p>                                 |  |
| <p>1. ფიზიკა წარმოგვიდგება, როგორც მათემატიკა ფერებში, მაგრამ მათემატიკა მეტია, ვიდრე შავ-თეთრი ფიზიკა;</p> <p>2. უკანასკნელ სიტყვას რეალობა ამბობს, რათა დაადასტუროს ან უარყოს მეცნიერული თეორია, მაგრამ რა ან ვინ ზრუნავს მათემატიკაში ამგვარ საკითხებზე?</p>                                                                                                                                                                                                                             | <p><b>ხორხე ვაგენსბერგი</b><br/>1946 – 2018<br/>ფიზიკოსი, ხელოვნებათმცოდნე</p> |  |
| <p>თითქოს გამოყენებითი მათემატიკა ჩემი მეუღლეა და „წმინდა“ მათემატიკა ჩემი საიდუმლო საყვარელი.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <p><b>ედვარდ ფრენკელი</b><br/>1968</p>                                         |  |

# საშუალო და უმაღლეს სკოლაში რიცხვთა თეორიის ელემენტების სწავლების მნიშვნელობის შესახებ



მ  
ა  
თ  
ე  
მ  
ა  
ტი  
კ  
ა



## თეიმურაზ ვეფხვაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,  
პროფესორი; ივანე ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და  
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი;  
მათემატიკურ განათლებაში სამეცნიერო-  
კვლევითი ინსტიტუტის დირექტორი.

რიცხვთა თეორია მათემატიკის უძველესი ნაწილია. ეს მეცნიერება ძველ საბერძნეთში, პითაგორელთა სკოლის წარმომადგენლების შრომებში იწყებს განვითარებას. ისინი ვერც კი წარმოიდგენდნენ, რომ მთელ რიცხვთა თვისებები, რომლებიც მათ მიერ შესწავლებოდა, საუკუნეების შემდეგ პოვებდა სხვადასხვა პრაქტიკულ გამოყენებას. მიუხედავად იმისა, რომ რიცხვთა თეორია გამოირჩევა „ამოცანათა ჩამოყალიბების სიმარტივით, ამოცანების ამოხსნების მრავალფეროვნებით, სიღრმისეულობითა და სილამაზით ([1], გვ. 9), მისი სწავლების მოცულობა საშუალო და უმაღლეს სკოლებში ძალიან მოკრძალებული იყო“. ფელიქს კლაინი ([2], გვ. 57-84) ამას რიცხვთა თეორიის ამოცანების აბსტრაქტულობის მაღალი დონითა და გამოყენებების, რიცხვთა თეორიის ელემენტარული გადმოცემით გამორჩეული სახელმძღვანელოების სიმცირით ხსნიდა. თუმცა იქვე წარმოგვიდგენდა მეტად მოულოდნელ კავშირებს სხვა პრობლემებთან (ფარგლითა და სახაზავით წრეწირის ტოლ ნაწილებად დაყოფა, უწყვეტი წილადების გამოყენება). XX საუკუნის

60-იანი წლებიდან რიცხვთა თეორიის საკითხების სწავლების შესახებ თვალსაზრისი არსებითად შეიცვალა. ეს, უპირველეს ყოვლისა, დაკავშირებული იყო რიცხვთა თეორიის კლასიკური შედეგების გამოყენებებთან, მაგალითად, კოდირების თეორიაში, ალგორითმების სირთულის შეფასებების საკითხებში და გამოთვლით მათემატიკაში. მათემატიკის სწავლების მეთოდოლოგიაში დაიწყო კვლევა რიცხვთა თეორიის სწავლების მნიშვნელობაზე; როგორ მოქმედებს რიცხვთა თეორიის ამოცანების ამოხსნა მოსწავლეთა სხვადასხვა ინტელექტუალური უნარის განვითარებაზე, მათემატიკის შესწავლისადმი ინტერესის გაზრდაზე. ამ მხრივ შეიძლება მოვიხსენიოთ ამერიკელი მეცნიერის, ე. მილის გამოკვლევები. პედაგოგიური ექსპერიმენტების გამოყენებით იგი შეისწავლიდა მოსწავლეთა განვითარებაზე რიცხვთა თეორიის სწავლების მნიშვნელობას ([3]).

დისკრეტული მათემატიკის სწავლების მნიშვნელობაზე ამახვილებს ყურადღებას ალექსანდრე ხარაზიშვილი (რიცხვთა თეორია დისკრეტულ მათემატიკას განეკუთვნება)



[4]: „საჭიროა დისკრეტული მათემატიკის მნიშვნელობის გათვალისწინება საშუალო სკოლებისა და უმაღლესი სკოლების პროგრამებში. კერძოდ, აუცილებელია, რომ ამ სასწავლო პროგრამებში დისკრეტული მათემატიკის ხვედრითი წილი ცოტათი მაინც შეესაბამებოდეს იმ პროპორციას, რაც დღეს რეალურად არსებობს დისკრეტულ და დანარჩენ მათემატიკას შორის. ეს მეთოდოლოგიურადაც გამართლებული იქნება, რადგან ჩვენი სასაუბრო ენა, მსჯელობის ფორმები და სხვადასხვა ტიპის გამოთვლითი პროცესები დისკრეტული ფენომენის ფორმებია. ამიტომ დისკრეტული მათემატიკის მეთოდები და ამოცანები ფსიქოლოგიურადაც შედარებით ადვილად მისაღებია მოსწავლეებისა და სტუდენტებისათვის, თუკი მათ შესაბამის მასალას სათანადო თანამიმდევრობით მივაწვდით. შემთხვევითი არაა, რომ სახალისო მათემატიკის ამოცანები, რომლებიც ზეპირსიტყვიერებით ვრცელდება, როგორც წესი, დისკრეტული მათემატიკის სფეროდან არის აღებული. კარგი იქნება, თუ ახალგაზრდა ადრეულ ასაკში მიეჩვევა იმ კატეგორიებით აზროვნებას, რომელიც მას მომავალში უფრო გამოადგება. რასაკვირველია ცუდი არ არის ის გარემოება, როცა მოსწავლე გამოსახულებების გამარტივებაში, სხვადასხვა ტიპის განტოლებების ამოხსნასა და ათასგვარი მათემატიკური გამოსახულებების გამარტივებაშია გაწაფული, მაგრამ საჭიროა არსებითად გავითვალისწინოთ ის ფაქტიც, რომ თანამედროვე კომპიუტერები მსგავს საქმიანობას ადამიანზე გაცილებით უფრო კარგად, სწრაფად და ზუსტად ასრულებენ. ამიტომ ზოგ შემთხვევაში უპრიანი იქნება აქცენტები განტოლების ამოხსნის ტექნიკური დეტალებიდან იმავე განტოლების შედგენის პროცესზე გადავიტანოთ. უფრო ზუსტად, ბევრად მეტი ყურადღება უნდა მივაქციოთ მათემატიკური მოდელირების შემოქმედებით პროცესს, ვიდრე გამოთვლითი ხასიათის ტექნიკურ პრობლემებს. აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ ბოლო დროს ამ მხრივ საშუალო სკოლების ზოგიერთ სახელმძღვანელოში უკვე შეიმჩნევა დადებითი ტენდენციები“. აქ ალექსანდრე ხარაზიშვილი უთითებს ჩვენ მიერ შედგენილ ერთ-ერთ სახელმძღვანელოს [5], რომელშიც, პირველად ქართული

სასკოლო განათლების ისტორიაში, გამოჩნდა ალგორითმის ცნება, ევკლიდეს ალგორითმი, მთელ რიცხვებში განტოლებების ამოხსნა.

ეროვნული სასწავლო გეგმის, მათემატიკის სტანდარტის შემდგენლები ითვალისწინებდნენ რიცხვთა თეორიის სწავლების მნიშვნელობის გაზრდის ტენდენციებს, რიცხვთა თეორიის გამოყენებებს და რთავდნენ ამ მეცნიერებასთან დაკავშირებულ საკითხებს პროგრამაში. გაჩნდა ჩანაწერები: ნაშთიანი გაყოფის ალგორითმი, ევკლიდეს ალგორითმი, მოდულარული არითმეტიკა, საათის არითმეტიკა, რიცხვთა თეორიის გამოყენებები, ღია შიფრი (RSA შიფრი).

ამ მოთხოვნებმა შესაბამისი ასახვა პოვა ჩვენს სახელმძღვანელოებში (IX-XII კლასები). რიცხვთა თეორიის ელემენტებს უკავშირდება როგორც უშუალოდ მიმართულება — რიცხვები და რიცხვებზე მოქმედებები, ისე მიმართულება ალგებრა და კანონზომიერებები, რომლებშიც მითითებული საკითხები — სიმრავლეები, ასახვები, დისკრეტული მათემატიკის ელემენტები, ალგორითმები, ალგებრული ოპერაციები და მათი თვისებები — გარკვეულწილად, დაკავშირებულია რიცხვთა თეორიის საკითხებთან. ბოლო ეროვნული სასწავლო გეგმის (IV თაობის) მათემატიკური სტანდარტიც ითვალისწინებს რიცხვთა თეორიის ელემენტების სწავლებას. დამატებით, ახალი მიმართულებაც განიხილება — ლოგიკის საწყისები. გამოყოფილია საკითხები: ინდუქციური და დედუქციური მსჯელობა, დედუქციური თეორიის აგების მაგალითები, ალგორითმები, ალგორითმების წარმოდგენა ბლოკსქემების მეშვეობით. ეს საკითხები შეიძლება შევისწავლოთ რიცხვთა თეორიიდან აღებული ამოცანების გამოყენებით. ახალ სახელმძღვანელოებში გათვალისწინებულია ეს მოთხოვნები. მაგალითად, X კლასის სახელმძღვანელო, რომელიც 2022 წელს გამოიცა, შეიცავს მასალას, რომელიც ნაშთიანი გაყოფის ალგორითმს, მარტივი და შედგენილი რიცხვების თეორიის, არითმეტიკის ძირითად თეორემას, ევკლიდეს ალგორითმს და მათ გამოყენებებს უკავშირდება.

რიცხვთა თეორიის ელემენტების შესწავლისადმი გაზრდილი მოთხოვნები, ერთი

მხრივ, უკავშირდება მოსწავლეთა მოტივაციის გაზრდას მათემატიკის შესწავლისადმი (გამოყენებითი ამოცანების განხილვა), მეორე მხრივ — მოსწავლეთა სხვადასხვა ინტელექტუალური უნარის განვითარებას. რიცხვთა თეორიის ამოცანებს მნიშვნელოვანი საგანმანათლებლო, განმავითარებელი პოტენციალი აქვს. მათი ამოხსნა ხშირად მოითხოვს ჰიპოთეზათა წამოყენებას, შემოწმებას, ანალიტიკურ-სინთეზური ძიების სქემების გამოყენებას. ამ ამოცანების ამოხსნისას ხშირად გვიწევს ინფორმაციის გადაყვანა მათემატიკურიდან ჩვეულებრივ ენაზე. ამასთანავე, ერთი და იმავე ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია სხვადასხვა ხერხით. ეს პროცესი ავითარებს მოსწავლეთა შემოქმედებით აზროვნებას. ზოგჯერ უფრო მნიშვნელოვანია ერთი და იმავე ამოცანის სხვადასხვა ხერხით ამოხსნა, ვიდრე ერთი და იმავე ხერხით სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნა. რიცხვთა თეორიის ამოცანების ამოხსნებით შეიძლება მეცნიერული კვლევის სხვადასხვა მეთოდის ათვისება. ეს ხერხებია: დაკვირვება და ცდა, შედარება (მაგალითად, ამოცანების სხვადასხვა ხერხით ამოხსნების შედარება), ანალიზი და სინთეზი, განზოგადება, სპეციალიზაცია, ინდუქცია და დედუქცია (მაგალითად, ინდუქციური მსჯელობით, კერძო მაგალითებზე, რიცხვებზე დაკვირვებით ჰიპოთეზის ჩამოყალიბების შემდეგ ცვლადის შემოტანა და დედუქციური მსჯელობით დებულების დამტკიცება), აბსტრაქცია და კონკრეტიზაცია (აბსტრაქციის მაგალითია გაიგივების აბსტრაქცია — ნაშთთა კლასების გაიგივება წარმომადგენლებთან).

მაგალითად, ინდუქციური და დედუქციური მსჯელობის განხილვა შეიძლება ვაწარმოოთ რიცხვთა თეორიის შემდეგი ამოცანის განხილვის გამოყენებით. თუ ავირჩევთ მარტივ რიცხვს, მაგალითად, 3-ს, მასთან ერთად კიდევ ორ რიცხვს, რომელთაგან პირველი 3-ზე 10-ით მეტია, მეორე — 14-ით, მაშინ სამივე მარტივი რიცხვია. თუ ახლა პირველი რიცხვი არის 7, შემდეგი რიცხვები იმავე წესით აირჩევა, მივიღებთ — 7, 17, 21. ამ ინდუქციური მსჯელობით მიღებული ჰიპოთეზაა: ერთადერთი სამეული  $p$ ,  $p+10$ ,  $p+14$  რიცხვებისა, რომლებიც მხოლოდ მარტივი რიცხვებისგან

შედგებოდა, არის 3, 13, 17. დედუქციური მსჯელობისას გამოიყენება გაიგივების აბსტრაქცია — საკმარისია განვიხილოთ 3-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები: თუ  $p \equiv 0 \pmod{3}$ , ავიღებთ ნაშთს 0-ს, მაშინ  $p+10$  გაიგივდება 1-თან,  $p+14$  — 2-თან. აქ სამეულია 3, 13, 17. თუ  $p \equiv 1 \pmod{3}$ , მაშინ  $p+10 \equiv 2$ ,  $p+14 \equiv 0$  — არ არის მარტივი. თუ  $p \equiv 2 \pmod{3}$ , მაშინ  $p+10 \equiv 0$  (არ არის მარტივი). აქ განზოგადებაც გვაქვს: კონკრეტული რიცხვებიდან გადავდივართ ცვლადზე, ვიხილავთ რიცხვებს:  $p$ ,  $p+10$ ,  $p+14$  — განზოგადების პროცესი. გაიგივების აბსტრაქცია საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ სრული ინდუქცია. ავირჩიოთ მოდული 3. ვამოწმებთ: თუ  $p \equiv 0$ , მაშინ  $p$  უნდა იყოს 3,  $p+10 \equiv 13$ ,  $p+14 \equiv 17$ . სამივე რიცხვი მარტივია. თუ  $p \equiv 1$ , მაშინ  $p+10 \equiv 2$ ,  $p+14 \equiv 0$  — არ არის მარტივი. თუ  $p \equiv 2$ , მაშინ  $p+10 \equiv 0$  — არ არის მარტივი. დედუქციური მსჯელობით დამტკიცდა დებულება.

ინდუქციური და დედუქციური მსჯელობის ილუსტრირება შეიძლება რიცხვთა თეორიის კიდევ ერთი დებულების განხილვისას: ვიპოვოთ მომდევნო სამი კენტი რიცხვი, რომელთაგან თითოეული მარტივია. ინდუქციური მსჯელობა: 3, 5, 7 — მარტივ რიცხვთა სამეულია. 5, 7, 9 — აქ შედგენილი რიცხვი ურევია, 11, 13, 15 — აქ შედგენილი რიცხვი ურევია. ჰიპოთეზა — არსებობს ერთადერთი სამეული მომდევნო კენტი მარტივი რიცხვებისა. ვამტკიცებთ დედუქციური მსჯელობით და კვლავ ვიყენებთ ნაშთებს 3-ის მოდულით.

რიცხვთა თეორიის ამოცანებს ხშირად ვხვდებით მისაღებ გამოცდებზე, მათემატიკურ ოლიმპიადებზე. მაგალითად, წელს მათემატიკაში ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე გამოყენებულ საგამოცდო ბილეთში ორი ამოცანა იყო რიცხვთა თეორიიდან. ორივე ამოცანა ნაშთიანი გაყოფის ალგორითმის ცოდნას მოითხოვდა. 2023 წლის საერთაშორისო ოლიმპიადის ამოცანებშიც ერთი ამოცანა რიცხვის თეორიის სასკოლო მასალის ცოდნას მოითხოვდა. მოსწავლისგან მოითხოვებოდა მარტივი და შედგენილი რიცხვების, მთელ რიცხვთა გაყოფადობის თვისებებისა და მარტივი რიცხვის ნატურალური ხარისხის გამყოფების ცოდნა. ამოცანაში მოითხოვებოდა ყველა იმ შედგენილი რიცხვის პოვნა, რო-



მელსაც აქვს თვისება: თუ  $d_1, d_2, \dots, d_k$ , სადაც  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$  არის  $n$ -ის ყველა გამყოფი, მაშინ  $d_i$  ყოფს  $d_{i+1} + d_{i+2}$ , ყოველი  $1 \leq i \leq k-2$ . ნატურალური რიცხვის გამყოფების რაოდენობის შესახებ საკითხების ცოდნა (გათვალისწინებულია მოქმედ სასკოლო სახელმძღვანელოებში) დაეხმარება მოსწავლეს ივარაუდოს, რომ მარტივი რიცხვის ხარისხი —  $p^r$  ( $r \geq 2$ ) აკმაყოფილებს პირობას. ამ ფაქტის შემოწმება ადვილია. შემდეგ დასამტკიცებელია, რომ სხვა ტიპის შედგენილი რიცხვი არ აკმაყოფილებს პირობას. ვიყენებთ საწინააღმდეგოს დაშვების ხერხს და გაცოფადობის თვისებებს. ვთქვათ,  $n$ -ს აქვს მარტივი გამყოფები  $p$  და  $q$ , რომელთაგან  $q$  არის  $p$ -სგან განსხვავებულ მარტივ გამყოფებს შორის უმცირესი. დავალაგებთ  $n$ -ის გამყოფებს ზრდის მიხედვით:  $1 < p < \dots < p^k < q < \dots < n$ . აქ არ შეიძლება, რომ  $k$  იყოს 1-ზე მეტი, რადგან, თუ  $k \geq 2$ , მაშინ  $p^{k-1} | (p^k + q)$  ე.ი.  $p | q$ , რაც შეუძლებელია. ე.ი. გვექნება:

$$1 < p < q < \dots < \frac{n}{q} < \frac{n}{p} < n.$$

აქედან გვაქვს:  $\frac{n}{q} | \frac{n}{p} + n$ , ე.ი.  $p | q + pq$ , ე.ი.  $p | q$ , რაც შეუძლებელია.

მთელ რიცხვთა თვისებების შესწავლა დაწყებით სკოლაში იწყება. მოსწავლე აქედანვე უნდა მიეჩვიოს ნაშთიანი გაყოფის ალგორითმის ჩაწერას: თუ მოცემულია  $a$  და  $b$  ნატურალური რიცხვები, ყოველთვის არსებობს არაუარყოფითი მთელი რიცხვები  $q$  და  $r$ , რომ გვაქვს:  $a = bq + r$ , სადაც  $0 \leq r < b$ . მე-7 კლასში უკვე ვიხილავთ იმ შემთხვევას, როცა  $a$  მთელია და ამ დებულების დასაბუთების გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას, რომელიც ნატურალურ  $a$ -სთვის უკავშირდება ისეთი  $q$ -ს არსებობას, რომლისთვისაც  $bq \leq a < b(q+1)$ . აქ მნიშვნელოვანია იმის გააზრება, რომ ნატურალურ რიცხვთა ყოველი სასრული ქვესიმრავლე შეიცავს უდიდეს ელემენტს. მაგალითად,  $A = \{c \in \mathbb{N} | bc = a\}$  სიმრავლეში არსებობს უდიდესი რიცხვი.

იმ საკითხებს, რომლებიც მოცემულია დღევანდელი სტანდარტით შედგენილ სახელმძღვანელოებში, შეიძლება დავამატოთ თეორემა მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობის შესახებ, მთელ რიცხვებში წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამოხსნა, პოზი-

ტიური სისტემები. მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტებზე იკითხება დისკრეტული მათემატიკის კურსი, რომელიც, დისკრეტული მათემატიკის სხვა საკითხებთან ერთად (სიმრავლეთა თეორია, გრაფები, ლოგიკა, ალბათობა), შეიცავს რიცხვთა თეორიის საკითხებს (მთელ რიცხვთა გაცოფადობის თვისებები, დიოფანტური განტოლებები, არითმეტიკის ძირითადი თეორემა, ტიურინგის კოდი, მოდულარული არითმეტიკა, ფერმასა და ეილერის თეორემები, მარტივ რიცხვთა თვისებები). რიცხვთა თეორიის გამოყენების მაგალითები XI და XII კლასის წიგნებშიც არის აღწერილი. თუმცა მიზანშეწონილია, რომ საშუალო სკოლაში რიცხვთა თეორია მეტი მოცულობით ისწავლებოდეს. მაგალითად, შეიძლება არითმეტიკის ძირითადი თეორემისა და მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობის შესახებ თეორემის დამტკიცებების განხილვა. მოსწავლეს ექმნებოდა შთაბეჭდილება, რომ თეორემები მხოლოდ გეომეტრიაში მტკიცდება.

საინტერესოა მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობის შესახებ თეორემის სხვადასხვა დამტკიცების განხილვა. ევკლიდეს თეორემის ზოგიერთი დამტკიცება შეიძლება უმაღლეს სკოლაში განვიხილოთ. ეს დამტკიცებები კიდევ ერთხელ ადასტურებს, რომ მათემატიკა ერთიანი მეცნიერებაა; მათემატიკის სხვადასხვა ნაწილის გამაერთიანებელი საერთო ნიშანი არის დედუქციური მსჯელობა. ევკლიდეს თეორემის სხვადასხვა დამტკიცების განხილვისას კარგად ჩანს, როგორ გამოიყენება მათემატიკის სხვადასხვა ნაწილის დებულებები რიცხვთა თეორიის პრობლემების ამოხსნისას. მაგალითად, ტოპოლოგიის კურსში, ტოპოლოგიური სივრცეების მაგალითების განხილვისას შეიძლება მოვიშველიოთ ევკლიდეს თეორემის ტოპოლოგიური დამტკიცება, რომელიც ამერიკელმა სტუდენტმა ფიურსტენბერგმა აღმოაჩინა; შემოვიღოთ მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე ტოპოლოგია. ღია სიმრავლე იყოს სიმრავლე, რომელიც შეიძლება წარმოვადგინოთ უსასრულო არითმეტიკული პროგრესიების გაერთიანების სახით. აქსიომები ადვილად მოწმდება.

განვიხილოთ სიმრავლე  
 $A_p = \{tp | t \in \mathbb{Z}\}.$

ეს არითმეტიკული პროგრესიაა, სხვაობა  $p$  რიცხვის ტოლია. ეს სიმრავლე, მაშასადამე, ღია სიმრავლეა. მაგრამ იგი ჩაკეტილი სიმრავლეც არის, რადგან მისი დამატებითი სიმრავლე არის

$$A_{p,i} = \{tp + i | t \in \mathbb{Z}\}, i = 1, 2, \dots, p-1$$

სიმრავლეების გაერთიანება.

თუ დავუშვებთ, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრული სიმრავლეა, მაშინ სასრული გაერთიანება სასრული რაოდენობის სიმრავლეებისა —  $B = \cup A_p$  ჩაკეტილი სიმრავლეა. ნებისმიერი რიცხვი, გარდა 1-ისა და -1-ის, რაიმე  $p$  მარტივი რიცხვის ჯერადია და, მაშასადამე, ეკუთვნის  $B$  სიმრავლეს. მაშასადამე,

$$B = \mathbb{Z} \setminus \{-1; 1\}.$$

ამრიგად,  $\{-1; 1\}$  სიმრავლე ღია სიმრავლეა, რაც შეუძლებელია.

საინტერესოა დამტკიცება, რომელიც ჰარმონიულ მწკრივს უკავშირდება. სულ 19 სხვადასხვა დამტკიცება არსებობს. ევკლიდეს დამტკიცება შეიძლება სკოლაშიც ვასწავლოთ. ჰარმონიულ მწკრივს უკავშირდება ეილერის დამტკიცება; ცხადია, ყოველი მარტივი  $p$  რიცხვისთვის:

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots$$

მწკრივი კრებადია, რადგან  $\frac{1}{p} < 1 \cdot \frac{1}{p} < 1$ . თუ დავუშვებთ, რომ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე სასრულია და ჩაიწერება  $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$  სახით, მაშინ ყველა ამ მარტივი რიცხვისთვის დაწერილ მწკრივებს თუ გავამრავლებთ, კვლავ მივიღებთ კრებად მწკრივს, რომლის ზოგად წევრს ექნება სახე:

$$\frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}},$$

სადაც  $\alpha_i$  არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია. არითმეტიკის ძირითადი თეორემის თანახმად, მიღებული მწკრივის ზოგადი წევრი არის  $\frac{1}{n}$ , ანუ მიიღება ჰარმონიული მწკრივი, რომელიც განშლადია.

ამ მაგალითებით კარგად ჩანს როგორი მრავალმხრივია მათემატიკის სხვადასხვა ნაწილს შორის კავშირები; როგორი გადაჯაჭვულია მათემატიკური ფაქტები. რიცხვთა თეორიის ამოცანების ამოხსნების ცოდნა უნდა იყოს მათემატიკის მასწავლებელთა მომზადების აუცილებელი კომპონენტი. უფრო მეტიც, ყოველი მათემატიკოსის ცოდნის შემადგენელი კომპონენტი უნდა იყოს რიცხვთა თეორიის ცნობილი პრობლემების, მათი წარმოშობისა და ამოხსნების ისტორიების ცოდნა.

## ლიტერატურა

1. Baker, A. (1984). A consise introduction to the theory of numbers. New York: Cambridge University Press.
2. Клейн, Ф. (1987). Элементарная математика с точки зрения высшей, (вып. I). Москва: Наука.
3. Miele, A. M. (2014). The effects of number theory study on school students' metacognition and mathematical attitudes. New York: Columbia University.
4. ხარაზიშვილი, ა. (2007) მათემატიკური ესკიზები (ნაწ. I). თბილისი: ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტი.
5. გოგიშვილი, გ., ვეფხვაძე, თ., მეზონია, ი. და ქურჩიშვილი, ლ. (2003). ალგებრა, მე-7 კლასის სახელმძღვანელო. თბილისი: ინტელექტი.



# ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები საერთაშორისო ოლიმპიადაში

მ  
ც  
ნ  
ა  
ფ  
ა  
ნ  
ა  
ფ  
ა  
ნ  
ა



**გიორგი გელიაშვილი**

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების ლიდერი,  
ასოცირებული პროფესორი,  
ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტი

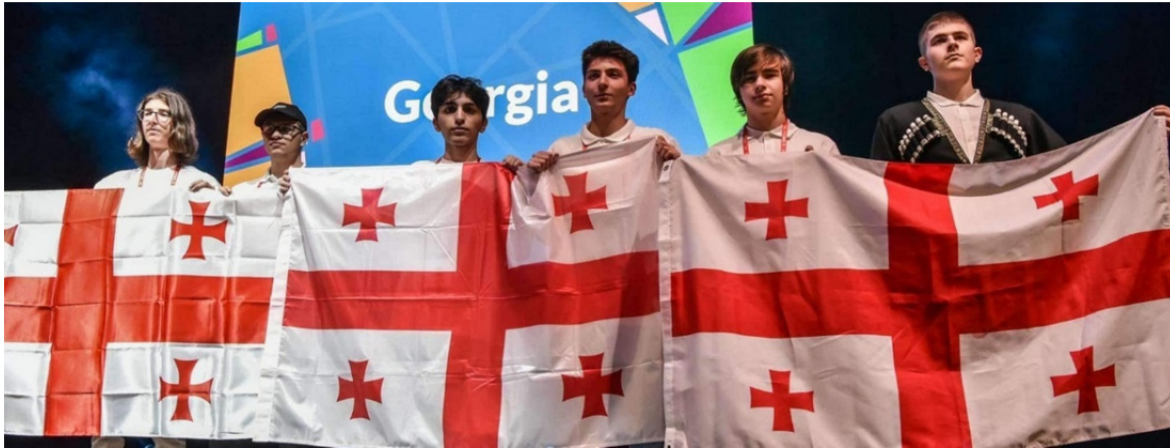


**გიორგი ნადიბაიძე**

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების თანალიდერი,  
ასისტენტ-პროფესორი,  
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის  
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და  
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

64-ე საერთაშორისო ოლიმპიადი მათემატიკაში ჩატარდა დიდი ბრიტანეთის ქალაქ ბატში 11-22 ივლისის პერიოდში. ასპარეზობაში მონაწილეობა მიიღო 108-მა ქვეყანამ და გუნდები, ტრადიციულად, 6-6 მოსწავლისაგან შედგებოდა. საქართველოს ნაკრებს წარმოადგენდნენ: დავით კლდიაშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), გიორგი კეკენაძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), ლუკა წულაია (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), მირზა შანიძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი), რატი რატიანი (თბილისის ი. ვეკუას სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი) და ივანე კობაიძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი).

საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდი მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადებში მონაწილეობს 1993 წლიდან. 2024 წლის ოლიმპიადამ საქართველო ოცდამეთორმეტედ მონაწილეობდა და ქართველმა მოსწავლეებმა ამჯერადაც წარმატებულად იასპარეზეს. გუნდის ხუთმა წევრმა დაიმსახურა ჯილდო: 1 ოქრო (დავით კლდიაშვილი, კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი); 3 ბრინჯაო (რატი რატიანი, თბილისის ი. ვეკუას სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი, გიორგი კეკენაძე, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი, მირზა შანიძე, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი) და 1 საპატიო სიგელი (ლუკა წულაია, თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი).



ქვემოთ დიაგრამაზე ნაჩვენებია 2023 წლის მონაწილეთა შედეგები:

#### ◀ 65<sup>TH</sup> IMO 2024

| Contestant [♀♂]     | P1        | P2        | P3       | P4        | P5        | P6       | Total      | Rank      |               | Award                    |
|---------------------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|----------|------------|-----------|---------------|--------------------------|
|                     |           |           |          |           |           |          |            | Abs.      | Rel.          |                          |
| <b>Team results</b> | <b>39</b> | <b>15</b> | <b>1</b> | <b>36</b> | <b>15</b> | <b>2</b> | <b>108</b> | <b>45</b> | <b>58.88%</b> | <b>G, B, B, B, B, HM</b> |
| Davit Kldiashvili   | 7         | 7         | 1        | 7         | 7         | 1        | 30         | 29        | 95.39%        | Gold medal               |
| Rati Ratiani        | 7         | 0         | 0        | 7         | 7         | 0        | 21         | 182       | 70.23%        | Bronze medal             |
| Giorgi Kekenadze    | 7         | 3         | 0        | 7         | 1         | 1        | 19         | 227       | 62.83%        | Bronze medal             |
| Mirza Shanidze      | 7         | 2         | 0        | 7         | 0         | 0        | 16         | 283       | 53.62%        | Bronze medal             |
| Luka Tsulaia        | 7         | 1         | 0        | 7         | 0         | 0        | 15         | 327       | 46.38%        | Honourable mention       |
| Ivane Kobaidze      | 4         | 2         | 0        | 1         | 0         | 0        | 7          | 487       | 20.07%        |                          |

Leader: **George Chelidze**

Deputy leader: **Givi Nadibaidze**

საქართველოს ოლიმპიური ნაკრების ფორმირება მოხდა ორი შესარჩევი ტურის შედეგის საფუძველზე. შესარჩევ წერებს ადმინისტრირებას უწევდა შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი. მკაცრად რეგლამენტირებულ 2-ტურიან წერით გამოცდებში მონაწილეობის უფლება კი მოიპოვეს რესპუბლიკური სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის ტურების შედეგებზე დაყრდნობით გამოვლენილმა საუკეთესო მოსწავლეებმა. შესარჩევი წერების საფუძველზე დაკომპლექტდა ნ-მოსწავლიანი ნაკრები.

შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდიდან ამ პროცესს ადმინისტრირებას უწევდა ქალბატონი მაკა ქაჯაია, ხოლო განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროდან პროცესს კურირებდა ქალბატონი ნინო ცანდიშვილი. ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების დაკომპლექტების შემდეგ, სამკვირიანი საწვრთნელი მეცადინეობები ჩატარდა კომაროვის სკოლის ბაზაზე ყოველდღიური ნ-საათიანი მეცადინეობებით. მოსწავლეთა მომზადება დასრულდა ერთკვირიანი წვრთნებით ბაკურიანში. მოსწავლეებს უტარდებოდათ სატრენინგო წერები საერთაშორისო ოლიმპიადების პირობების გათვალისწინებით.

გუნდის მომზადებაში მონაწილეობდა მწვრთნელი გიორგი სვანაძე, რომელიც ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეც-



ნიერებათა ფაკულტეტის წარმატებული დოქტორანტია. ასევე მოსწავლეთა მომზადებაში მონაწილეობდნენ გამოცდილი ყოფილი ოლიმპიელები: გიორგი არაბიძე, ლუკა მაჭარაშვილი, ივანე გოჭაძე, კოტე კუპატაძე, დემეტრე გელაშვილი.

ქვემოთ მოვიყვანთ იმ ამოცანებს, რომლებიც მიეცათ მოსწავლეებს წერებზე:

### ამოცანა 1.

იპოვეთ ყველა ნამდვილი რიცხვი  $\alpha$  ისეთი, რომ ყოველი მთელი დადებითი  $n$ -თვის, რიცხვი

$$[\alpha] + [2\alpha] + \dots + [n\alpha]$$

არის  $n$ -ის ჯერადი.

( $[z]$  ტოლია უდიდესი მთელი რიცხვის, რომელიც ნაკლებია ან ტოლია  $z$ -ზე. მაგალითად:  $[-\pi] = -4$  და  $[2] = [2.9] = 2$ ).

### ამოხსნა:

ცხადია, რომ, თუ  $\alpha = 2k$ , სადაც  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია, მაშინ  $[\alpha] + [2\alpha] + \dots + [n\alpha] = kn(n+1)$ , ანუ ამოცანის პირობა სრულდება. ახლა ვაჩვენოთ, რომ სხვა  $\alpha$ -თვის ამოცანის პირობა არ სრულდება.

თუ  $z$  მთელი რიცხვია, მაშინ  $[z + \alpha] = z + [\alpha]$ . ამიტომ, თუ  $[\alpha] + [2\alpha] + \dots + [n\alpha]$  რიცხვი  $n$ -ის ჯერადია, ასევე  $n$ -ის ჯერადი იქნება

$$[\alpha + 2k] + [2(\alpha + 2k)] + \dots + [n(\alpha + 2k)] = [\alpha] + [2\alpha] + \dots + [n\alpha] + kn(n+1),$$

ნებისმიერი მთელი  $k$ -თვის. ამრიგად, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $\alpha \in [-1, 1) \setminus \{0\}$  სიმრავლეს.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1.  $-1 \leq \alpha < 0$ . ვთქვათ,  $k > 1$  არის უმცირესი მთელი რიცხვი ისეთი, რომ  $k\alpha < -1$ . მაშინ ცხადია,  $(k-1)\alpha \geq -1$  და ამიტომ  $k\alpha = (k-1)\alpha + \alpha \geq -2$ . თუ  $n$ -ის მაგივრად ავიღებთ  $k$ -ს, მივიღებთ რიცხვს:

$$[\alpha] + [2\alpha] + \dots + [k\alpha] = -1 - 1 - \dots - 1 - 2 = -k - 1,$$

რომელიც ცხადია არ არის  $k$ -ს ჯერადი, ანუ ამოცანის პირობა არ სრულდება.

2.  $0 < \alpha < 1$ . ვთქვათ,  $k > 1$  არის უმცირესი მთელი რიცხვი ისეთი, რომ  $k\alpha > 1$ . მაშინ ცხადია,  $(k-1)\alpha \leq 1$  და ამიტომ  $k\alpha = (k-1)\alpha + \alpha < 2$ . თუ  $n$ -ის მაგივრად ავიღებთ  $k$ -ს, მივიღებთ რიცხვს:

$$[\alpha] + [2\alpha] + \dots + [k\alpha] = 0 + 0 + \dots + 1 = 1,$$

რაც არ არის  $k > 1$ -ის ჯერადი, ანუ ამ შემთხვევაშიც ამოცანის პირობა არ სრულდება.

**პასუხი:**  $\alpha = 2k$ , სადაც  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

### ამოცანა 2.

იპოვეთ მთელ დადებით რიცხვთა ყველა  $(a, b)$  წყვილი, რომლისთვისაც არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვები  $g$  და  $N$ , რომ ყოველი მთელი  $n \geq N$ -თვის სრულდება ტოლობა:

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g.$$

( $\gcd(x, y)$  აღნიშნავს  $x$  და  $y$  მთელი რიცხვების უდიდეს საერთო გამყოფს).

### ამოხსნა:

ვთქვათ,  $K = ab + 1$  და  $n \equiv -1 \pmod{\varphi(K)}$ . ცხადია,  $a$  და  $b$  თანამართივია  $K$ -სთან და ამიტომ, ფერმა-ვილერის თეორემის გამო, გვაქვება:

$$a^n + b \equiv a^{-1} + b \equiv a^{-1}K \equiv 0 \pmod{K}.$$

ანალოგიურად ვღებულობთ  $b^n + a \equiv 0 \pmod{K}$ . ამრიგად, თუ  $n \equiv -1 \pmod{\varphi(K)}$  საკმარისად დიდი მთელი რიცხვია, მაშინ გვაქვს,  $K|g$ . ამოცანის პირობის თანახმად, აქედან ვღებუ-

ლობთ, რომ  $a^n + b \equiv 0 \pmod{K}$  ყველა საკმარისად დიდი მთელი  $n$ -თვის. ცხადია,  $a^n \pmod{K}$  მიმდევრობა პერიოდულია და მისი პერიოდია  $\varphi(K)$ . ამიტომ  $a^n + b \equiv 0 \pmod{K}$  და  $b^n + a \equiv 0 \pmod{K}$  ყველა მთელი  $n$ -თვის. კერძოდ, თუ  $n = 0$  ვღებულობთ, რომ  $K|a + 1$  და  $K|b + 1$ . ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა  $a = b = 1$ . ადვილი შესამოწმებელია, რომ  $a = b = 1$  და  $g = 2$  - თვის ამოცანის პირობა სრულდება.

**პასუხი:** (1,1)

### ამოცანა 3.

ვთქვათ,  $N$  მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო  $a_1, a_2, \dots$  მთელ დადებით რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობაა. ვთქვათ, ყოველი მთელი  $n > N$ -თვის,  $a_n$  არის რაოდენობა  $a_{n-1}$ -ის ტოლი რიცხვებისა  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  ჩამონათვალში. დაამტკიცეთ, რომ შემდეგი ორი  $a_1, a_3, a_5, \dots$  და  $a_2, a_4, a_6, \dots$  მიმდევრობიდან ერთი მიმდევრობა მაინც რაღაც ადგილიდან დაწყებული პერიოდულია.

(მიმდევრობას  $b_1, b_2, \dots$  ეწოდება რაღაც ადგილიდან პერიოდული, თუ არსებობს მთელი დადებითი რიცხვები  $p$  და  $M$  ისეთი, რომ  $b_{m+p} = b_m$  ყოველი  $m \geq M$ ).

**ამოხსნა:** ვთქვათ,  $M > \max\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ .

**ლემა 1.** ზოგიერთი მთელი რიცხვი უსასრულოდ ბევრჯერ გვხვდება მოცემულ მიმდევრობაში.

**დამტკიცება:** მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიმდევრობა შემოუსაზღვრელია და ყოველ ჯერზე, როცა მიმდევრობაში პირველად გამოჩნდება საკმაოდ დიდი მთელი რიცხვი, მის შემდეგ იქნება რიცხვი 1. ანუ გამოვა, რომ რიცხვი 1 მიმდევრობაში გვხვდება უსასრულოდ ბევრჯერ, რაც წინააღმდეგობაა.

**ლემა 2.** ყოველი მთელი  $x \geq M$  რიცხვი მიმდევრობაში გვხვდება არა უმეტეს  $M - 1$  ჯერ.

**დამტკიცება:** დავუშვათ წინააღმდეგობა, რომელიმე  $x \geq M$  რიცხვი გვხვდება სულ მცირე  $M$ -ჯერ. განვიხილოთ პირველი ისეთი მომენტი, როცა  $x \geq M$  რიცხვი გამოჩნდა  $M$ -ჯერ. ამ მომენტამდე  $x$ -ის ყოველ გამოჩენას წინ უსწრებს მთელი რიცხვები, რომლებიც გამოჩნდნენ  $x \geq M$ -ჯერ. ასე რომ, სულ მცირე,  $M$  ერთმანეთისაგან განსხვავებული რიცხვი უნდა ყოფილიყო გამოჩენილი მინიმუმ  $M$ -ჯერ მანამდე, ვიდრე  $x$  გამოჩნდებოდა. ამ რიცხვებიდან ერთი მაინც, ცხადია, მეტია ან ტოლი  $M$ -ზე, ანუ  $x \geq M$  არ ყოფილა პირველი ასეთი რიცხვი, რაც წინააღმდეგობაა.

ამრიგად, ლემა 2-ის გამო, არსებობს მხოლოდ სასრული რაოდენობა რიცხვებისა, რომლებიც უსასრულოდ ბევრჯერ გვხვდება მოცემულ მიმდევრობაში. ვთქვათ,  $k$  მაქსიმალური ასეთი რიცხვია.

ვინაიდან  $k$  უსასრულოდ ბევრჯერ გვხვდება მიმდევრობაში, ამიტომ ამ მიმდევრობაში ასევე გვექნება უსასრულოდ ბევრი მთელი რიცხვი, რომელიც მეტია  $M$ -ზე და რომელიც გვხვდება მინიმუმ  $k$  -ჯერ. აქედან გამომდინარე, რიცხვები  $1, 2, \dots, k - 1$ -იც უსასრულოდ ბევრჯერ გვხვდება მიმდევრობაში.

იმის გამო, რომ  $k + 1$  უსასრულოდ არ გვხვდება მიმდევრობაში, ამიტომ იმ წევრების რაოდენობა, რომლებიც  $k$ -ჯერ მეტჯერ გვხვდება მიმდევრობაში, სასრულია. ვთქვათ  $l \geq k$  მაქსიმალური ასეთი რიცხვია.

ვუწოდოთ მთელ  $x$  რიცხვს დიდი, თუ  $x > l$ , საშუალო — თუ  $l \geq x > k$  და პატარა — თუ  $x \leq k$ .

ამრიგად, თითოეული პატარა რიცხვი უსასრულოდ ბევრჯერ გვხვდება მიმდევრობაში, ხოლო თითოეული დიდი რიცხვი მაქსიმუმ  $k$  -ჯერ გვხვდება მიმდევრობაში.

განვიხილოთ საკმაოდ დიდი  $N'$  ისეთი, რომ  $a_{N'}$  პატარაა და  $a_1, a_2, \dots, a_{N'}$  ჩამონათვალი შეიცავს ყველა საშუალო რიცხვს და, ამასთან, ამ ჩამონათვალში ყველა პატარა რიცხვი გვხვდება  $\max(k, N)$ -ჯერ მეტჯერ. ვინაიდან ყოველი პატარა რიცხვი უკვე  $k$ -ჯერ მეტჯერ გამოჩნდა აღნიშნულ ჩამონათვალში და რადგანაც ეს ჩამონათვალი შეიცავს ყველა საშუალო რიცხვს, ამი-



ტომ შემდეგი პატარა რიცხვის მომდევნო რიცხვი იქნება დიდი რიცხვი. ამ დიდი რიცხვის მომდევნო რიცხვი იქნება  $k$ -ზე ნაკლები ან ტოლი, რადგან ყოველი დიდი რიცხვი მაქსიმუმ  $k$ -ჯერ გვხვდება მიმდევრობაში. ამრიგად მივიღეთ, რომ  $a_1, a_2, \dots, a_{N'}$  მიმდევრობის შემდეგ, ყოველ პატარა რიცხვს მოსდევს დიდი რიცხვი, ხოლო ყოველ დიდ რიცხვს — პატარა.

**ლემა 3.** ვთქვათ,  $g$  არის დიდი რიცხვი, რომელიც გვხვდება  $a_{N'}$ -ის შემდეგ, ხოლო  $h$  პატარა რიცხვია, რომელიც უშუალოდ  $g$ -ს მოსდევს. მაშინ  $h$  ტოლია იმ პატარა რიცხვების რაოდენობისა, რომლებიც ამ მომენტამდე  $g$ -ჯერ მაინც გამოჩნდა.

**დამტკიცება:**  $N'$ -ის განმარტების თანახმად, პატარა რიცხვი, რომელიც უშუალოდ  $g$ -ს უსწრებს, გამოჩნდა  $\max(k, N)$ -ჯერ მაინც, ასე რომ,  $g > \max(k, N)$ . და რადგან  $g > N$ , ყოველი პატარა რიცხვის  $g$ -ჯერ გამოჩენა უნდა მოხდეს  $a_N$ -ის შემდეგ და, შესაბამისად, მას მოსდევს  $g$ . რადგან სულ გვაქვს  $k$  მცირე რიცხვი და  $g$  გამოჩნდა არა უმეტეს  $k$ -ჯერ,  $g$  უნდა გამოჩნდეს ზუსტად  $k$ -ჯერ და ყოველთვის მოსდევდეს პატარა რიცხვს  $a_N$ -ს შემდეგ. აქედან გამომდინარე,  $g$ -ს  $h$ -ჯერ გამოჩენის მომენტში, ზუსტად  $h$  მცირე რიცხვი გამოჩნდა მინიმუმ  $g$ -ჯერ. ლემა დამტკიცებულია.

მიმდევრობის  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$  ნაჭერი აღვნიშნოთ  $a_{[i,j]}$ -ით.

**ლემა 4.** ვთქვათ,  $i$  და  $j$  აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

ა)  $j > i > N' + 2$ ,

ბ)  $a_i$  პატარა რიცხვია და  $a_i = a_j$ ,

გ)  $a_{[i,j-1]}$  ნაჭერში ყოველი პატარა რიცხვი გვხვდება არა უმეტეს ერთჯერ.

მაშინ  $a_{i-2}$  ემთხვევა  $a_{[i,j-1]}$  ნაჭრის რომელიმე პატარა რიცხვს.

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $I$  და  $J$  არის სიმრავლე ყველა პატარა რიცხვისა, რომლებიც, შესაბამისად,  $a_{i-1}$ -ჯერ და  $a_{j-1}$ -ჯერ მაინც გვხვდება, შესაბამისად,  $a_{[1,i-1]}$  და  $a_{[1,j-1]}$  ნაჭრებში. ლემა 3-ისა და ბ) პუნქტის გათვალისწინებით, გვაქვს:  $a_i = a_j = |I| = |J|$ . ასევე, განსაზღვრების ძალით:  $a_{i-2} \in I$  და  $a_{j-2} \in J$ .

ვაჩვენოთ, რომ პატარა რიცხვი  $a_{j-2} \in I$ . დავუშვათ წინააღმდეგობა:  $a_{j-2} \notin I$ . ეს ნიშნავს, რომ  $a_{j-2}$  გამოჩნდა არა უმეტეს  $a_{i-1}$ -ჯერ  $a_{[1,j-1]}$ -ში, ამრიგად, გვაქვს  $a_{j-1} \leq a_{i-1}$ . ცხადია,  $a_{[1,i-1]} \subset a_{[1,j-1]}$ , ამიტომ  $I \subseteq J$ . ვინაიდან  $a_{j-2} \in J \setminus I$ , ვლევულობთ წინააღმდეგობას ზემოთ მიღებულ  $|I| = |J|$  ტოლობასთან. ამრიგად, ვაჩვენეთ  $a_{j-2} \in I$ , რაც ნიშნავს, რომ ის გამოჩნდა  $a_{i-1}$ -ჯერ მაინც  $a_{[1,i-1]}$  ნაჭერში და კიდევ ერთხელ  $a_{[i,j-1]}$ -ში. ამრიგად:  $a_{j-1} > a_{i-1}$ .

გ)-ს გამო, ყოველი პატარა რიცხვი, რომელიც  $a_{j-1}$ -ჯერ მაინც გამოჩნდა  $a_{[1,j-1]}$  ნაჭერში, ასევე გამოჩნდა  $a_{j-1} - 1 \geq a_{i-1}$ -ჯერ  $a_{[1,i-1]}$ -ში. ამრიგად, ვლევულობთ  $J \subseteq I$  და ე.ი.  $I = J$ , საიდანაც გვაქვს:  $a_{i-2} \in J$ , რაც ნიშნავს, რომ ის, სულ მცირე,  $a_{j-1} - a_{i-1} = 1$ -ჯერ მეტჯერ უნდა გამოჩნდეს  $a_{[i,j-1]}$  ნაჭერში. ლემის დამტკიცება დასრულებულია.

ყოველი პატარა  $a_n$  რიცხვისთვის, სადაც  $n > N' + 2$ ,  $p_n$  იყოს ისეთი უმცირესი რიცხვი, რომ  $a_{n+p_n} = a_i$  არის ასევე პატარა რომელიმე  $i$ -თვის, სადაც  $n \leq i < n + p_n$ . თუ  $i > n$ , ლემა 4-ში თუ  $j$ -ს როლში ავიღებთ  $n + p_n$ , მივიღებთ  $a_{i-2}$  გამოჩნდება მანამდე, ვიდრე  $a_{n+p_n}$ , რაც  $p_n$ -ის მინიმალურობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად  $i = n$ . ასევე ლემა 4-ის გამო,  $p_n \geq p_{n-2}$ . მივიღეთ, რომ მიმდევრობა  $p_n, p_{n+2}, p_{n+4}, \dots$  არაკლებადი, ზემოდან  $2k$ -თი შემოსაზღვრული (რადგანაც  $k$  ცალი პატარა რიცხვი გვაქვს) მიმდევრობაა. ეს კი ნიშნავს, რომ მიმდევრობა  $p_n, p_{n+2}, p_{n+4}, \dots$  რაღაც ადგილიდან დაწყებული პერიოდულია, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

#### ამოცანა 4.

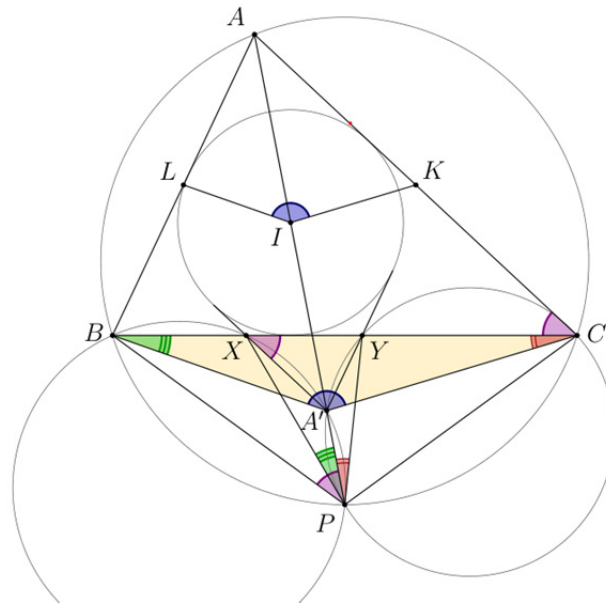
$ABC$  სამკუთხედში  $AB < AC < BC$ . ვთქვათ,  $\omega$  არის  $ABC$  სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი, ხოლო  $I$  არის  $\omega$ -ს ცენტრი.  $BC$  წრფეზე აღებულია  $C$ -სგან განსხვავებული ისეთი  $X$  წერტილი, რომ  $X$ -ზე გამავალი  $AC$ -ს პარალელური წრფე  $\omega$ -ს მხებია.

ანალოგიურად,  $Y$  არის  $B$ -სგან განსხვავებული წერტილი  $BC$  წრფეზე ისეთი, რომ  $Y$ -ზე გამავალი  $AB$ -ს პარალელური წრფე  $\omega$ -ს მხებია. ვთქვათ,  $ABC$  სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს

$AI$  მეორედ კვეთს  $P \neq A$  წერტილში. ვთქვათ,  $K$  და  $L$ , შესაბამისად,  $AC$  და  $AB$  გვერდების შუა-წერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ  $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ .

**ამოხსნა:**

ვთქვათ,  $A'$  არის  $A$ -ს სიმეტრიული წერტილი  $I$ -ს მიმართ. მაშინ  $A'$  დევს  $A$  კუთხის  $AP$  ბისექტრისაზე, ხოლო  $A'X$  და  $A'Y$ , შესაბამისად, არიან  $AC$  და  $AB$ -ს ანარეკლები  $I$ -ს მიმართ და, ამავე დროს, წარმოადგენენ  $\omega$ -ს მხეებებს, რომლებიც გადიან, შესაბამისად,  $X$  და  $Y$  წერტილებზე. ადვილი საჩვენებელია, რომ  $PB = PC = PI$  და რადგანაც  $\angle BAP = \angle PAC > 30^\circ$ , ამიტომ  $PB = PC$  არის  $ABC$  სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსზე დიდი. აქედან გამომდინარე,  $PI > \frac{AP}{2} > AI$  და ამიტომ  $A'$  არის  $AP$ -ს შიგა წერტილი.



გვაქვს  $\angle APB = \angle ACB$ , რადგან ერთ რკალს ეყრდნობიან და  $\angle ACB = \angle A'XC$ , რადგან  $A'X \parallel AC$ . აქედან გამომდინარე,  $\angle APB = \angle A'XC$  და ამიტომ ოთხკუთხედი  $BPA'X$  არის ციკლური. ანალოგიურად, ვღებულობთ, რომ  $CYA'P$  არის ციკლური.

ახლა განვიხილოთ ჰომოთეტია ცენტრით  $A$  და კოეფიციენტი 2-ით. გვექნება:  $\angle KIL = \angle CA'B$ . რადგანაც  $BPA'X$  და  $CYA'P$  ციკლურია, გვექნება:  $\angle APX = \angle A'BC$  და  $\angle YPA = \angle BCA'$ . ამრიგად:  $\angle KIL + \angle YPX = \angle CA'B + (\angle YPA + \angle APX) = \angle CA'B + \angle BCA' + \angle A'BC = 180^\circ$ , რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

## ამოცანა 5.

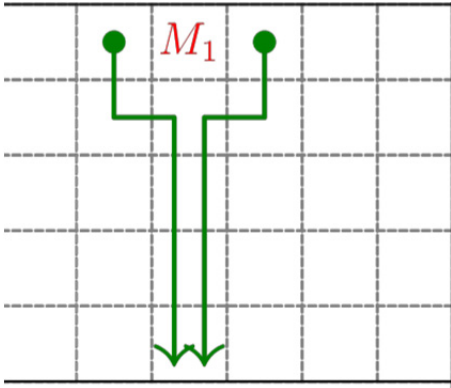
ლოკოკინა ტურბო მოძრაობს მართკუთხედის ფორმის დაფაზე, რომელიც შედგება 2024 სტრიქონისგან და 2023 სვეტისგან. 2022 ურჩხული დამალულია დაფის 2022 უჯრაში. ტურბომ არ იცის ურჩხულების განლაგება, მაგრამ იცის, რომ ყოველ სტრიქონში, გარდა პირველი და ბოლო სტრიქონისა, იმყოფება ზუსტად ერთი ურჩხული და ასევე იცის, რომ ყოველ სვეტში არა უმეტეს ერთი ურჩხულია. ტურბოს მიზანია, დაიწყოს მოძრაობა პირველი სტრიქონის რომელიმე უჯრიდან და მიაღწიოს ბოლო სტრიქონის რომელიმე უჯრას. ამისათვის ის აკეთებს მცდელობების სერიას. ყოველი მცდელობისას მას შეუძლია დაიწყოს მოძრაობა პირველი სტრიქონის ნებისმიერი უჯრიდან და გადაადგილდეს მეზობელ უჯრაში (ორი უჯრა ერთმანეთის მეზობელია, თუ მათ საერთო გვერდი აქვთ). ტურბოს უფლება აქვს დაბრუნდეს იმ უჯრაში, რომელშიც უკვე იმყოფებოდა. თუ ტურბო მოხვდება იმ უჯრაზე, სადაც ურჩხულია, მისი მცდელობა მთავრდება და ის უმაღვე გადაიტყორცნება პირველ სტრიქონში მორიგი მცდელობის დასაწყებად. ანუ მან ისევ უნდა აიღრიოს პირველი სტრიქონის ნებისმიერი უჯრა და დაიწყოს მოძრაო-



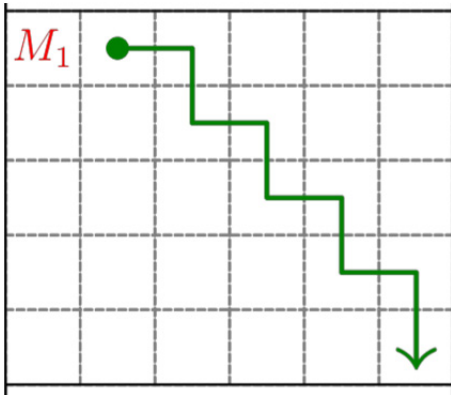
ბა არჩეული უჯრიდან. ცნობილია, რომ ურჩხულები არ მოძრაობენ და ამიტომ ტურბოს შეუძლია დააგროვოს ინფორმაცია უჯრების შესახებ მისი წინა მცდელობების გათვალისწინებით. განსაზღვრეთ  $n$ -ის მინიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ტურბოს აქვს სტრატეგია, რომლითაც ის აუცილებლად მიაღწევს მიზანს, მიუხედავად ურჩხულების განლაგებისა,  $n$  ან უფრო ნაკლებ მცდელობაში.

**ამოხსნა:** ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ორი ცდა საკმარისი არ არის. მართლაც, როდესაც ტურბო პირველად გადავა მეორე რიგში, ტურბოს შეუძლია დაუყოვნებლივ მოხვდეს იქ, სადაც მონსტრია. აღვნიშნოთ  $c$ -თი ის სვეტი, სადაც მეორე მწკრივის ურჩხული ბინადრობს. შემდეგი მცდელობისას, ტურბო მესამე მწკრივში, ცხადია, მოხვდება  $c$  სვეტისგან განსხვავებული სვეტიდან და კვლავ შეიძლება შეხვდეს ურჩხული მესამე სტრიქონში. ანუ ვაჩვენეთ, რომ ორი მცდელობა საკმარისი არაა.

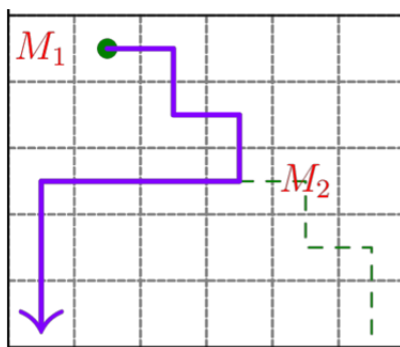
ახლა ვაჩვენოთ, რომ სამი მცდელობა საკმარისია. სტრატეგია სამი მცდელობით მიზნის მისაღწევად. პირველივე მცდელობისას, ტურბომ უნდა გაიაროს მთელი მეორე რიგი, სანამ არ იპოვის მასში ურჩხულს. აღვნიშნოთ ეს უჯრა  $M_1$ -ით. თუ  $M_1$  საზღვრის უჯრა არ არის, მაშინ ქვემოთ მოცემული ორი ბილიკიდან ერთი მაინც უსაფრთხო გზაა და ტურბო მიაღწევს საწადელს არა უმეტეს სამ ცდაში.



ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა  $M_1$  კიდის უჯრაა. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ ის პირველი სვეტის უჯრაა. მაშინ ტურბო გაჰყვება კიბის ფორმის ბილიკს. თუ ბოლო სტრიქონამდე მას მონსტრი არ შეხვდა, მაშინ ის ორ



ცდაშივე მიაღწევს საწადელს. თუ ამ კიბეზე ტურბოს შეხვდება ურჩხული  $M_2$  უჯრაზე, მაშინ ის მესამე მცდელობისას გაჰყვება იმავე გზას, რომელსაც მეორე მცდელობისას გადიოდა. მხოლოდ  $M_2$ -ის უშუალოდ წინა სვეტში მოხვდება თუ არა, გააგრძელებს გზას  $M_2$ -ის სტრიქონზე და ამ სტრიქონის საშუალებით მივა პირველ სვეტამდე და ჩაჰყვება ამ სვეტს ბოლომდე.



ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

## ამოცანა 6.

ვთქვათ,  $\mathbb{Q}$  ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა.  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  ფუნქციის ვუწოდოთ კარგი, თუ მას აქვს შემდეგი თვისება: ყოველი  $x, y \in \mathbb{Q}$ ,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

აწ

$$f(f(x) + y) = x + f(y).$$

დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მთელი რიცხვი  $c$  ისეთი, რომ ყოველი კარგი  $f$  ფუნქციისთვის გვაქვს არა უმეტეს  $c$  ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული  $f(r) + f(-r)$  სახის რაციონალური რიცხვი,  $r \in \mathbb{Q}$ . ასევე, იპოვეთ  $c$ -ს უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობა.

**ამოხსნა :** ვთქვათ,  $f$  ამოცანის პირობაში მოცემული ფუნქციაა. შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

- $a \sim b$ , თუ  $f(a) = b$  ან  $f(b) = a$ .
- $a \rightarrow b$ , თუ  $f(a) = b$ .
- $P(x, y)$ -ით აღვნიშნოთ წინადადება: ან  $f(x + f(y)) = f(x) + y$  ან  $f(f(x) + y) = x + f(y)$ .
- $g(x) = f(x) + f(-x)$ .

ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით  $P(x, y)$  შეიძლება ჩავწეროთ ასე:  $x + f(y) \sim f(x) + y$  და უნდა ვიპოვოთ  $\{g(x) | x \in \mathbb{Q}\}$  სიმრავლეში ელემენტების მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობა.

ვაჩვენოთ, რომ სიმრავლე  $\{g(x) | x \in \mathbb{Q}\}$  შეიძლება შეიცავდეს მაქსიმუმ 2 ელემენტს, ანუ ამოცანის პასუხია 2.

ამისათვის ჯერ მოვიყვანოთ მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომ  $|\{g(x) | x \in \mathbb{Q}\}| = 2$ .

ვთქვათ,  $f(x) = [x] - \{x\}$ , სადაც  $[x]$  აღნიშნავს  $x$ -ის მთელ ნაწილს, ანუ უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც ნაკლებია ან ტოლი  $x$ -ზე და  $\{x\} = x - [x]$ . მაშინ ყოველი  $x, y \in \mathbb{Q}$  გვაქვს:

$$\begin{aligned} f(x) + y &= [x] + [y] + (\{y\} - \{x\}); \\ x + f(y) &= [x] + [y] + (\{x\} - \{y\}). \end{aligned}$$

თუ  $\{x\} < \{y\}$ , მაშინ  $f(x) + y$ -ის მთელი ნაწილია  $[x] + [y]$ , ხოლო წილადი ნაწილია  $\{y\} - \{x\}$  და ამიტომ  $f(f(x) + y) = [x] + [y] - (\{y\} - \{x\}) = x + f(y)$ . ანალოგიურად ვღებულობთ, რომ, თუ  $\{y\} < \{x\}$ , მაშინ  $x + f(y) \rightarrow f(x) + y$ . ხოლო, თუ  $\{x\} = \{y\}$ , მაშინ  $x + f(y) = f(x) + y = [x] + [y]$  მთელი რიცხვია და ე.ი.  $P(x, y)$  წინადადება სრულდება ყოველი  $x, y \in \mathbb{Q}$ . ბოლოს შევნიშნოთ, რომ, თუ  $x$  მთელია, მაშინ  $g(x) = 0$ , ხოლო, თუ  $x$  მთელი არაა, მაშინ  $g(x) = -2$ .

ახლა ვაჩვენოთ, რომ  $\{g(x) | x \in \mathbb{Q}\}$  სიმრავლეში მაქსიმუმ 2 ელემენტი შეიძლება იყოს.

**ლემა.**  $f$  ბიექციაა, რომელიც ყოველი  $x \in \mathbb{Q}$ -თვის აკმაყოფილებს ტოლობას

$$f(-f(-x)) = x. \quad (*)$$



**დამტკიცება:** ჯერ ვაჩვენოთ, რომ  $f$  ინექციაა. ვთქვათ,  $f(x_1) = f(x_2)$ , მაშინ,  $P(x_1, x_2)$ -ის გამო,  $f(x_1) + x_2 \sim f(x_2) + x_1$ . ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ  $f(x_1) + x_2 \rightarrow f(x_2) + x_1$ . შევნიშნოთ, რომ  $P(x, x)$ -იდან გამომდინარე, ყოველი  $x \in \mathbb{Q}$  -თვის გვაქვს  $f(f(x) + x) = f(x) + x$ . ამიტომ:  $f(x_2) + x_1 = f(f(x_1) + x_2) = f(f(x_2) + x_2) = f(x_2) + x_2$  და ე.ი.  $x_1 = x_2$ . ამრიგად ვაჩვენეთ, რომ  $f$  ინექციაა.  $P(0, 0)$ -დან ვღებულობთ  $f(f(0)) = f(0)$  და ინექციის გამო  $f(0) = 0$ .

$P(x, -f(x))$  -დან ვღებულობთ  $0 \sim x + f(-f(x))$ . ამრიგად, ან  $0 = f(0) = x + f(-f(x))$ , ან  $f(x + f(-f(x))) = 0$ , რაც ზემოთ მიღებული გამო ნიშნავს, რომ  $x + f(-f(x)) = 0$ . ე.ი., თუ  $x$ -ის ნაცვლად ავიღებთ  $-x$ -ს, მივიღებთ (\*), საიდანაც  $f$ -ის ბიექციურობაც ცხადია. ლემა დამტკიცებულია.

რადგანაც  $f$  ბიექციაა, შეგვიძლია განვიხილოთ მისი შექცეული ფუნქცია  $f^{-1}$ . (\*)-დან ვღებულობთ  $f(-x) = -f^{-1}(x)$  და გვექნება:

$$g(x) = f(x) + f(-x) = f(x) - f^{-1}(x).$$

როგორც უკვე ვნახეთ,  $g(0) = 0$ . დავუშვათ, რომ არსებობს  $u \neq v$  ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული არანულოვანი რიცხვი,  $g(x) = u$  და  $g(y) = v$ . ვთქვათ,  $x' = f^{-1}(x)$  და  $y' = f^{-1}(y)$ .

განსაზღვრების გამო, გვექნება:  $x' \rightarrow x \rightarrow x' + u$  და  $y' \rightarrow y \rightarrow y' + v$ .  $P(x', y)$  და  $P(x, y')$ -დან, შესაბამისად, მივიღებთ:  $x + y \sim x' + y' + v$  და  $x + y \sim x' + y' + u$ . რადგანაც  $f$  ბიექციაა და  $u \neq v$ , ამიტომ უნდა გვექონდეს ან  $x' + y' + u \rightarrow x + y \rightarrow x' + y' + v$ , ან  $x' + y' + v \rightarrow x + y \rightarrow x' + y' + u$ . ცხადია, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $x' + y' + u \rightarrow x + y \rightarrow x' + y' + v$ .

ლემის გათვალისწინებით, გვაქვს  $-x' - u \rightarrow -x \rightarrow -x'$ .

$P(x + y, -x' - u)$ -დან ვღებულობთ  $y \sim y' + v - u$  და ამრიგად,  $y' + v - u$  უნდა იყოს ან  $y' + v$ , ან  $y'$ , რაც ნიშნავს, რომ  $u$  უნდა იყოს 0 ან  $v$ . ამრიგად, ჩვენი დაშვება  $u \neq v$  ორი არანულოვანი რიცხვია, რომლებიც  $g$ -ს მნიშვნელობათა სიმრავლეში ყოფილა არასწორი. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

**პასუხი:**  $c$ -ს უმცირესი შესაძლო მნიშვნელობაა 2.

ავტორების ელექტრონული მისამართები:

[giorgi.chelidze@kiu.edu.ge](mailto:giorgi.chelidze@kiu.edu.ge)

[givi.nadibaidze@tsu.ge](mailto:givi.nadibaidze@tsu.ge)

# წინა ნომრის ამოცანების ამოხსნები



## ამოცანა 1

არსებობს თუ არა 10 განსხვავებული ისეთი მთელი რიცხვი, რომ ნებისმიერი 9 მათგანის ჯამი სრული კვადრატია?

**ამოხსნა:** ვთქვათ, ეს რიცხვებია  $x_1, \dots, x_{10}$ , მათი ჯამი კი  $S$ -ით აღვნიშნოთ. მაშინ  $S - x_1 = n_1^2, S - x_2 = n_2^2, \dots, S - x_{10} = n_{10}^2, n_i \in \mathbb{N}$ . ცხადია, რომ  $S = \frac{n_1^2 + \dots + n_{10}^2}{9}$ . ვთქვათ,  $n_k = 3k (k = 1, \dots, 10)$ , მაშინ კვადრატების ჯამი გაიყოფა 9-ზე, ამიტომ  $x_i = S - n_i^2$  რიცხვები აკმაყოფილებენ ამოცანის პირობას.

**პასუხი:** არსებობს.

## ამოცანა 2

**ამოხსნა:**  $x^2 + ax + b = 0$  განტოლებას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს ნამდვილი ფესვები, როცა  $a^2 - 4b$  არაუარყოფითია, ანუ დარჩენილი რიცხვებიდან ნებისმიერი ორი აკმაყოფილებს  $a^2 \geq 4b$  უტოლობას. ამ უტოლობის შესრულება „გაძნელდება“, თუ  $a$ -ს ავიღებთ მცირეს და  $b$ -ს დიდს. სხვანაირად უტოლობა თუ სრულდება, როცა  $a$  არის უმცირესი დარჩენილებს შორის და  $b$  — უდიდესი, მაშინ  $a$  და  $b$  რიცხვების ნებისმიერი წყვილისთვისაც შესრულდება. ვთქვათ,  $m$  უმცირესია დარჩენილ რიცხვებს შორის, ხოლო  $M$  — უდიდესი, მაშინ  $m^2 \geq 4M$ . თუ  $M = 100$ , მაშინ  $m^2 \geq 400$  და  $m \geq 20$ . ე.ი. შეიძლება დარჩეს 81 რიცხვი: 20-დან 100-ის ჩათვლით. ვთქვათ, რიცხვები 81-ზე მეტია, მაშინ  $M > m + 80, m < 20$  და  $x^2 + mx + M = 0$  განტოლების დისკრიმინანტი  $m^2 - 4M < m^2 - 4(m + 80) = (m - 2)^2 - 324 \leq 17^2 - 324 < 0$ . ცხადია, რომ რიცხვების რაოდენობა ვერ იქნება 81-ზე მეტი.

**პასუხი:** 81.

ნინომ ჩამოწერა პირველი 100 ნატურალური რიცხვი და ზოგი მათგანი წაშალა. აღმოჩნდა, რომ დარჩენილი რიცხვებიდან თუ  $a$  და  $b$ -ს მნიშვნელობებად ავიღებთ რომელიმე ორს,  $x^2 + ax + b = 0$  განტოლებას აქვს ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი. მაქსიმუმ რამდენი რიცხვი შეიძლება დარჩენილიყო წაშლული?

## ამოცანა 3

ამოზნექილ  $n$ -კუთხედს ( $n > 4$ ) აქვს შემდეგი თვისება: თუ დიაგონალი მისგან მოკვეთს სამკუთხედს, ეს სამკუთხედი ტოლფერდაა. დაამტკიცეთ, რომ ამ  $n$ -კუთხედის ნებისმიერ ოთხ გვერდს შორის ორი მაინც ტოლია.

**დამტკიცება:** განვიხილოთ ერთმანეთის მიმდევრობით განთავსებული ტოლი გვერდების ჯგუფები. შევნიშნოთ, რომ ამ ჯგუფების გადახმის ადგილზე  $n$ -კუთხედის კუთხე იქნება მახვილი (ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხე). მაგრამ მრავალკუთხედში ვერ იქნება სამზე მეტი მახვილი კუთხე (გარე კუთხეების ჯამი 360 გრადუსია, ამიტომ მათ შორის

არა უმეტეს სამი ბლაგვია). ამიტომ ეს ჯგუფები არა უმეტეს სამია. ე.ი. ყოველ ოთხ გვერდს შორის მოიძებნება ორი გვერდი ერთი ჯგუფიდან, ანუ ტოლი.



ამოცანა 4

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $AB = 2$ ,  $O$  და  $M$ , შესაბამისად,  $AB$  და  $YZ$  მონაკვეთების შუაწერტილებია,  $H - XYZ$  სამკუთხედის ორთოცენტრია. რადგან  $XYZ$  ტოლფერდა სამკუთხედია,  $H$  ძევს  $YZ$ -ის შუამართობზე, ანუ რაღაც  $\pi$  სიბრტყეზე, რომელიც  $O$  წერტილზე გადის და  $AB$ -ს მართობულია.  $X$  წერტილი ძევს  $\pi$  სიბრტყეში მდებარე  $\sigma$  წრეწირზე, რომლის რადიუსია  $\sqrt{3}$  და ცენტრი  $O$ . ვთქვათ,  $XM$  წრფე მეორეჯერ  $\sigma$ -ს კვეთს  $W$  წერტილში (თუ  $XM$  ეხება  $\sigma$ -ს მაშინ  $X$  და  $W$  ერთმანეთს ემთხვევა), ხოლო  $OM$  წრფე კვეთს  $\sigma$ -ს  $P$  და  $Q$  წერტილებში, მაშინ  $MX \cdot MW = MP \cdot MQ = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ . ვთქვათ,  $YN$  წარმოადგენს  $XYZ$  სამკუთხედის სიმაღლეს.  $YN$  წრფე გადაკვეთს  $XM$  წრფეს  $H$  ორთოცენტრში. შევნიშნოთ, რომ  $HYM$  და  $YXM$  მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია, ამიტომ  $MH:MY = MY:MX$ . რადგანაც  $MY = 1$ ,  $MX \cdot MH = 1$ . რადგან  $MH = MW$  და  $H$  და  $W$  წერტილები  $MX$  სხივზეა, ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან, ე.ი.  $H$  ძევს  $\sigma$ -ზე.

მოცემულია  $AB$  მონაკვეთი. სივრცეში აღებულია  $X, Y$  და  $Z$  წერტილები ისე, რომ  $ABX$  ტოლგვერდა სამკუთხედია, ხოლო  $ABYZ$  — კვადრატი. დაამტკიცეთ, რომ ყველა ასეთი  $XYZ$  სამკუთხედის ორთოცენტრი რომელიღაც ფიქსირებულ წრეწირზეა.

ამოცანა 5

არსებობს თუ არა ისეთი დადებითი  $\alpha$  რიცხვი, რომ ყველა ნამდვილი  $x$ -სთვის სამართლიანია  $|\cos x| + |\cos \alpha x| > \sin x + \sin \alpha x$  უტოლობა?

**ამოხსნა:** დავუშვათ, რომ  $0 < \alpha \leq 1$ . მაშინ, როცა  $x = \frac{\pi}{2}$ , მარცხენა მხარე მიიღებს  $|\cos \frac{\alpha\pi}{2}|$  მნიშვნელობას, ანუ იქნება 1-ზე ნაკლები ან ტოლი; მაშინ, როცა მარჯვენა მხარე იქნება  $1 + \sin \frac{\alpha\pi}{2}$ , ანუ 1-ზე მეტი, და უტოლობა არ სრულდება. როცა  $\alpha > 1$ , თუ აღვნიშნავთ  $\alpha x = t$  და  $\beta = \frac{1}{\alpha}$ , მოცემულ უტოლობას მივიყვანოთ  $|\cos \beta t| + |\cos t| > \sin \beta t + \sin t$  სახეზე და ამოცანა დაიყვანება წინა შემთხვევაზე.

**პასუხი:** არ არსებობს.

ამოცანა 6

**ამოხსნა:** ვთქვათ,  $PA = x, PB = y, PC = z$ . გვაქვს  $S = x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2}$  და  $V_{PABC} = \frac{1}{2}xyz$ . ვინაიდან  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , გვექნება:

$PABC$  სამკუთხა პირამიდის ექვსივე წიბოს სიგრძეთა ჯამი  $S$ -ის ტოლია და  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90^\circ$ . რა უდიდესი მოცულობა შეიძლება ჰქონდეს მოცემული თვისების მქონე პირამიდებს?

$S \geq x + y + z + \sqrt{2}(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz}) \geq 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt{2}\sqrt[3]{\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{xz}}$ . მაშასადამე,

$V \leq \frac{1}{6} \left( \frac{S}{3(1+\sqrt{2})} \right)^3$  და თუ  $x = y = z = \frac{S}{3(1+\sqrt{2})}$ , გვაქვს  $V = \frac{1}{6} \left( \frac{S}{3(1+\sqrt{2})} \right)^3$ .

პასუხი:  $\frac{1}{6} \left( \frac{S}{3(1+\sqrt{2})} \right)^3$ .

## ამოცანა 7

ცნობილია, რომ ნებისმიერი ნამდვი-  
ლი  $x$  რიცხვისათვის სამართლიანია  
უტოლობა

$$|ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|. \quad \text{ახვე-}$$

$$\text{ნეთ, რომ } |b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|.$$

ამოხსნა: ვთქვათ,  $x \neq 0$ . გვექნება

$$\left| a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right| \leq \left| A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \right|. \quad \text{თუ გადავალთ}$$

ზღვარზე  $x \rightarrow +\infty$ , მივიღებთ  $|a| \leq |A|$ . (1)

განვიხილოთ შემთხვევები:

ა) თუ  $A = 0$ , მაშინ (1)-დან გვექნება  $a = 0$ , და მა-

$$\text{შასადამე } \left| b + \frac{c}{x} \right| \leq \left| B + \frac{C}{x} \right|, \quad \text{საიდანაც მივიღებთ:}$$

$$|b| \leq |B| \quad \text{და} \quad |b^2 - 4ac| = |b^2| \leq |B^2| = |B^2 - 4AC|.$$

ბ) ვთქვათ,  $A \neq 0$  და  $B^2 - 4AC > 0$  და  $x_1, x_2$  არის  $Ax^2 + Bx + C = 0$  განტოლების ფესვები.

$$|ax_i^2 + bx_i + c| \leq |Ax_i^2 + Bx_i + C| \quad \text{უტოლობიდან მივიღებთ } ax_i^2 + bx_i + c = 0 \quad i = 0, 1 \quad \text{და}$$

$$a = b = c = 0 \quad \text{ან} \quad (x_2 - x_1)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{B^2 - 4AC}{A^2}.$$

$$\text{მაშასადამე, გვექნება: } |b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|.$$

გ) თუ  $A \neq 0$  და  $B^2 - 4AC \leq 0$ . შეგვიძლია ვიგულისხმოდ, რომ  $A > 0$ . ვინაიდან

$$|ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|, \quad \text{ამიტომ ყოველი } x \text{-ისათვის გვექნება:}$$

$$(A - a)x^2 + (B - b)x + C - c \geq 0, \quad (A + a)x^2 + (B + b)x + C + c \geq 0.$$

მაშასადამე:  $(B - b)^2 - 4(A - a)(C - c) \leq 0$  და  $(B + b)^2 - 4(A + a)(C + c) \leq 0$ , საიდანაც მივი-  
ღებთ

$$(B - b)^2 - 4(A - a)(C - c) + (B + b)^2 - 4(A + a)(C + c) \leq 0.$$

$$\text{საბოლოოდ გვექნება: } b^2 - 4ac \leq 4AC - B^2 = |B^2 - 4AC|.$$

განვიხილოთ შემთხვევა  $b^2 - 4ac < 0$ . ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე ვიგულისხმოდ  $a > 0$ .

$$\text{გვაქვს } \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \leq \frac{B^2 - 4AC}{A^2} \quad \text{და მაშასადამე, } |b^2 - 4ac| = 4ac - b^2 \leq 4AC - |B^2 - 4AC|.$$

მასალა მოამზადეს თენგიზ კოპალაიანმა და ბეჟან ღვაბლერიძემ

# ახალი ამოცანები

მ  
ც  
ნ  
ა  
პ  
ე  
მ  
ე  
ფ  
ი  
ს



**ამოცანა 1.** იპოვეთ ყველა კვადრატული სამწევრი  $f(x) = x^2 + ax + b$ , რომელთათვისაც  $f(f(-1)) = f(f(0)) = f(f(1))$ .

**ამოცანა 2.** იპოვეთ ყველა ნატურალური  $n$ , რომელთათვისაც ჯამი  $s_n = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$  არის რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატი.

**ამოცანა 3.**  $f(x)$  კვადრატული სამწევრისათვის ცნობილია, რომ აქვს ორი განსხვავებული ფესვი და ნებისმიერი  $x$  და  $y$  რიცხვებისათვის აკმაყოფილებს  $f(x^2 + y^2) \geq f(2xy)$  უტოლობას. შესაძლებელია თუ არა  $f(x)$  კვადრატულ სამწევრს ჰქონდეს უარყოფითი ფესვი?

**ამოცანა 4.** დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური  $n$  რიცხვისათვის არსებობს მხოლოდ 1 და 2 ციფრებისაგან შედგენილი რიცხვი, რომელიც იყოფა  $2^n$ -ზე.

**ამოცანა 5.** ვთქვათ,  $a, b$  და  $c$  წარმოადგენენ  $ABC$  სამკუთხედის გვერდებს, ხოლო  $\vec{n_a}, \vec{n_b}$  და  $\vec{n_c}$  ერთეულოვანი სიგრძის ვექტორებია, რომლებიც, შესაბამისად,  $a, b$  და  $c$  გვერდების პერპენდიკულარულია მიმართულებით სამკუთხედის გარე მხარეს. დაამტკიცეთ, რომ:

$$a^3 \vec{n_a} + b^3 \vec{n_b} + c^3 \vec{n_c} = 12S \cdot \vec{MO},$$

სადაც  $S$  სამკუთხედის ფართობია,  $M$  სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია, ხოლო  $O$   $ABC$  სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია.

**ამოცანა 6.** დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყეზე მოცემული ორი არაგადამკვეთი წრეწირი ინვერსიის საშუალებით შეგვიძლია გადავიყვანოთ ორ კონცენტრულ წრეწირში.

**ამოცანა 7.** დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ  $2n$ -კუთხა ამოზნექილ მრავალკუთხედში მოიძებნება დიაგონალი, რომელიც მრავალკუთხედის არცერთი გვერდის პარალელური არ არის.

მასალა მოამზადეს თენგიზ კოპალიანმა და ბეჟან ღვაბერიძემ

# 1963 წლის შემოდგომა. მოსხენება მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის შექმნის 45 წლის იუბილეზე. თსუ სააქტო დარბაზი<sup>1</sup>



თ  
ს  
უ



## გიორგი ჯაიანი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის  
სახელმწიფო უნივერსიტეტი;  
ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის  
ინსტიტუტი & მათემატიკის დეპარტამენტი.  
george.jaiani@gmail.com; giorgi.jaiani@tsu.ge

1918 წლის 26 იანვარს (ძველი სტილით) ქართულმა საზოგადოებამ იღღესასწაულა ისტორიული თარიღი — საქართველოს უნივერსიტეტის დაარსება. ქართულმა უნივერსიტეტმა საფუძველი ჩაუყარა უმაღლესი განათლებისა და მეცნიერების განვითარებას საქართველოში.

უნივერსიტეტი დაარსებულ იქნა ქართველ მოწინავე ინტელიგენტთა ერთი ჯგუფის მიერ, რომელსაც მეთაურობდა ივანე ჯავახიშვილი. უნივერსიტეტის პირველ რექტორად არჩეულ იქნა ჯერ კიდევ მაშინ ფართოდ ცნობილი ქართველი მეცნიერი, ქიმიკოსი პეტრე მელიქიშვილი.

იმ დროს უნივერსიტეტი მხოლოდ ერთი, საბრძნისმეტყველების ფაკულტეტისაგან შედგებოდა. მასთან ჩამოყალიბდა პროფესორთა საბჭო, რომელიც არა მხოლოდ ამ ფაკულტეტის საქმეებს განაგებდა, არამედ ძირითადად ახალი ფაკულტეტების გახსნაზე ზრუნავდა

და უნივერსიტეტის განვითარების პერსპექტიულ გეგმას ამუშავებდა.

1918 წლის ოქტომბერში შეიქმნა სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის სამეცნიერო საბჭო, რომელსაც დროებით შეუერთდნენ სამკურნალო ფაკულტეტის წევრებიც. გაერთიანებული ფაკულტეტის პირველ დეკანად არჩეულ იქნა მედიცინის დოქტორი, პროფ. ვ. მოსეშვილი, ხოლო მდივნად — ასისტენტი ა. ხარაძე. სამეცნიერო საბჭომ მისაღებ სტუდენტთა კონტინგენტი 500 კაცით განსაზღვრა. ფაკულტეტების გაერთიანებას ის ამართლებდა, რომ სამკურნალო ფაკულტეტზე ფიზიკა-ქიმიური და ბიოლოგიური დარგების სწავლებას პირველ კურსზე უზრუნველყოფდა ფაკულტეტის საბუნებისმეტყველო განყოფილება. 1919 წლიდან სამკურნალო ფაკულტეტი ცალკე გამოიყო. ამის შემდეგ სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის დეკანად არჩეულ იქნა პროფესორი ა. რაზმაძე, ხოლო მდივნად ისევ ა. ხარაძე დარჩა.

<sup>1</sup> 1963 წლის შემოდგომაზე სტუდენტების ინიციატივით და დეკანატის მხარდაჭერით სააქტო დარბაზში ჩატარდა მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის დაარსებიდან 45 წლისთავისადმი მიძღვნილი საიუბილეო შეკრება, რომელზეც წინამდებარე მოხსენება გააკეთა იმხანად მეორე კურსის სტუდენტმა გიორგი ვლადიმერის-ძე ჯაიანმა, რომელსაც კონსულტაციას უწევდა პროფესორი (1936 წლიდან) ლევან გოკიელი (1901-1975). ის იყო საქართველოს მათემატიკოსთა საზოგადოების პრეზიდენტი (1967-1970). მისი შრომები ეხებოდა მათემატიკის დაფუძნების, საქართველოში მათემატიკის ისტორიის, ლოგიკისა და მისი ფილოსოფიური დაფუძნების საკითხებს.



1919 წლის ბოლოს პროფესორი პ. მელიქიშვილი განთავისუფლებულ იქნა, მისი თხოვნის თანახმად, უნივერსიტეტის რექტორის მოვალეობისგან და ამ თანამდებობაზე არჩეულ იქნა პროფესორი ივ. ჯავახიშვილი. ამავე წლის ბოლოდან სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის დეკანის თანამდებობაზე პროფესორი ა. რაზმაძე შეცვალა პროფესორმა ა. ბენაშვილმა.

უნივერსიტეტის არსებობის მეორე წელსვე დასაბამი მიეცა სამეცნიერო შრომების და სახელმძღვანელოების გამოცემის საქმის ორგანიზაციას. იმავე წელს გამოიცა სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის პროფესორ ა. რაზმაძის სახელმძღვანელო მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I.

პირადი შემადგენლობის მხრივ განსაკუთრებით გაიზარდა სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტი, რომელიც ამ დროისთვის უკვე სამ დარგს შეიცავდა: სამათემატიკო, საბუნებისმეტყველო და სასოფლო-სამეურნეო. მიწვეულ იქნენ პროფესორები: ნ. სალტიკოვი (მათემატიკა), ა. ნაფეტვარიძე (მეტეოროლოგია). 1920 წლის შემოდგომაზე მიწვეულ იქნენ პროფესორები: ნ. მუსხელიშვილი (თეორიული მექანიკა), ლ. ლეიბენზონი (თეორიული ფიზიკა) და სხვა. ამ დროისათვის უნივერსიტეტის სტუდენტთა რაოდენობა შეადგენდა 1313-ს, ხოლო თავისუფალ მსმენელთა რიცხვი — 94-ს. სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის სტუდენტთა რიცხვი შეადგენდა 56-ს და 20 თავისუფალ მსმენელს.

1921 წლის თებერვალი გარდატეხის მომენტი იყო როგორც, საერთოდ, ქართველი ხალხის, ისე, კერძოდ, ქართული უნივერსიტეტის ცხოვრებაში. საფუძველი ეყრებოდა განახლებული საქართველოს დიდი პოლიტიკური, ეკონომიკური და კულტურული აღმავლობის საქმეს.

სამეცნიერო და სასწავლო მუშაობისათვის ნამდვილი ხელსაყრელი პირობები უნივერსიტეტში მხოლოდ საქართველოში საბჭოთა ხელისუფლების დამყარების შემდეგ შეიქმნა. მანამდე უნივერსიტეტი არსებობდა იმ სახსრებით, რომლებიც პერიოდულად იკ-

რიბებოდა მოსახლეობაში. ისედაც გაღატაკებული და დაკნინებული მენშევიკური მთავრობა არ ზრუნავდა უნივერსიტეტის ზრდა-განვითარებისა და მისი ფინანსურად უზრუნველყოფისათვის.

მხოლოდ საბჭოთა ხელისუფლების წლებში შეიქმნა უნივერსიტეტში სასწავლო-სამეცნიერო მუშაობისათვის საჭირო ბაზა და განსაკუთრებული სწრაფი ტემპით წავიდა წინ უნივერსიტეტის სხვადასხვა სპეციალობის განვითარება. უნივერსიტეტი იმდენად გაიზარდა, რომ შემდგომ მისი ფაკულტეტების ბაზაზე შეიქმნა დამოუკიდებელი დარგობრივი ინსტიტუტები; მათ რიცხვს ეკუთვნის: ვ. ლენინის სახელობის პოლიტექნიკური ინსტიტუტი, თბილისის სამედიცინო ინსტიტუტი, საქართველოს სასოფლო-სამეურნეო ინსტიტუტი და სხვა.

საქართველოში მათემატიკური კულტურის დანერგვა მჭიდროდ არის დაკავშირებული თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტთან.

უნივერსიტეტი იყო ერთადერთი სამეცნიერო კერა, სადაც შეიძლებოდა ქართული მეცნიერების, კერძოდ, მათემატიკის აყვავება და გაფუძნება. უნივერსიტეტში თავი მოიყარა მათემატიკოსების მცირერიცხოვანმა, მაგრამ საკმაოდ ძლიერმა ჯგუფმა, რომელშიც შედიოდნენ: ანდრია რაზმაძე, ნიკო მუსხელიშვილი, არჩილ ხარაძე და გიორგი ნიკოლაძე. უმაღლესი განათლება მათ რუსეთში მიიღეს და საქართველოში ჩამოსვლისთანავე დიდი ენთუზიაზმით შეუდგნენ მათემატიკის კულტურის დანერგვას ჩვენში. მათი თავდადებული მუშაობის შედეგად შეიქმნა ქართული მათემატიკური ტერმინოლოგია, გამოიცა სტუდენტებისათვის სახელმძღვანელოები მათემატიკურ მეცნიერებათა ძირითად დარგებში. ქართველ სტუდენტობას პირველად მიეცა საშუალება მშობლიურ ენაზე მოესმინა ლექციები მაღალ მეცნიერულ დონეზე. ამასთან ერთად, ეს ჯგუფი აწარმოებდა გაცხოველებულ კვლევით მუშაობას.

მაგრამ სრულიად მოულოდნელად ქართველ მათემატიკოსებს გამოაკლდა ორი წამყვანი მეცნიერი. თითქმის ერთდროულად გარდაიცვალნენ ა. რაზმაძე და გ. ნიკოლაძე.

ამან თითქოს წარმოშვა ერთგვარი სა-  
შიშროება იმისა, რომ ჩვენში მათემატიკის  
განვითარების ტემპი საგრძნობლად შემცირ-  
დებოდა, მაგრამ ეს ასე არ მოხდა.

ა. რაზმაძის, ნ. მუსხელიშვილის, ა. ხარა-  
ძის და გ. ნიკოლაძის დაუზოგავი პედაგოგიუ-  
რი და გაცხოველებული მეცნიერული მუშაო-  
ბის შედეგად, ჩვენში წამოიზარდნენ ახალ-  
გაზრდა ნიჭიერი მათემატიკოსები, რომელ-  
თაც არათუ შეძლეს თავიანთი მასწავლებლე-  
ბის სახელოვანი ტრადიციების გაგრძელება,  
არამედ ჩვენში განავითარეს და საგრძნობ-  
ლად წინ წასწიეს მათემატიკურ მეცნიერება-  
თა სრულიად ახალი დარგები.

ამაში, უეჭველია, მნიშვნელოვანი როლი  
შეასრულა იმან, რომ ქართველმა მათემატი-  
კოსებმა თავიდანვე მჭიდრო მეცნიერული  
კონტაქტი დაამყარეს საბჭოთა კავშირის მრავ-  
ალ გამოჩენილ მათემატიკოსთან.

შემდგომ ამ მეცნიერულ კონტაქტს შედე-  
გად მოჰყვა ის, რომ ბევრმა საბჭოთა და უცხო-  
ელმა მათემატიკოსმა ნაყოფიერად დაიწყო  
მუშაობა იმ პრობლემებზე, რომელთაც ამუშა-  
ვებდნენ ქართველი მათემატიკოსები.

მათემატიკურ მეცნიერებათა ასეთმა  
სწრაფმა განვითარებამ ჩვენში ბუნებრივად  
წარმოშვა მეორე სამეცნიერო კერის შექმნის  
აუცილებლობა.

მართლაც, სულ მალე, ნ. მუსხელიშვი-  
ლის და ვ. კუპრაძის თაოსნობით, საქართვე-  
ლოს აკადემიასთან ჩამოყალიბდა მათემატი-  
კური ინსტიტუტი, რომელსაც შემდეგ მიენიჭა  
ა. რაზმაძის სახელი.

უნივერსიტეტში და მათემატიკის ინსტი-  
ტუტში გაცხოველებულმა პედაგოგიურმა და  
მეცნიერულმა მუშაობამ არსებითად შეუწყო  
ხელი სამეცნიერო კადრების მომზადებას.  
სულ მოკლე ხანში საქართველოს უმაღლესი  
სასწავლებლები ძირითადად თითქმის უზ-  
რუნველყოფილ იქნა მაღალკვალიფიციური  
სპეციალისტებით.

ზოგიერთი მათემატიკოსი, რომელმაც  
დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერ-  
სიტეტი ან დაიწყო კვლევითი მუშაობა პირვე-  
ლი ქართველი მათემატიკოსების ხელმძღვა-  
ნელობით, ამჟამად ნაყოფიერ პედაგოგიურ  
და სამეცნიერო მუშაობას ეწევა საბჭოთა კავ-  
შირის სხვადასხვა კუთხეში: აზერბაიჯანის  
სსრ მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი,

პროფესორი ზ. ხალილოვი — ამ აკადემიის  
ვიცე-პრეზიდენტია, მეცნიერებათა დოქტორი,  
პროფესორი ა. არაშკინი — ლენინგრადის  
ერთ-ერთი უმაღლესი სასწავლებლის კათედ-  
რის გამგეა, მეცნიერებათა დოქტორი, პრო-  
ფესორი მ. ვიშიკი — მოსკოვში მოღვაწეობს  
და სხვა.

ამჟამად ქართველ მათემატიკოსებს ფრი-  
ად მნიშვნელოვანი წვლილი აქვთ შეტანილი  
მათემატიკურ მეცნიერებათა სხვადასხვა და-  
რგში.

კარგადაა ცნობილი ა. რაზმაძის გამოკ-  
ვლევები ვარიაციითა აღრიცხვაში და გ. ნი-  
კოლაძის გამოკვლევები ალგებრულ და დი-  
ფერენციალურ გეომეტრიაში. ამ გამოკვლე-  
ვათა ძირითადი შედეგების ნაწილი საფუძ-  
ვლად დაედო სადოქტორო დისერტაციებს,  
რომლებიც მათ ბრწყინვალედ დაიცვეს პარი-  
ზის უნივერსიტეტში.

ფართოდ არის ცნობილი სახელმძღვანელო  
მეცნიერის, ნ. მუსხელიშვილის გამოკ-  
ვლევები დრეკადობის ბრტყელ თეორიაში და  
სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა  
თეორიაში. ამ გამოკვლევათა შედეგები თავ-  
მოყრილია მის მონოგრაფიებში, რომლებიც  
გადათარგმნილია ინგლისურ ენაზე და გამო-  
ცემულია უცხოეთში.

მეტად მნიშვნელოვანია ვ. კუპრაძის გა-  
მოკვლევები დრეკად და ელექტრომაგნიტურ  
რხევათა თეორიაში. ამ გამოკვლევათა შედე-  
გები თავმოყრილია მის მონოგრაფიებში, რო-  
მლებიც გადათარგმნილია ინგლისურ და გერ-  
მანულ ენებზე და გამოცემულია უცხოეთში.

მეტად მნიშვნელოვანია ი. ვეკუას გამოკ-  
ვლევები ელიფსურ დიფერენციალურ განტო-  
ლებათა თეორიაში.

მნიშვნელოვანია ა. ხარაძის გამოკვლე-  
ვები ანალიზის და ფუნქციათა თეორიის სხვა-  
დასხვა საკითხში.

მნიშვნელოვანია ლ. გოკიელის გამოკ-  
ვლევები მათემატიკის ფილოსოფიაში.

მეტად ნაყოფიერად მუშაობს შ. მიქელაძე  
მიახლოებითი ანალიზის საკითხებში. მისი  
მნიშვნელოვანი შედეგები თავმოყრილია მონო-  
გრაფიებში, რომლებიც გადათარგმნილია  
გერმანულ და ჩინურ ენებზე და გამოცემულია  
უცხოეთში.

მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტს ამჟა-  
მად ორი განხრა აქვს — პედაგოგიური და



არაპედაგოგიური. ეს უკანასკნელი წარმოდგენილია მათემატიკის, მექანიკის და ასტრონომიის სპეციალობებით. ამჟამად აქ უმაღლეს განათლებას იღებს 520 სტუდენტი დღის დასწრებული და 80 სტუდენტი საღამოს დასწრებული სწავლების ხაზით. ფაკულტეტზე არის ცხრა სხვადასხვა კათედრა, რომელთაც ხელმძღვანელობენ აკადემიკოსები: ნ. მუსხელიშვილი, ვ. კუპრაძე, გ. ჭოლოშვილი, ნ. ვეკუა, შ. მიქელაძე, ე. ხარაძე; პროფესორები: ა. ხარაძე, ვ. ჭელიძე, ლ. გოკიელი და დოც. ი. ქარცივაძე.

მათემატიკის დარგში თავიდანვე კარგად გაშლილმა მუშაობამ დასაყრდენი როლი შეასრულა მოსაზღვრე მეცნიერებებში (ფიზიკაში, ასტრონომიაში და ა.შ.). ფართო საქმიანობის გაშლისთვის დღეს ფაკულტეტი დგას თავისი მუშაობის კიდევ უფრო გაფართოების ამოცანის წინაშე, რათა უკეთ დაეუფლოს თანამედროვე მათემატიკის ყველაზე აქტუალურ დარგებს, კვლევა-ძიება კიდევ უფრო მჭიდროდ დაუკავშიროს დღევანდელი პრაქტიკის საჭიროებას, უფრო მაღალ დონეზე აიყვანოს სამეცნიერო მუშაობის ორგანიზაცია, გააძლიეროს მუშაობის კოლექტიური ფორმები, სრულყოფილად დაეუფლოს თანამედროვე მათემატიკურ მანქანებსა და აპარატურას, უფრო მეტად დააინტერესოს ახალგაზრდობა მათემატიკით და ფართოდ ჩააბას იგი სამეცნიერო მუშაობაში, დანერგოს მათემატიკის სწავლების ახალი მოწინავე ფორმები.

ქართული მათემატიკის წარმატებისათვის ფაკულტეტის არსებობის 45 წლის მიჯნაზე ერთგვარი სიმბოლური მნიშვნელობა აქვს იმ გარემოებას, რომ წელს დაარსდა საქართველოს მათემატიკური საზოგადოება.

ბოლო ხანებში თბილისი ორჯერ ზედიზედ ფართო — საკავშირო და მსოფლიო მასშტაბით მოწყობილი — მათემატიკური კონფერენციის მოწმე გახდა. ეს იმის მაჩვენებელია, თუ როგორ იზიდავს თბილისი, როგორც ერთ-ერთი მათემატიკური ცენტრი, სხვადასხვა ქვეყნის მათემატიკოსებს.

იმედი უნდა ვიქონიოთ, რომ თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სახელოვანი კოლექტივი არ დაკმაყოფილდება მიღწეული შედეგებით. იგი უფრო მეტი ენერგიითა და მონდობით იბრძოლებს მომავალი მათემატიკოსების აღზრდისათვის, საბჭოთა მეცნიერების შემდგომი აყვავებისა და წარმატებებისათვის.

დასასრულს, ჩვენი ფაკულტეტის სტუდენტთა სახელით, ნება მიბოძეთ ჯანმრთელად ხანგრძლივი სიცოცხლე და პედაგოგიურ და მეცნიერულ მუშაობაში წარმატებები ვუსურვო ჩვენს ღვაწლმოსილ მეცნიერებს: ნ. მუსხელიშვილს, ვ. კუპრაძეს, გ. ჭოლოშვილს, ნ. ვეკუას, შ. მიქელაძეს, ე. ხარაძეს, ა. ხარაძეს, ვ. ჭელიძეს, ლ. გოკიელს, ა. ჩახტაურს, პ. ზერაგიას, დ. ავაზაშვილს, გ. ლომაძეს, ნ. თევზაძეს, ლ. მალნარაძეს, ი. ქარცივაძეს და სხვებს.

## ინსტრუქცია ავტორებისთვის

1. სტატია აკრეფილი უნდა იყოს Sylfaen-ში, შრიფტის ზომა 11, სტრიქონებს შორის ინტერვალი 1,5, სიტყვებს შორის 1 ინტერვალი, გვერდის მინდვრები – Normal.
2. სტატია ფორმდება შემდეგნაირად: სტატიის სათაური (შრიფტის ზომა 14 Bold), სახელი და გვარი (შრიფტის ზომა 12 Bold), წოდება, თანამდებობა, სამუშაო ადგილი (შრიფტის ზომა 11). ავტორ(ებ)ის/მთარგმნელ(ებ)ის ფოტოსურათი თავსდება სათაურის გვერდით, მარჯვენა მხარეს.
3. ფორმულები და სიმბოლოები იკრიფება Microsoft Eq-ით. თუ ფორმულა ორ სტრიქონს იკავებს, უნდა გაიყოს (რედაქტირების გაადვილების მიზნით).
4. ქვესათაური გამოიყოფა იმავე ზომის Bold შრიფტით. ტექსტი გრძელდება იმავე სტრიქონზე.
5. აბზაცისათვის გამოიყენება Tab.
6. ნახატები, ნახაზები, ცხრილები და სხვა არატექსტური გამოსახულებები წარმოდგენილი უნდა იყოს მაღალი გარჩევადობის ნახატის ტიპის ჩანართებით; უნდა იყოს გადანომრილი. შესაბამისი მითითება გაკეთდება ტექსტში (შინაარსობრივი და ვიზუალური მხარის კორექტირებისათვის). გრაფიკულ გამოსახულებაზე, მაგ. ნახ. 1, წარწერა კეთდება 10 ზომის შრიფტით.
7. ლიტერატურის ციტირება ხდება ქრონოლოგიურად (და არა ავტორის გვარების ალფაბეტის შესაბამისად): სტატიის ბოლოს, შუაში, იწერება – ლიტერატურა, [ ] სიმბოლოში იწერება ნომერი (ასეთივე აღნიშვნა იხმარება ტექსტში), გვარი და ინიციალები, წიგნის, სტატიის (ან ინტერნეტრესურსის მისამართი) სრული ბიბლიოგრაფიული მონაცემები: გამომცემლობა (წიგნის შემთხვევაში), ტომი, ნომერი, გვერდები, წელი. ლიტერატურის მითითება ხდება იმ ენაზე, რომელი წყაროთიც ავტორი სარგებლობდა.
8. ტექსტური ჩანართები გაკეთდეს Tex Box-ის საშუალებით. რომელშიც, ისევე, როგორც მთელ ტექსტში, კიდევები სწორდება მარჯვნივ და მარცხნივ, ფორმატირების საშუალებით.
9. Word ფაილთან ერთად ავტორმა უნდა წარმოადგინოს pdf ფაილიც, რითაც მიაწვდის რედაქტორს სტატიის ვიზუალურ მხარეზე (აქ იგულისხმება, რომ ჩანართებმა არ უნდა დაიკავოს გვერდის მნიშვნელოვანი ნაწილი, ე.ი. ნახატის ტიპის ჩანართები არ უნდა იყოს დიდი ან ბევრი; არ უნდა დარჩეს გვერდზე, ტექსტის გარეშე, ბევრი თავისუფალი ადგილი).
10. გვერდები არ ინომრება.
11. ტექსტში თეორემა, დებულება, განმარტება ან სხვა მნიშვნელოვანი ცნება (ავტორის შეხედულებისამებრ) გამოიყოფა Italic-ით. შრიფტის განსხვავებული ფერი ტექსტში არ იხმარება.
12. თეორემის, დებულების დამტკიცების დაწყება ან დამთავრება რაიმე ნიშნით არ გამოიყოფა.
13. სტატიის ბოლოში, მარჯვენა კუთხეში, 10 ზომის შრიფტით უნდა მიეთითოს ავტორის ელექტრონული მისამართი; კორპორაციული ელექტრონული ფოსტის გამოყენება სავალდებულოა თსუ-ის თანამშრომლებისთვის.

|                         |                     |
|-------------------------|---------------------|
| გამომცემლობის რედაქტორი | მარინე ვარამაშვილი  |
| დამკაბადონებელი         | ლალი კურდღელაშვილი  |
| გარეკანის დიზაინერი     | მარიამ ებრალიძე     |
| გამოცემის მენეჯერი      | მარიკა ერქომაიშვილი |

0128 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 1  
1, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0128  
Tel 995(32) 225 04 84, 6284/6279  
<https://www.tsu.ge/ka/publishing-house>

