

ივანე ჯავახიშვილი სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

დოქტორანტურის საგანმანათლებლო პროგრამა: მათემატიკა

გიორგი გოგნაძე

ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული ჯამის და მათი საშუალოების
ასიმპტოტური წარმოდგენის შესახებ

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თეიმურაზ ახოზაძე
ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი

თბილისი
2024 წელი

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University
Faculty of Exact and Natural Sciences

Doctoral Program: Mathematics

Giorgi Gognadze

On The Asymptotic Representation of Some Trigonometric Sums

The thesis work is performed to obtain a PhD academic degree in
Mathematics

Scientific Supervisor: **Teimuraz Akhobadze**
Doctor of Phy. Math

Tbilisi
2024 Year

აბსტრაქტი

ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების შეჯამებადობის საკითხი მეტად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ფუნქციათა თეორიის მრავალი პრობლემების შესწავლაში; მათდამი ინტერესი განსაკუთრებით გაიზარდა მას შემდეგ, რაც აღმოჩნდა, რომ ჯამებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შეიძლება ყველგან განშლადი იყოს. გასული საუკუნის 40-ანი წლებიდან დაწყებული ინტესიური კვლევა მიმდინარეობს სხვადასხვა სივრცეში ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამების შესაბამისი ფუნქციიდან გადახრის ასიმპტოტური შეფასების შესახებ.

პირველი შედეგი ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციიდან მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამების გადახრის შეფასების შესახებ მიღებული იქნა ლებეგის მიერ 1909 წელს. ლებეგის შედეგი დიდწილად მოიცავს მანამდე მიღებულ შეფასებებს და არ კარგავს თავის მნიშვნელობას დღესაც. ის არის რიგობრივად ზუსტი და მოხერხებულია გამოყენებებში. არსებობს ლებეგის შეფასების მრავალი განზოგადოება. 1935 წელს კოლმოგოროვმა მიიღო ზუსტი ასიმპტოტური შეფასება, როცა განსახილველი ფუნქცია არის შემოსაზღვრული და გააჩნია გარკვეულ რიგამდე წარმოებული. ამ მიმართულებით შემდეგი არსებითი ნაბიჯი გადადგა ნიკოლსკიმ, რომელმაც განაზოგადა კოლმოგოროვის შედეგები. ამასთანავე, მან მიიღო შეფასებები, როცა ფურიეს კერძო ჯამის ნაცვლად განიხილება ფეიერის კერძო ჯამი. კოლმოგოროვისა და ნიკოლსკის მითითებულმა კვლევებმა საფუძველი დაუდო ახალ მიმართულებას ფუნქციათა მიახლოების თეორიაში და ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების შეჯამებადობის თეორიაში, რომელიც ცნობილია კოლმოგოროვისა და ნიკოლსკის ამოცანის სახელით. ის გულისხმობს ასიმპტოტური ტოლობის პოვნას ფუნქციისთვის და მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივით, როდესაც განსახილველი ფუნქცია აკმაყოფილებს გარკვეულ თვისებებს.

60 წლების ბოლოს სტეპანეცის და ძიადიკის მიერ იქნა შემუშავებული მეთოდი, რომელიც ეყრდნობა კორნეიჩუკისა და სტეჩკინის ლემას, და რომლის მეშვეობით ვპოულობთ არამარტო ბირთვის ნულების განლაგებას, (ეს ბირთვები წარმოქმნილია

სხვადასხვა შეჯამებადობის დროს), არამედ ასიმპტოტურ ტოლობასაც. შესაბამისად, გაფართოვდა კორნეუჩუკისა და სტეჟკინის ლემის გამოყენების არეალი და შემუშავდა პროცედურა, რომლის მეშვეობითაც გახდა შესაძლებელი მივიღოთ კოლმოგორვისა და ნიკოლსკის ამოცანის ამოხსნის ახალი გზა. ზოგიერთი ფუნქციათა სივრცის შემთხვევაში ამ ამოცანის ამოხსნა ვერ ხერხდებოდა აქამდე ცნობილი მეთოდობის გამოყენებით.

70 წლების დასაწყისში ტაბერსკიმ განიხილა ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებს გარკვეულ თვისებებს. ასეთი ფუნქციებისთვის მან განსაზღვრა და შეისწავლა განზოგადებული ფურიეს კოეფიციენტები, განზოგადებული ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების, შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივებისა და მათი კერძო ჯამების ფეიერის საშუალოების კრებადობის ზოგიერთი საკითხი; ასევე, მიიღო რიმან-ლებეგის თეორემის ანალოგი, დინი-იანგის ტიპის კრიტერიუმი და სხვა შედეგებიც.

განზოგადებული ჩეზაროს საშუალოები რიცხვითი მწკრივებისთვის პირველად განიხილა კაპლანმა 1960 წელს. ახლობემ და ზვიადაძემ შეადარეს განზოგადებული ჩეზაროს საშუალოები α_n -ის ტერმინებში, და მიიღეს აუცილებელი და საკმარისი პირობები $(C, \alpha_n) \subset (C, \alpha)$ ჩართვისთვის და საკმარისი პირობა $(C, \alpha) \subset (C, \alpha_n)$ -სთვის. ახლობემ და ტეტუნაშვილმა გამოიკვლიეს განზოგადებული ჩეზაროს საშუალოები ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივებისთვის და მიიღეს მთელი რიგი შედეგები.

მოცემულ სადოქტორო ნაშრომში, ნაპოვნია H_ω კლასის ფუნქციების ასიმპტოტური ტოლობები დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალებისათვის. მიღებული შედეგებიდან, როგორც ერთ-ერთი კერძო შემთხვევა, გამომდინარეობს სტეჟანეცის შედეგები. ასევე მიღებულია ფურიეს მწკრივის კრებადობის ლებეგის ნიშანის ანალოგი განზოგადებული ჩეზაროს საშუალოებისათვის.

Abstract

The issue of convergence of Fourier trigonometric series plays a very significant role in the study of many problems in the theory of functions. Interest in them increased especially after it was discovered that the Fourier series of a summable function can diverge everywhere. Since the 1940s, intensive research has been carried out on the asymptotic estimation of the deviation between the corresponding function and the partial sums of the Fourier series in different spaces.

The first result concerning the evaluation of the deviation of the partial sums of the Fourier trigonometric series from an integrable function was obtained by Lebesgue in 1909. Lebesgue's result encompasses to a large extent the estimates obtained earlier and remains significant even today. It is both linearly accurate and convenient to use. There exist many generalizations of the Lebesgue estimate. In 1935, Kolmogorov discovered an exact asymptotic estimate when the function under consideration is bounded and has derivatives up to a certain order. The next significant advancement in this direction was made by Nikolsky, who generalized Kolmogorov's results and obtained estimates for the Fejer sums instead of the Fourier sums. The studies by Kolmogorov and Nikolsky laid the foundation for a new branch in the theory of function approximation and the summability of Fourier trigonometric series, known as the Kolmogorov-Nikolsky problem. This problem involves finding an asymptotic equality between a function and its Fourier trigonometric series when the function satisfies certain properties.

In the late 1960s, a method was developed by Stepanec and Dziadik, based on Kornichuk-Stechkin's lemma, through which not only the arrangement of the zeros of the kernel (obtained by considering different summations) could be found, but also asymptotic equality. Consequently, the use of Kornichuk-Stechkin's lemma was expanded, leading to the development of a procedure that provided a new approach to solving the Kolmogorov-Nikolsky problem. In certain function spaces, it was previously impossible to solve this problem using known methodologies.

In the early 1970s, Taberski explored locally integrable functions that satisfy specific properties. He defined generalized Fourier coefficients, generalized Fourier trigonometric series, and conjugate trigonometric series for such functions. Additionally, Taberski addressed problems related to the summation of Fejer averages of their partial sums. He also derived an analogue of the Riemann-Lebesgue theorem, a Dean-Young type criterion, and other related results.

The concept of generalized Cesàro averages for numerical series was initially introduced by Kaplan in 1960. Akhobadze and Zviadadze conducted a comparison of generalized Cesàro averages using α_n and established necessary and sufficient conditions for the inclusion of $(C, \alpha_n) \subset (C, \alpha)$, along with a sufficient condition for $(C, \alpha) \subset (C, \alpha_n)$. Subsequently, Akhobadze and Tetunashvili investigated generalized Cesàro averages for trigonometric Fourier series, yielding several results.

In this doctoral dissertation, asymptotic equations for class functions H_ω in generalized Dirichlet integrals are derived. It is worth noting that Stepanets' results are obtained as a special case of the results presented here. Additionally, the Lebesgue criterion for the convergence of Fourier series for generalized Cesàro means is established.

შინაარსი

აბსტრაქტი.....	3
Abstract.....	5
შესავალი	8
თავი I: განზოგადებული დირიხლეს ინტეგრალების ასიმპტოტური წარმოდგენები	16
1.1 განზოგადებული ფურიეს კოეფიციენტის ასიმპტოტური წარმოდგენა.....	16
1.1.1 განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე დებულებები	16
1.1.2 ძირითადი შედეგების ფორმულირება.....	19
1.1.3 ძირითადი შედეგის დამტკიცება.....	20
1.2 განზოგადებული დირიხლეს გულის ასიმპტოტური წარმოდგენა.....	32
1.2.1 განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე დებულებები	32
1.2.2 ძირითადი შედეგის ჩამოყალიბება.....	42
1.2.3 ძირითადი შედეგის დამტკიცება.....	43
თავი II: განზოგადებული ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების ჩეზაროს აზრით შეჯამებადობა.....	63
2.1 ლებეგის კრებადობის ნიშანი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის (C, α_n) , $-1 < \alpha_n < 1$, შეჯამებადობისთვის.....	63
2.1.1 განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე დებულებები	63
2.1.2 ძირითადი შედეგის ჩამოყალიბება.....	71
2.1.3 ძირითადი შედეგის დამტკიცება.....	72
დასკვნა	79
ლიტერატურა.....	80
გამოქვეყნებული ნაშრომები	85

შესავალი

ვთქვათ, f უწყვეტი და 2π - პერიოდული ფუნქციაა და

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივია, ხოლო

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt,$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt,$$

f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია. $S_n(f; x)$ -ით აღვნიშნოთ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის n -ური კერძო ჯამი, ანუ

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

პირველი შედეგი, ლებეგის აზრით ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციიდან მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამების გადახრის შეფასების შესახებ, მიღებული იქნა ლებეგის [20] მიერ 1909 წელს. მან დაამტკიცა, რომ

$$(1) \quad \rho_n(f; x) \stackrel{\text{def}}{=} |f(x) - S_n(f; x)| \leq (\ln n + 3) E_n(f),$$

სადაც $E_n(f)$ არის f ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება თანაბარი მეტრიკით T_n ტრიგონომეტრიული პოლინომებით, რომელთა რიგი არ აღემატება n -ს :

$$E_n(f) = \inf_{T_n} \|f(\cdot) - T_n(\cdot)\|_{C_{2\pi}} = \inf_{T_n} \max_x |f(\cdot) - T_n(\cdot)|.$$

ამ მიმართულებით ასევე აღსანიშნავია ჯეკსონის (იხილე მაგალითად [17]) დებულებები, რომლებიც ეხება $E_n(f)$ -ით შეფასებებს. ლებეგის მოტანილი შედეგი დიდწილად შეიცავს მანამდე მიღებულ შესაბამის შედეგებს $\rho_n(f; x)$ სიდიდის შეფასების შესახებ და არ კარგავს თავის მნიშვნელობას დღესაც. ის არის რიგობრივად ზუსტი და მოხერხებულია გამოყენებებში. არსებობს ლებეგის შეფასების მრავალი განზოგადოება, მათ შორის ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას: თუ f ფუნქციას აქვს შემოსაზღვრული, დაუშვათ 1-ით, r რიგის წარმოებული, მაშინ

$$E_n(f) < \frac{\pi}{2n^r},$$

ამასთან (1)-დან მივიღებთ

$$\rho_n(f; x) < \frac{\pi(\ln n + 3)}{2n^r}.$$

1935 წელს კოლმოგოროვმა [15] განიხილა სიდიდე

$$\varepsilon(W^r; S_n) = \sup_{f \in W^r} \|f(\cdot) - S_n(f; \cdot)\|_{C_{2\pi}},$$

სადაც W^r არის 2π -პერიოდული ისეთი f ფუნქციათა კლასი, რომელსაც გააჩნია r რიგის წარმოებული $f^{(r)}(x)$, $r \in \mathbb{N}$, და თ.ყ. $|f^{(r)}(x)| \leq 1$. მან $\varepsilon(W^r; S_n)$ -სთვის იპოვა ზუსტი ასიმპტოტური შეფასება:

$$\varepsilon(W^r; S_n) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

ამ მიმართულებით შემდეგი არსებითი ნაბიჯი, ეკუთვნის ნიკოლსკის [25-31], რომელმაც განაზოგადა ეს შედეგები $W^r H^\alpha$ კლასებზე ($W^r H^\alpha$ კლასი შეიცავს 2π -პერიოდულ f ფუნქციებს, რომლებსაც აქვს r რიგის უწყვეტი წარმოებულები, ამასთანავე, $|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x')| \leq |x - x'|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.)

კერძოდ, მან დაადგინა, რომ ნებისმიერი $r \geq 0$ და $0 < \alpha \leq 1$ რიცხებისათვის, მართებულია წარმოდგენა

$$\varepsilon(W^r H^\alpha, S_n) = \frac{2^{1+\alpha} \ln n}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

ამის გარდა, ნიკოლსკიმ მიიღო ანალოგიური შეფასება, ჩეზაროს $\sigma_n(f; x)$ საშუალოებისთვის.

მოგვიანებით კორნეიჩუკმა [8] დაამტკიცა დებულება, რომელსაც უწოდებენ კორნეიჩუკი-სტეჟკინის ლემას. მან მიიღო შემდეგი სიდიდის შეფასება:

$$(2) \quad \delta(H_\omega[a, b]; \psi) = \sup_{f \in H_\omega[a, b]} \left| \int_a^b f(t) \psi(t) dt \right|,$$

სადაც $H_\omega[a, b]$ ისეთი f ფუნქციათა კლასია, რომელებიც $[a, b]$ -ზე აკმაყოფილებს პირობას

$$|f(x) - f(x')| \leq \omega(|x - x'|);$$

$\omega(t)$ ფიქსირებული უწყვეტობის მოდულია, ხოლო $\psi(t)$ ჯამეზადი ფუნქციაა, რომლის $[a, b]$ -ზე აღებული საშუალო მნიშვნელობა 0-ის ტოლია. ამასთან, ის თ.ყ. ინარჩუნებს ნიშანს, მაგალითად, (a, c) -ზე და (c, b) -ზე, $a < c < b$. (2) გამოსახულების შეფასება, როცა $\omega(t)$ ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, არის ზუსტი, თანაც მოიცემა ცხადი სახით.

კორნეიჩუკი-სტეჟკინის ლემაზე დაყრდნობით სტეჟანეცმა მიიღო მთელი რიგი მნიშვნელოვანი დებულება. მოვიტანოთ ზოგიერთი მათგანი.

თეორემა 1. (სტეჟანეცი [36, თავი I, §4]) ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულისთვის მართებულია შეფასება:

$$(3) \quad \sup_{f \in H_\omega} |a_n| = \sup_{f \in H_\omega} |b_n| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt.$$

თუ $\omega(t)$ ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ (3)-ში მიიღწევა ტოლობა.

თეორემა 2. (ნიკოლსკი [25], სტეჟანეცი [36, თავი II, §5]) ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულისთვის მართებულია შეფასება:

$$(4) \quad \varepsilon(H_\omega; S_n) \leq \frac{2}{\pi^2} \ln n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right) \sin t dt + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

თუ $\omega(t)$ ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ (4)-ში მიიღწევა ტოლობა.

თეორემა 3. (სტეპანევი [36 თავი II, §5]) ნებისმიერი $\omega = \omega(t)$ უწყვეტობის მოდულისათვის მართებულია ასიმპტოტური ტოლობა:

$$\varepsilon(H_\omega, S_n) = \frac{2s_n}{\pi^2} \ln n + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

სადაც

$$s_n = \sup_{f \in H_\omega \left[\frac{\pi}{2n+1}, \frac{\pi}{2n+1} \right]} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{2t}{2n+1}\right) \sin t dt \right|.$$

თეორემა 4. (სტეპანევი [36 თავი II, §5]) ნებისმიერი $\omega = \omega(t)$ უწყვეტობის მოდულისთვის სამართლიანია ასიმპტოტური ტოლობა:

$$\varepsilon(H_\omega, S_n) = \Theta_\omega \frac{2}{\pi^2} \ln n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right) \sin t dt + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\frac{2}{3} \leq \Theta_\omega \leq 1,$$

ამასთანავე, $\Theta_\omega = 1$, თუ $\omega(t)$ ამოზნექილი ფუნქციაა.

1974 ტაბერსკიმ განიხილა [37] შემდეგი სახის ჯამი

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^l \cos kx + b_k^l \sin kx,$$

სადაც

$$a_k^l = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt,$$

$$b_k^l = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt$$

და $x \in (-\infty, \infty)$, $l > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, ამასთან, f არის ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია. უკანასკნელი ჯამი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახის დირიხლეს ინტეგრალით

$$S_n^l(f; x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) D_n^l(u-x) du,$$

სადაც

$$D_n^l(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi t}{l} = \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi}{2l}}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}}$$

არის დირიხლეს მოდიფიცირებული გული.

შევნიშნოთ, რომ თუ f არის ლოკალურად ინტეგრებადი 2π -პერიოდული ფუნქცია და $l = \pi$, მაშინ $S_n^l(f; x)$ ემთხვევა ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამს.

ვთქვათ, მოცემულია $s_0, s_1, \dots$ მიმდევრობა. ვიტყვი, რომ $s_0, s_1, \dots$ მიმდევრობა (ან მწკრივი $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$, რომლის კერძო ჯამები არის $s_0, s_1, \dots$) (C, α_n) შეჯამებადია s -სკენ, თუ

$$\sigma_n^{\alpha_n} \rightarrow s, \text{ როცა } n \rightarrow \infty,$$

სადაც

$$\sigma_n^{\alpha_n}(x) = \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha_n-1} S_k(x),$$

α_n ნებისმიერი მიმდევრობაა, რომლისთვისაც $\alpha_n > -1$, და $S_k(x)$ არის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის k -ური კერძო ჯამი, ამასთან,

$$A_n^{\alpha_n} = \frac{(\alpha_n + 1) + \dots + (\alpha_n + n)}{n!}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა α_n მუდმივი მიმდევრობაა: $\alpha_n = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, მაშინ $\sigma_n^{\alpha_n} = \sigma_n^\alpha$ არის ჩვეულებრივი ჩეზაროს საშუალოები.

ერთ-ერთი მეთოდი ფურიეს ტროგონომეტრიული მწკრივის წერტილოვანი კრებადობის შესამოწმებლად ეკუთვნის ლებეგს [19].

თეორემა 5. (ლებეგი) ვთქვათ, f არის 2π პერიოდული ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია და x წერტილში აკმაყოფილებს პირობებს:

$$(5) \quad h^{-1} \int_0^h |\varphi(x, t)| dt = o(1),$$

$$(6) \quad \int_0^h t^{-1} |\varphi(x, t) - \varphi(x, t+h)| dt = o(1), h \rightarrow +0,$$

სადაც

$$\varphi(x, t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

მაშინ ფურიეს ტროგონომეტრიული მწკრივი კრებადია x წერტილში.

1930 წელს გერგენმა [13] გაუმჯობესა ლებეგის შედეგი, კერძოდ, მან მიიღო შემდეგი

თეორემა 6. (გერგენმი) ვთქვათ,

$$\Phi(x, t) = \int_0^t \varphi(x, u) du.$$

თუ $f \in L([0, 2\pi])$ და x წერტილში აკმაყოფილებს (6) პირობას და

$$(7) \quad h^{-1} \Phi(x, h) = o(1), h \rightarrow +0$$

პირობებს, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს ტროგონომეტრიული მწკრივი კრებადია x წერტილში.

1981 წელს საჰნიმ და უოტერმანმა [32] დაამტკიცეს

თეორემა 7. (საჰნი, უოტერმანი) ვთქვათ, $-1 < \alpha < 0$, სრულდება (5) პირობა და

$$\int_{\eta}^{\pi} t^{-1-\alpha} |\varphi(x, t) - \varphi(x, t + \eta)| dt = o(n^{\alpha}), \quad \eta = \frac{\pi}{n + \frac{\alpha+1}{2}} \rightarrow 0,$$

ამასთანავე,

$$(8) \quad \Phi(x, \pi) - \Phi(x, \pi - h) = o(h^{-\alpha}), \quad h \rightarrow +0,$$

მაშინ ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი (C, α) შეჯამებადია x წერტილში.

1964 წელს ჟიჟიაშვილს ([49]; იხილე აგრეთვე [50, თეორემა 2.2.1]), მიღებული ჰქონდა უფრო ძლიერი შედეგი, ვიდრე არის თეორემა 7. კერძოდ, მან დაამტკიცა, რომ პირობა (8) არ არის აუცილებელი.

თეორემა 8. (ჟიჟიაშვილი) ვთქვათ, $-1 < \alpha < 1$, სრულდება (7) და

$$(9) \quad h^{\alpha} \int_h^{\pi} t^{-1-\alpha} |\varphi(x, t) - \varphi(x, t + h)| dt = o(1), \quad h \rightarrow +0,$$

მაშინ, f ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი (C, α) შეჯამებადია x წერტილში.

ზემოთ ნახსენები კოლმოგოროვისა და ნიკოლსკის კვლევებმა საფუძველი დაუდო ახალ მიმართულებას ფუნქციათა მიახლოების თეორიაში და ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების შეჯამებადობის თეორიაში, რომელიც ცნობილია კოლმოგოროვისა და ნიკოლსკის ამოცანის სახელით. ის გულისხმობს ასიმპტოტური ტოლობის პოვნას ფუნქციისა მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივით, როცა განსახილველი ფუნქცია აკმაყოფილებს გარკვეულ თვისებებს. ამ ამოცანის კვლევა, სხვადასხვა ფუნქციათა სივრცეების შემთხვევაში, დღესაც აქტუალურია. მას გააჩნია მდიდარი ისტორია და მიემდვნა მრავალი შრომა, მათ შორისაა: ნადნი [21-24], სტეჟკინი [33-34], ტელიაკოვსკი [38-42], ნიკოლსკი [25-31], ეფიმოვი [10-12], კორნეიჩუკი [17, 18], სტეპანევი [7, 8, 36], მიაძიკი [7, 8] ზვიადაძე [51] და მრავალი სხვა.

დისერტაციის პირველ თავში განხილულია H_{ω} კლასის ფუნქციები და ამ ფუნქციებისათვის მიღებულია 1-4 თეორემების ანალოგები ტაბერსკის მიერ შემოღებული დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალისათვის. აღნიშნული თეორემების დამტკიცება ეფუძნება კორნეიჩუკ-სტეჟკის ლემას. აღსანიშნავია, რომ

მიღებული შედეგებიდან, როგორც ერთ-ერთი კერძო შემთვევა, გამომდინარეობს სტეპანეცის 1-4 თეორემები.

შეჯამებადობა (C, α_n) მეთოდი რიცხვითი მწკრივებისთვის პირველად განიხილა კაპლანმა [14] 1960 წელს. ახოზაძემ და ზვიადზემ [6] შეადარეს (C, α_n) და (C, α) მეთოდების კრებადობა და მიიღეს α_n -ის ტერმინებში აუცილებელი და საკმარისი პირობები $(C, \alpha_n) \subset (C, \alpha)$ ჩართვისთვის და საკმარისი პირობა $(C, \alpha) \subset (C, \alpha_n)$ ჩართვისთვის. ახოზაძემ [1-5] და ტეტუნაშვილმა [43-48] გამოიკვლიეს (C, α_n) საშუალოების კრებადობა ფურიეს ტრიგონომეტრიული ჯამისთვის.

დისერტაციის მეორე თავში განხილილია (C, α_n) შეჯამებადობის ის საკითხი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივებისთვის. მიღებულია თეორემა 8-ის ანალოგი განზოგადებული ჩეზაროს საშუალოებისათვის. აღნიშნული თეორემა წარმოადგენს ფურიეს მწკრივის კრებადობის ლებეგის ნიშანის (თეორემა 5) განზოგადებას (C, α_n) შეჯამებადობისათვის.

დისერტაციის ძირითადი დებულების დასამტკიცებლად გამოყენებული იქნება: ჰარმონიული ანალიზის, ფუნქციათა თეორიის და ფუნქციონალური ანალიზის მეთოდები.

თავი I: განზოგადებული დირიხლეს ინტეგრალების ასიმპტოტური წარმოდგენები

დისერტაციის პირველ თავში განხილულია H_ω კლასის ფუნქციები და ამ ფუნქციებისათვის მიღებულია 1-4 თეორემების ანალოგები ტაბერსკის მიერ შემოღებული დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალებისათვის.

1.1 განზოგადებული ფურიეს კოეფიციენტის ასიმპტოტური წარმოდგენა

1.1.1 განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე დებულებები

განსაზღვრება 1.1 ვთქვათ, მოცემულია f ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია $[a, b]$ -ზე, მაშინ ამ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული აღინიშნება ასე $\omega(t) = \omega(f; t)$. ის განსაზღვრულია $[0, b-a]$ -ზე, და მოიცემა ტოლობებით:

$$\omega(t) = \omega(f; t) = \sup_{0 \leq h \leq t} \max_{a \leq x \leq b-h} |f(x+h) - f(x)| = \sup_{\substack{|x' - x''| \leq t, \\ x', x'' \in [a, b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

განსაზღვრება 1.2 ვთქვათ, $\omega = \omega(t)$ ფიქსირებული უწყვეტობის მოდულია. ვიტყვი, რომ f ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $[a, b]$ -ზე, ეკუთვნის $H_\omega[a, b]$ კლასს, თუ ნებისმიერი $t_1, t_2 \in [a, b]$ რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \omega(|t_1 - t_2|).$$

განსაზღვრება 1.3 ვიტყვი, რომ $\omega(t)$ არის ამოზნექილი უწყვეტობის მოდული $[0, b-a]$ -ზე, თუ ნებისმიერი $t_1, t_2 \in [0, b-a]$ რიცხვებისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$\omega\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(\omega(t_1) + \omega(t_2)).$$

ვთქვათ, ნებისმიერ $[a, b]$ მონაკვეთზე მოცემულია წერტილი c , $a < c < b$, და ჯამებადი ψ ფუნქცია, რომლისთვისაც თითქმის ყველგან (a, c) -ზე $\psi(x) > 0$ ($\psi(x) < 0$), ხოლო თითქმის ყველგან (c, b) -ზე $\psi(x) < 0$ ($\psi(x) > 0$) და $\int_a^b \psi(x) dx = 0$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ψ ფუნქცია ეკუთვნის $V_{a,b}^c$ კლასს და დავწერთ $\psi \in V_{a,b}^c$.

დავუშვათ, რომ

$$\delta_\omega(\psi) = \delta_\omega(\psi; H_\omega[a, b]) = \sup_{f \in H_\omega[a, b]} \left| \int_a^b f(x) \psi(x) dx \right|,$$

სადაც $\psi \in V_{a,b}^c$.

თეორემა 1.4 (კორნეიჩუკი [17]) ვთქვათ, $\omega = \omega(t)$ ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ

$$(1.1) \quad \delta_\omega(\psi) \leq \int_a^c |\psi(t)| \omega(\rho(t) - t) dt = \int_c^b |\psi(t)| \omega(t - \rho^{-1}(t)) dt,$$

სადაც ρ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a, c]$ -ზე შემდეგი ტოლობით:

$$\Psi(x) = \Psi(\rho(x)), \quad a \leq x \leq c \leq \rho(x) \leq b, \quad \Psi(x) = \int_a^x \psi(t) dt,$$

სადაც ρ^{-1} არის ρ ფუნქციის შებენი ფუნქცია. თუ ω ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ (1.1)-ის მარჯვენა მხარეში მიიღწევა ტოლობა, ამასთანავე, ამ შემთხვევაში ზუსტ ზედა საზღვარს აღწევს ისეთი ფუნქციისათვის $H_\omega[a, b]$ კლასიდან, რომელსაც აქვს სახე $K \pm f_0(x)$, სადაც K მუდმივია, ხოლო

$$(1.2) \quad f_0(x) = \begin{cases} -\int_a^x \omega'(\rho(t) - t) dt, & \text{if } x \in [a, c], \\ \int_c^x \omega'(t - \rho^{-1}(t)) dt, & \text{if } x \in [c, b]. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში $\delta_\omega(\psi)$ სიდიდე შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\delta_{\omega}(\psi) = \int_0^{b-a} \bar{\psi}(t) \omega'(t) dt,$$

სადაც $\bar{\psi}(t)$ არის $|\psi(t)|$ ფუნქციის კლებადი გადანაცვლება (იხ. მაგალითად [36] გვ. 18).

შედეგი 1.5 ვთქვათ, $\omega = \omega(t)$ ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულია, $\psi(t) \in V_{a,b}^c$,
 $c = \frac{a+b}{2}$ და $\psi(t) = -\psi(2c-t)$, მაშინ

$$(1.3) \quad \delta_{\omega}(\psi) \leq \int_a^c |\psi(t)| \omega(2(c-t)) dt = \int_c^b |\psi(t)| \omega(2(t-c)) dt.$$

თუ ω ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ (1.3)-ის მარჯვენა მხარეში მიიღწევა ტოლობა, და, ამასთანავე, ზუსტ ზედა საზღვარს აღწევს ისეთი ფუნქციისათვის $H_{\omega}[a,b]$ კლასიდან, რომელსაც აქვს სახე $K \pm f_*(x)$, სადაც K მუდმივია, ხოლო

$$f_*(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \omega(2(c-x)), & x \in [a, c], \\ \frac{1}{2} \omega(2(x-c)), & x \in [c, b]. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში $\delta_{\omega}(\psi)$ სიდიდე შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\delta_{\omega}(\psi) = \int_0^{b-a} \bar{\psi}(t) \omega'(t) dt.$$

1.1.2 ძირითადი შედეგების ფორმულირება

თეორემა 1.6 ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულისთვის $\omega = \omega(t)$ მართებულია შემოკლება:

$$\sup_{f \in H_\omega} |a_n^f| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2l}{\pi n} t\right) dt.$$

ამასთანავე, თუ ω არის შემოსაზღვრული, მაშინ

$$\sup_{f \in H_\omega} |b_n^f| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2l}{\pi n} t\right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

იმ შემთხვევაში, როცა ω არის ამოზნექილი უწყვეტობის მოდული, მაშინ ზედა ორ გამოსახულებაში მიიღწევა ტოლობა.

1.1.3 ძირითადი შედეგის დამტკიცება

განვიხილოთ

$$\sup_{f \in H_\omega} |a_n^l| = \sup_{f \in H_\omega} \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \right|.$$

ვინაიდან ნებისმიერი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგოთ როგორც ამავე ფუნქციის ლუწი და კეტი ნაწილების ჯამად,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

სადაც

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას $a_k^l(f_2) = 0$, მაშინ

$$\begin{aligned} \sup_{f \in H_\omega} |a_n^l| &= \\ &= \sup_{f \in H_\omega} \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f_1(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \right| = \\ &= \sup_{f \in H_{\omega,r}} \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f_1(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \right| = \\ &= \sup_{f \in H_{\omega,r}} \frac{2}{l} \left| \int_0^l f_1(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \right| =: e_n^l, \end{aligned}$$

სადაც $H_{\omega,r}$ არის H_ω -ის ქვესიმრავლე და შეიცავს მხოლოდ ლუწ ფუნქციებს. ამრიგად გვაქვს,

$$e_n^l \leq \frac{2}{l} \sum_{i=0}^{r-1} \sup_f \left| \int_{\frac{il}{n}}^{\frac{(i+1)l}{n}} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \right| = \frac{2}{l} \sum_{i=0}^{r-1} e_{n,l}^{(i)}.$$

$e_{n,l}^{(i)}$ -ის $i=0, \dots, n-1$ შესავსებლად გამოვიყენებთ კორნიჩუკის თეორემის შედეგს (1.1),

როცა

$$a_i = \frac{il}{n}, \quad b_i = \frac{(i+1)l}{n}, \quad c_i = \frac{(2i+1)l}{2n}, \quad \psi(t) = \cos \frac{n\pi t}{l}, \quad i=0, \dots, n-1$$

და ამასთანავე $\psi(t) = -\psi(2c_i - t)$. მართლაც,

$$\begin{aligned} -\psi(2c_i - t) &= -\cos \left[\frac{n\pi}{l} \left(2 \frac{(2i+1)l}{2n} \right) - t \right] = \\ &= -\cos \left[\pi(2i+1) - \frac{n\pi t}{l} \right] = \cos \frac{n\pi t}{l}. \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$e_{n,l}^{(i)} \leq \int_{\frac{il}{n}}^{\frac{(2i+1)l}{2n}} \left| \cos \frac{n\pi t}{l} \right| \omega \left(2 \left(\frac{2i+1}{2n} l - t \right) \right) dt.$$

ცვლადის გარდაქმნით $\frac{2i+1}{2n} l - t = x$ გვექნება

$$\begin{aligned} & - \int_{\frac{il}{2n}}^0 \left| \cos \frac{n\pi}{l} \left(\frac{2i+1}{2n} l - x \right) \right| \omega(2x) dx = \\ &= \int_0^{\frac{l}{2n}} \sin \frac{n\pi t}{l} \omega(2t) dt = \\ &= \frac{l}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{2lt}{n\pi} \right) dt. \end{aligned}$$

ამრიგად, გვაქვს

$$e_n^l \leq \frac{2}{l} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{l}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{2lt}{n\pi} \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{l} \frac{l}{n\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2lt}{n\pi}\right) dt = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2lt}{n\pi}\right) dt.
\end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\sup_{f \in H_\omega} |a_n^l| = e_n^l \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2lt}{n\pi}\right) dt.$$

ვაჩვენოთ, რომ ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულის შემთხვევაში უკანასკნელი უტოლობა შეიძლება შეიცვალოს ტოლობით. ამ მიზნით ყოველი ფიქსირებული i -სათვის $\left[\frac{il}{n}, \frac{i+1}{n}l\right]$ ავაგოთ შემდეგი ფუნქცია

$$\phi_i^l(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \omega\left(2\left(\frac{2i+1}{2n}l - x\right)\right), & x \in \left(\frac{il}{n}, \frac{2i+1}{2n}l\right] \\ \frac{1}{2} \omega\left(2\left(x - \frac{2i+1}{2n}l\right)\right), & x \in \left(\frac{2i+1}{2n}l, \frac{i+1}{n}l\right]. \end{cases}$$

ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\frac{i}{n}l}^{\frac{i+1}{n}l} \phi_i^l(x) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \right| = \\
&= \left| - \int_{\frac{i}{n}l}^{\frac{2i+1}{2n}l} \frac{1}{2} \omega\left(2\left(\frac{2i+1}{2n}l - x\right)\right) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{2i+1}{2n}l}^{\frac{i+1}{n}l} \frac{1}{2} \omega\left(2\left(x - \frac{2i+1}{2n}l\right)\right) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right|.
\end{aligned}$$

პირველი შესაკრებში ცვლადის $\frac{2i+1}{2n}l - x = t$ გარდაქმნით დავასკვნით:

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{l}{2n}}^0 \frac{1}{2} \omega(2t) \cos \frac{n\pi}{l} \left(\frac{2i+1}{2n} l - t \right) dt = \\
& = \int_{\frac{l}{2n}}^0 \frac{1}{2} \omega(2t) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2i+1) - \frac{n\pi}{l} t \right] dt.
\end{aligned}$$

მე-2 შესაკრებში ცვლადის $x - \frac{2i+1}{2n} l = t$ გარდაქმნით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{2i+1}{2n} l}^{\frac{i+1}{n} l} \frac{1}{2} \omega \left(2 \left(x - \frac{2i+1}{2n} l \right) \right) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\
& = \int_0^{\frac{l}{2n}} \frac{1}{2} \omega(2t) \cos \frac{n\pi}{l} \left(t + \frac{2i+1}{2n} l \right) dt = \\
& = \int_0^{\frac{l}{2n}} \frac{1}{2} \omega(2t) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2i+1) + \frac{n\pi}{l} t \right] dt
\end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\frac{i}{n} l}^{\frac{i+1}{n} l} \phi_i'(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right| = \\
& = \left| - \int_{\frac{i}{n} l}^{\frac{2i+1}{2n} l} \frac{1}{2} \omega \left(2 \left(\frac{2i+1}{2n} l - x \right) \right) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{2i+1}{2n} l}^{\frac{i+1}{n} l} \frac{1}{2} \omega \left(2 \left(x - \frac{2i+1}{2n} l \right) \right) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right| = \\
& = \left| \int_{\frac{l}{2n}}^0 \frac{1}{2} \omega(2t) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2i+1) - \frac{n\pi}{l} t \right] dt + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{\frac{l}{2n}} \frac{1}{2} \omega(2t) \cos \left[\frac{\pi}{2} (2i+1) + \frac{n\pi}{l} t \right] dt \right| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^{\frac{l}{2p}} \frac{1}{2} \omega(2t) \left(\cos \left[\frac{\pi}{2} (2i+1) - \frac{n\pi}{l} t \right] - \cos \left[\frac{\pi}{2} (2i+1) + \frac{n\pi}{l} t \right] \right) dt \right| = \\
&= \left| \int_0^{\frac{l}{2p}} \frac{1}{2} \omega(2t) \sin \frac{n\pi}{l} t \sin \frac{\pi}{2} (2i+1) dt \right| = \\
&= \int_0^{\frac{l}{2p}} \omega(2t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt = \\
&= \frac{l}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega \left(\frac{2l}{n\pi} t \right) \sin t dt.
\end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\left| \int_{\frac{l}{n}}^{\frac{i+1}{n}l} \phi_i^l(x) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \right| = \frac{l}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega \left(\frac{2l}{n\pi} t \right) \sin t dt.$$

ვთქვათ,

$$f^*(x) = (-1)^{i+1} \phi_i^l(x), \text{ როცა } x \in \left[\frac{il}{n}, \frac{i+1}{n}l \right], \quad i = \overline{0, n-1}.$$

ამასთანავე შევნიშნოთ, რომ $f^*(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$ არის დადებითი ყოველი $i = \overline{0, n-1}$ -თვის.

ამიტომ

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2}{l} \int_0^l f^*(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \right| = \\
&= \frac{2}{l} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \int_{\frac{il}{n}}^{\frac{i+1}{n}l} \phi_i^l(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt = \\
&= \frac{2}{l} \frac{l}{n\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega \left(\frac{2l}{n\pi} t \right) \sin t dt = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{2lt}{n\pi} \right) dt
\end{aligned}$$

და $f^*(x) \in H_\omega$. მაშასადამე,

$$\sup_{f \in H_\omega} |a_n^l(f)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2lt}{n\pi}\right) dt$$

და, როცა $\omega(t)$ ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ ტოლობას აქვს ადგილი.

განვიხილოთ

$$\sup_{f \in H_\omega} |b_n^l| = \sup_{f \in H_\omega} \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right|.$$

ვინაიდან ნებისმიერი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგოთ როგორც ამავე ფუნქციის ლუწ და კეტი ნაწილების ჯამად,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

სადაც

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ რომ $b_k^l(f_1) = 0$, მაშინ

$$\begin{aligned} \sup_{f \in H_\omega} |b_n^l| &= \\ &= \sup_{f \in H_\omega} \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right| = \\ &= \sup_{f \in H_\omega} \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f_1(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt + \int_{-l}^l f_2(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right| = \\ &= \sup_{f \in H_\omega} \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f_2(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right| = \\ &= \sup_{f \in H_{\omega, \text{odd}}} \frac{2}{l} \left| \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in H_{\omega, \text{odd}}} |I(f)|, \end{aligned}$$

სადაც $H_{\omega, \text{odd}}$ არის H_ω -ის ქვესიმრავლე და შეიცავს მხოლოდ კენტ ფუნქციებს.

განვიხილოთ, შემდეგი ფუნქცია

$$s(t) = \begin{cases} \sin \frac{n\pi t}{l}, & t \in \left[\frac{l}{2n}, l - \frac{l}{2n} \right] \\ 0, & t \in \left[0, \frac{l}{2n} \right] \cup \left[l - \frac{l}{2n}, l \right], \end{cases}$$

მაშინ ნებისმიერი კენტი, თანაბრად უწყვეტი, შემოსაზღვრული f ფუნქციისათვის

$$\begin{aligned} & \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt = \\ & = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) s(t) dt + \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2n}} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt + \frac{2}{l} \int_{\frac{l(2n-1)}{2n}}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt. \end{aligned}$$

შევაფასოთ, ბოლო ორი წევრი და გავითვალისწინოთ, რომ f ფუნქცია არის კენტი (ამიტომ $f(0)=0$).

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2n}} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right| \leq \\ & \leq \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2n}} |f(t)| dt = \\ & = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2n}} |f(t) - f(0)| dt \leq \\ & \leq \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2n}} \omega(t) dt = \\ & \leq \frac{1}{n} \omega\left(\frac{l}{2n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

განვიხილოთ ბოლო შესაკრები

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{l} \int_{\frac{l(2n-1)}{2n}}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right| \leq \\ & \leq \frac{2}{l} \int_{\frac{l(2n-1)}{2n}}^l |f(t) - f(0)| dt \leq \\ & \leq \frac{2}{l} \int_{\frac{l(2n-1)}{2n}}^l \omega(t) dt \leq \\ & \leq \frac{1}{n} \omega(l) = O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$I(f) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) s(t) dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in H_{\vartheta, \text{odd}}} |I(f)| = \\ &= \sup_{f \in H_{\vartheta, \text{odd}}} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) s(t) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \\ &\leq \sup_{f \in H_{\vartheta, \text{odd}}} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) s(t) dt \right| + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{2}{l} \sum_{i=0}^{n-2} \sup_{f \in H_{\vartheta, \text{odd}}} \left| \int_{(2i+1)\frac{l}{2n}}^{(2i+3)\frac{l}{2n}} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right| + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$e_{n,l}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in H_{\vartheta, \text{odd}}} \left| \int_{(2i+1)\frac{l}{2n}}^{(2i+3)\frac{l}{2n}} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right|.$$

უკანასკნელის შესაფასებლად გამოვიყენებთ კორნეიჩუკის თორემის შედეგს, როცა

$$\psi(t) = \sin \frac{n\pi t}{l}, \quad a_i = (2i+1)\frac{l}{2n}, \quad b_i = (2i+3)\frac{l}{2n}, \quad c_i = (i+1)\frac{l}{n}, \quad i = 0, \dots, n-2.$$

ამასთნავე, $\psi(t) = -\psi(2c_i - t)$. მართლაც,

$$\begin{aligned} & -\psi(2c_i - t) = \\ &= -\sin \left[\frac{n\pi}{l} \left(2\frac{(i+1)l}{n} - t \right) \right] = \\ &= -\sin \left[2\pi(i+1) - \frac{n\pi t}{l} \right] = \sin \frac{n\pi t}{l}. \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$e_{n,l}^{(i)} \leq \int_{(2i+1)\frac{l}{2n}}^{(i+1)\frac{l}{n}} \left| \sin \frac{n\pi t}{l} \right| \omega \left(2 \left((i+1)\frac{l}{n} - t \right) \right) dt.$$

ცვლადის $(i+1)\frac{l}{n}-t=y$ გარდაქმნით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
& \int_{(2i+1)\frac{l}{2n}}^{(i+1)\frac{l}{n}} \left| \sin \frac{n\pi t}{l} \right| \omega \left(2 \left((i+1)\frac{l}{n} - t \right) \right) dt = \\
& = - \int_{\frac{l}{2n}}^0 \left| \sin \left(\pi(i+1) - \frac{n\pi}{l} t \right) \right| \omega(2t) dt = \\
& = - \int_{\frac{l}{2n}}^0 \left| \sin \frac{n\pi}{l} t \right| \omega(2t) dt = \\
& = \int_0^{\frac{l}{2n}} \sin \frac{n\pi}{l} t \omega(2t) dt = \\
& = \frac{l}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{2lt}{n\pi} \right) dt.
\end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{l} \sum_{i=0}^{n-2} \sup_{f \in H_{\omega, \text{odd}}} \left| \int_{(2i+1)\frac{l}{2n}}^{(2i+3)\frac{l}{2n}} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right| + O\left(\frac{1}{n}\right) \leq \\
& \leq \frac{2}{l} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{l}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{2lt}{n\pi} \right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\
& = \frac{2}{l} \frac{l(n-1)}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{2lt}{n\pi} \right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\
& = \frac{n-1}{n} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{2lt}{n\pi} \right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\
& = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{2lt}{n\pi} \right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \leq \\
& \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{2lt}{n\pi} \right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\sup_{f \in H_\omega} |b_n^l| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2lt}{n\pi}\right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$\phi_i^l(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \omega(2x), & x \in \left[0, \frac{l}{2n}\right] \\ -\frac{1}{2} \omega\left(2\left(\frac{i+1}{n}l - x\right)\right), & x \in \left[\frac{2i+1}{2n}l, \frac{i+1}{n}l\right] \\ \frac{1}{2} \omega\left(2\left(x - \frac{i+1}{n}l\right)\right), & x \in \left[\frac{i+1}{n}l, \frac{2i+3}{2n}l\right] \\ \frac{1}{2} \omega(2(l-x)), & x \in \left[l - \frac{l}{2n}, l\right] \end{cases}, \quad i = \overline{0, n-2}.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\left| \int_{\frac{(2i+1)l}{2n}}^{\frac{(2i+3)l}{2n}} \phi_i^l(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right| = \frac{l}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2lt}{n\pi}\right) dt.$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\frac{(2i+1)l}{2n}}^{\frac{(2i+3)l}{2n}} \phi_i^l(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right| = \\ & = \left| - \int_{\frac{(2i+1)l}{2n}}^{\frac{i+1}{n}l} \frac{1}{2} \omega\left(2\left(\frac{i+1}{n}l - x\right)\right) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{i+1}{n}l}^{\frac{2i+3}{2n}l} \frac{1}{2} \omega\left(2\left(x - \frac{i+1}{n}l\right)\right) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right|. \end{aligned}$$

ცვლადის $\frac{i+1}{n}l - x = t$ გარდაქმნით გვქვს:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\frac{l}{2n}}^0 \frac{1}{2} \omega(2t) \sin \frac{n\pi}{l} \left(\frac{i+1}{n}l - t\right) dt + \int_0^{\frac{l}{2n}} \frac{1}{2} \omega(2t) \sin \frac{n\pi}{l} \left(t + \frac{i+1}{n}l\right) dt \right| = \\ & = \left| - \int_0^{\frac{l}{2n}} \frac{1}{2} \omega(2t) \sin \left(\pi(i+1) - \frac{n\pi}{l}t\right) dt + \int_0^{\frac{l}{2n}} \frac{1}{2} \omega(2t) \sin \left(\pi(i+1) + \frac{n\pi}{l}t\right) dt \right| = \\ & = \left| \int_0^{\frac{l}{2n}} \frac{1}{2} \omega(2t) \left[\sin \left(\pi(i+1) + \frac{n\pi}{l}t\right) - \sin \left(\pi(i+1) - \frac{n\pi}{l}t\right) \right] dt \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^{\frac{l}{2p}} \frac{1}{2} \omega(2t) \left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}t + \pi(i+1)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}t - \pi(i+1)\right) \right] dt \right| = \\
&= \left| \int_0^{\frac{l}{2p}} \omega(2t) \sin \frac{n\pi}{l}t \cos \pi(i+1) dt \right| = \\
&= \int_0^{\frac{l}{2p}} \omega(2t) \sin \frac{n\pi}{l}t dt.
\end{aligned}$$

კვლავ ცვლადის $\frac{n\pi}{l}t = y$ გარდაქმნით გვაქვს:

$$\int_0^{\frac{l}{2p}} \omega(2t) \sin \frac{n\pi}{l}t dt = \frac{l}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2lt}{n\pi}\right) \sin t dt.$$

ვთქვათ,

$$f^*(x) = (-1)^{i+1} \phi_i^l(x), \text{ როცა } x \in \left[\frac{2i+1}{2n}l, \frac{2i+3}{2n}l \right], i = \overline{0, n-2}.$$

ამასთანავე შევნიშნოთ, რომ

$$f^*(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

არის დადებითი ყოველი $i = \overline{0, n-2}$ -თვის და $f^*(x) \in H_{\omega, \text{odd}}$. ამიტომ

$$\begin{aligned}
&|I(f^*)| = \\
&= \left| \frac{2}{l} \int_0^l f^*(t) s(t) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \\
&= \left| \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2n}}^{l - \frac{l}{2n}} (-1)^{i+1} \phi_i^l(x) \sin \frac{n\pi t}{l} dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \\
&= \frac{2}{l} \sum_{i=0}^{n-2} \int_{\frac{2i+1}{2n}l}^{\frac{2i+3}{2n}l} (-1)^{i+1} \phi_i^l(x) \sin \frac{n\pi t}{l} dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\
&= \frac{2}{l} \frac{l}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2lt}{n\pi}\right) \sin t dt (n-1) + O\left(\frac{1}{n}\right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2t}{n\pi}\right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2t}{n\pi}\right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\sup_{f \in H_\omega} |b'_n| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega\left(\frac{2t}{n\pi}\right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

და ტოლობას აქვს ადგილი, როცა $\omega(t)$ ამოზნექილი უწყვეტობის მოდულია.

1.2 განზოგადებული დირიხლეს გულის ასიმპტოტური წარმოდგენა

1.2.1 განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე დებულება

განსაზღვრება 1.7 ვთქვათ, f თანაბრად უწყვეტი ფუნქცია $\mathbb{R}$ -ზე. ვიტყვი, რომ $f \in H_\omega$ თუ ყოველი $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ სამართლიანია:

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \omega(|t_1 - t_2|),$$

სადაც $\omega(t)$ არის უწყვეტობის მოდული.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}(H_\omega; S_n^l) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in H_\omega} \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n^l(f; x) - f(x)| = \\ &= \sup_{f \in H_\omega} \left\| \frac{1}{l} \int_{-l-x}^{l-x} [f(x+t) - f(x)] D_n^l(t) dt \right\|_C. \end{aligned}$$

დებულება 1.8 ნებისმიერი $f \in H_\omega$ და $0 < a < x < b < l - \varepsilon < l$ მართებულია შეფასება:

$$\mathcal{E}(H_\omega, S_n^l) \leq \sup_{f \in H} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D_n^l(t) dt \right| + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right),$$

სადაც $H \subset H_\omega$ და შეიცავს მხოლოდ ლუწ ფუნქციებს თვისებით $f(0) = 0$.

დამტკიცება:

$$\begin{aligned} &\sup_{f \in H_\omega} \|S_n^l(f; x) - f(x)\|_C = \\ &= \sup_{f \in H_\omega} \sup_x \left| \frac{1}{l} \int_{l-x}^{l-x} [f(x+t) - f(x)] D_n^l(t) dt \right| = \\ &= \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x}^{l-x} [f(x+t) - f(x)] D_n^l(t) dt \right| = \\ &= \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{-l-x}^{l-x} f(t) D_n^l(t) dt \right| = \\ &= \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{-l-x}^l f(t) D_n^l(t) dt - \frac{1}{l} \int_{l-x}^l f(t) D_n^l(t) dt + \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) D_n^l(t) dt \right|. \end{aligned}$$

ვაჩვენოთ რომ:

$$\sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x}^l f(t) D_n^l(t) dt \right| = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right)$$

და

$$\sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{-l-x}^{-l} f(t) D_n^l(t) dt \right| = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ:

$$\sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x}^l f(t) D_n^l(t) dt \right| = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

საშუალო მნიშვნელობის მე-2 თეორემის გამოყენებით, ვიღებთ:

$$\begin{aligned} & \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x}^l f(t) D_n^l(t) dt \right| = \\ & = \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x}^l f(t) \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} dt \right| = \\ & = \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \frac{1}{2\sin\frac{\pi(l-x)}{2l}} \int_{l-x}^\xi f(t) \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \\ & \leq \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{C}{l} \int_{l-x}^\xi f(t) \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt \right|, \end{aligned}$$

სადაც $\xi \in [l-x, l]$.

ბოლო ინტეგრალში ცვლადის $t - \frac{2l}{2n+1}$ გარდაქმნით, გვექნება:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l} \int_{l-x}^\xi f(t) \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt = \\ & = \frac{1}{l} \int_{l-x-\frac{2l}{2n+1}}^{\xi-\frac{2l}{2n+1}} f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) \sin\left((2n+1)\frac{\pi t}{2l} + \pi\right) dt = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{l} \int_{l-x-\frac{2l}{2n+1}}^{\xi-\frac{2l}{2n+1}} f\left(t+\frac{2l}{2n+1}\right) \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt.$$

ამრიგად, სამართლიანია ტოლობა

$$\begin{aligned} & \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x}^{\xi} f(t) \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\ & = \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{l} \int_{l-x}^{\xi} f(t) \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{l} \int_{l-x-\frac{2l}{2n+1}}^{\xi-\frac{2l}{2n+1}} f\left(t+\frac{2l}{2n+1}\right) \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\ & = \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x}^{\xi-\frac{2l}{2n+1}} \left[f(t) - f\left(t+\frac{2l}{2n+1}\right) \right] \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{l} \int_{l-x-\frac{2l}{2n+1}}^{l-x} f\left(t+\frac{2l}{2n+1}\right) \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt + \right. \\ & \quad \left. + \frac{C}{l} \int_{\xi-\frac{2l}{2n+1}}^{\xi} f(t) \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \\ & \leq \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |I_1| + \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |I_2| + \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |I_3|. \end{aligned}$$

შევავსოთ თითოეული წევრი

$$\begin{aligned} & \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |I_1| = \\ & \leq \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x}^{\xi-\frac{2l}{2n+1}} \left[f(t) - f\left(t+\frac{2l}{2n+1}\right) \right] \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \\ & \leq \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \frac{1}{l} \int_{l-x}^{\xi-\frac{2l}{2n+1}} \left| f(t) - f\left(t+\frac{2l}{2n+1}\right) \right| \left| \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} \right| dt \leq \\ & \leq \frac{1}{l} \int_{l-x}^{\xi-\frac{2l}{2n+1}} \omega\left(\frac{2l}{2n+1}\right) \left| \sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l} \right| dt \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{l} \omega\left(\frac{l}{n}\right) \left(\xi - \frac{2l}{2n+1} - l + x \right) = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right) \right).$$

განვიხილოთ შემდეგი წევრი

$$\begin{aligned} & \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |I_2| = \\ &= \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x-\frac{2l}{2n+1}}^{l-x} f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\ &= \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x-\frac{2l}{2n+1}}^{l-x} \left[f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) - f\left(\frac{2l}{2n+1}\right) \right] \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{l} \int_{l-x-\frac{2l}{2n+1}}^{l-x} \omega(t) \left| \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} \right| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{l} \omega(l) \frac{2l}{2n+1} = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

განვიხილოთ ბოლო წევრი:

$$\begin{aligned} & \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |I_3| = \\ &= \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{\xi-\frac{2l}{2n+1}}^{\xi} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\ &= \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{\xi-\frac{2l}{2n+1}}^{\xi} [f(t) - f(0)] \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{l} \int_{\xi-\frac{2l}{2n+1}}^{\xi} \omega(t) \left| \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} \right| dt < \\ &< \frac{1}{l} \omega(\xi) \frac{2l}{2n+1} < \frac{1}{l} \omega(l) \frac{2l}{2n+1} = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{l-x}^l f(t) D'_n(t) dt \right| = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right) \right).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$\sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{-l-x}^l f(t) D_n'(t) dt \right| = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

საშუალო მნიშვნელობის მე-2 თეორემის გამოყენებით:

$$\begin{aligned} & \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{-l-x}^l f(t) D_n'(t) dt \right| = \\ & = \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \frac{1}{2 \sin \frac{\pi l}{2l}} \int_{\xi}^{-l} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\ & \leq \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{C}{l} \int_{\xi}^{-l} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right|, \end{aligned}$$

სადაც $\xi \in [-l-x, -l]$. ბოლო ინტეგრალში ცვლადის გარდაქმნით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \frac{C}{l} \int_{\xi}^{-l} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt = \\ & = -\frac{C}{l} \int_{\xi - \frac{2l}{2n+1}}^{l - \frac{2l}{2n+1}} f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) \sin\left((2n+1) \frac{\pi t}{2l}\right) dt. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\begin{aligned} & \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{C}{l} \int_{\xi}^{-l} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\ & = \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{2} \frac{C}{l} \int_{\xi}^{-l} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{C}{l} \int_{\xi - \frac{2l}{2n+1}}^{l - \frac{2l}{2n+1}} f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) \sin\left((2n+1) \frac{\pi t}{2l}\right) dt \right| = \\ & \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{C}{l} \int_{\xi}^{-l - \frac{2l}{2n+1}} \left[f(t) - f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) \right] \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{C}{l} \int_{\xi - \frac{2l}{2n+1}}^{\xi} f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt + \\
& + \frac{C}{l} \int_{-l - \frac{2l}{2n+1}}^{-l} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \leq \\
& \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |J_1| + \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |J_2| + \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |J_3|.
\end{aligned}$$

შევავსოთ თითოეული წევრი.

$$\begin{aligned}
& \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |J_1| = \\
& = \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{C}{l} \int_{\xi}^{-l - \frac{2l}{2n+1}} \left[f(t) - f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) \right] \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \\
& \leq \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \frac{C}{l} \int_{\xi}^{-l - \frac{2l}{2n+1}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) \right| \left| \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} \right| dt \leq \\
& \leq \sup_x \frac{C}{l} \int_{\xi}^{-l - \frac{2l}{2n+1}} \omega\left(\frac{2l}{2n+1}\right) \left| \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} \right| dt \leq \\
& \leq \sup_x \left| \frac{C}{l} \omega\left(\frac{l}{n}\right) \left(-l - \frac{2l}{2n+1} - \xi\right) \right| = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

განვიხილოთ შემდეგი წევრი

$$\begin{aligned}
& \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |J_2| = \\
& = \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{C}{l} \int_{\xi - \frac{2l}{2n+1}}^{\xi} \left[f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) - f\left(\frac{2l}{2n+1}\right) \right] \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \\
& = \sup_x \left| \frac{C}{l} \int_{\xi - \frac{2l}{2n+1}}^{\xi} \omega(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \\
& \leq \frac{C}{l} \omega(l) \frac{2l}{2n+1} \leq C \frac{1}{n} \omega\left(\frac{nl}{n}\right) = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

განვიხილოთ J_3 წევრი:

$$\begin{aligned}
 & \sup_x \sup_{f \in H_\omega} |J_3| = \\
 & = \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{C}{l} \int_{-l-\frac{2l}{2n+1}}^{-l} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\
 & = \sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{C}{l} \int_{-l-\frac{2l}{2n+1}}^{-l} [f(t) - f(0)] \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \\
 & \leq \frac{C}{l} \omega(l) \frac{2l}{2n+1} \leq C \frac{1}{n} \omega\left(\frac{nl}{n}\right) = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).
 \end{aligned}$$

ამრიგად მივიღეთ, რომ

$$\sup_x \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{-l-x}^{-l} f(t) D'_n(t) dt \right| = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

მაშასადამე,

$$\sup_{f \in H_\omega} |I'_0(f)| \leq \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{-l}^{-l} f(t) D'_n(t) dt \right| + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

როგორც ცნობილია ნებისმიერი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ამავე ფუნქციის ლუწ და კეტი ნაწილების ჯამად :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

ამასთანავე, თუ $f(x) \in H^\omega$, მაშინ $f_1(x) \in H^\omega$ და $f_2(x) \in H^\omega$ და თუ გავითვალისწინებთ, რომ $D'_n(t)$ ლუწია, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 & \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{-l}^{-l} f(t) D'_n(t) dt \right| = \\
 & = \sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f_1(t) D'_n(t) dt \right| = \\
 & = \sup_{f \in H_{\text{even}}} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D'_n(t) dt \right|,
 \end{aligned}$$

სადაც H_{even} არის H_ω -ს ქვესიმრავლე და შეიცავს მხოლოდ ლუწ ფუნქციებს. შევნიშნოთ, რომ

$$\sup_{f \in H_{\text{even}}} \left| \frac{2}{l} \int_0^l (f(t) - f(0)) D'_n(t) dt \right| = \sup_{f \in H_{\text{even}}} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D'_n(t) dt \right|.$$

ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(0)=0$. მაშასადამე,

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in H_{\text{even}}} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D'_n(t) dt \right| = \\ &= \sup_{f \in H_{\text{even}}, f(0)=0} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D'_n(t) dt \right| = \\ &= \sup_{f \in H} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D'_n(t) dt \right|, \end{aligned}$$

სადაც H შეიცავს H_ω კლასის ფუნქციებს, რომელთა მნიშვნელობა კოორდინატა სათავეში 0-ის ტოლია. მაშასადამე,

$$\sup_{f \in H_\omega} \left| \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) D'_n(t) dt \right| = \sup_{f \in H} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D'_n(t) dt \right|.$$

ამრიგად, გვქვას

$$\sup_{f \in H_\omega} |I_0^l(f)| \leq \sup_{f \in H} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D'_n(t) dt \right| + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

დებულება 1.9 *სამართლიანია შეფასება:*

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\pi} \ln n + O(1).$$

დამტკიცება:

შევნიშნოთ, რომ

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1},$$

ამიტომ

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n+1}} = \\
& = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n+1}} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \\
& = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n+1}} - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n+1}{(k+1)\pi} = \\
& = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n+1}} - \frac{1}{\frac{(k+1)\pi}{2n+1}} \right).
\end{aligned}$$

განვიხილოთ

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n+1}} - \frac{1}{\frac{(k+1)\pi}{2n+1}} \right).$$

თუ $\frac{(k+1)\pi}{2n+1} = a_k$, მაშინ

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sin a_k} - \frac{1}{a_k} \right) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k - \sin a_k}{a_k \sin a_k}.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

ამიტომ $\sin a_k = a_k + O(a_k^3)$ ე.ი.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k - \sin a_k}{a_k \sin a_k} \right| = \left| -\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin a_k - a_k}{a_k \sin a_k} \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^3}{a_k \sin a_k} \leq \\
& \leq C \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \\
&\leq C \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \leq C
\end{aligned}$$

ამრიგად

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + O(1) = \\
&= \frac{1}{\pi} \ln n + O(1).
\end{aligned}$$

1.2.2 ძირითადი შედეგის ჩამოყალიბება

თეორემა 1.10 ნებისმიერი $\omega = \omega(t)$ უწყვეტობის მოდულისთვის

$$\mathcal{E}(H_\omega, S_n^l) \leq \frac{2}{\pi^2} \ln n \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi}\right) \sin t dt + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

თუ ω არის ამოზნექილი ფუნქცია, მაშინ ზედა გამოსახულებაში მიიღწევა ტოლობა.

შედეგი 1.11 ნებისმიერი $\omega = \omega(t)$ უწყვეტობის მოდულისთვის სამართლიანია შეფასება:

$$\mathcal{E}(H_\omega, S_n^l) = \frac{2s_n^l(\omega)}{\pi^2} \ln n + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right),$$

სადაც

$$s_n^l(\omega) = \sup_{f \in H_\omega\left[\frac{l}{2n+1}, \frac{l}{2n+1}\right]} \left| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{2lt}{(2n+1)\pi}\right) \sin t dt \right|.$$

შედეგი 1.12 ნებისმიერი $\omega = \omega(t)$ უწყვეტობის მოდულისთვის

$$\mathcal{E}(H_\omega, S_n^l) = \Theta_\omega^l \frac{2}{\pi^2} \ln n \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi}\right) \sin t dt + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right),$$

სადაც

$$2/3 \leq \Theta_\omega^l \leq 1.$$

ამასთანავე $\Theta_\omega^l = 1$, როცა $\omega(t)$ არის ამოზნექილი ფუნქცია.

1.2.3 ძირითადი შედეგის დამტკიცება

დებულება 1.8-ის თანახმად ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ

$$\begin{aligned} \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D_n^l(t) dt &= \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} dt \end{aligned}$$

და

$$x_k^l = \frac{2lk}{2n+1}, \quad k=1, \dots, n,$$

არის დირიხლეს გულის ნულებს.

$$t_k^l = \frac{l(2k+1)}{2n+1}, \quad k=0, \dots, n$$

აღნიშნავს $\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}$ -ის ნულები.

ვთქვათ,

$$L_n^0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sin \frac{\pi t}{2l}, & t \in (0, t_0^l] \\ \sin \frac{x_{k+1} \pi}{2l}, & t \in (t_k^l, t_{k+1}^l] \end{cases}, \quad k=0, \dots, n-1,$$

და

$$D_n^{j^0}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2L_n^0(t)}.$$

განვიხილოთ

$$r_n^l(t) \stackrel{\text{def}}{=} D_n^l(t) - D_n^{j^0}(t) =$$

$$= \frac{L_n^0(t) - \sin \frac{\pi t}{2l}}{2 \sin \frac{\pi t}{2l} L_n^0(t)} \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l}.$$

ეს სხვაობა 0-ის ტოლია, როცა $t \in [0, t_0^l)$ და $t \in [t_k^l, t_{k+1}^l]$ არის დადებითი, როცა k ლუწია, და უარყოფითია, როცა k კენტია. განვიხილოთ

$$\alpha_k^l = \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} r_n^l(t) dt \right|.$$

α_k^l არის მკაცრად კლებადია k -ს მიმართ. მართლაც,

$$\begin{aligned} \alpha_k^l - \alpha_{k+1}^l &= \\ &= \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2 \sin \frac{x_{k+1}^l \pi}{2l}} \right) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| - \\ &- \left| \int_{t_{k+1}^l}^{t_{k+2}^l} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2 \sin \frac{x_{k+2}^l \pi}{2l}} \right) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\ &= |J_1| + |J_2|. \end{aligned}$$

J_2 -ში ცვლადის $t - \frac{2l}{2n+1} = x$ გარდაქმნით მივიღებთ

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2l} \left(t + \frac{2l}{2n+1} \right)} - \frac{1}{\sin \frac{x_{k+2}^l \pi}{2l}} \right) \sin \left[\frac{2n+1}{2l} \pi \left(t + \frac{2l}{2n+1} \right) \right] dt = \\ &= - \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2l} \left(t + \frac{2l}{2n+1} \right)} - \frac{1}{\sin \frac{x_{k+2}^l \pi}{2l}} \right) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t dt. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\alpha_k^l - \alpha_{k+1}^l =$$

$$= \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2 \sin \frac{x_{k+1}^l \pi}{2l}} \right) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| -$$

$$- \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2l} \left(t + \frac{2l}{2n+1} \right)} - \frac{1}{2 \sin \frac{x_{k+2}^l \pi}{2l}} \right) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t dt \right|$$

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია

$$g(t) = \frac{1}{\sin \frac{\pi t}{2l}}$$

არის კლებადი და ამოზნექილი ქვემოთ, როცა $t \in (0, l]$. მართლაც

$$g'(t) = - \left(\sin \frac{\pi t}{2l} \right)^{-2} \cos \frac{\pi t}{2l} \frac{\pi}{2l} =$$

$$= - \frac{\pi}{2l} \cos \frac{\pi t}{2l} \left(\sin \frac{\pi t}{2l} \right)^{-2},$$

ამასთან

$$g''(t) =$$

$$g''(t) = - \frac{\pi}{2l} \left[- \sin \frac{\pi t}{2l} \frac{\pi}{2l} \left(\sin \frac{\pi t}{2l} \right)^{-2} + \right.$$

$$\left. + \cos \frac{\pi t}{2l} (-2) \left(\sin \frac{\pi t}{2l} \right)^{-3} \cos \frac{\pi t}{2l} \frac{\pi}{2l} \right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{(2l)^2} \left[\frac{1}{\sin \frac{\pi t}{2l}} + \frac{2 \left(\cos \frac{\pi t}{2l} \right)^2}{\left(\sin \frac{\pi t}{2l} \right)^3} \right].$$

ამრიგად, როცა $t \in (0, l]$, მაშინ $g(t)' > 0$, $g(t)'' < 0$.

ამასთანავე,

$$t + \frac{2l}{2n+1} - x_{k+2}^l = t + \frac{2l}{2n+1} - \frac{2l(k+2)}{2n+1} =$$

$$=t+\frac{2l-2lk-4l}{2n+1}=t-\frac{2l(k+1)}{2n+1};$$

$$t-x_{k+1}^l=t-\frac{2l(k+1)}{2n+1}.$$

ამრიგად,

$$\alpha_k^l > \alpha_{k+1}^l.$$

განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$\bar{r}_n^l(\xi) = \int_{\xi}^l r_n^l(t) dt.$$

ამ ფუნქციას ყოველ $[t_k^l, t_{k+1}^l]$ შუალედზე აქვს ერთადერთი მარტივი წული ξ_k^l ისეთი, რომ

$$t_0^l < \xi_0^l < t_1^l < \xi_1^l < \dots < \xi_{n-1}^l = l.$$

დავუშვათ

$$d_n^{l^0}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_0) \\ D_n^0, & t \geq t_0 \end{cases},$$

მაშინ

$$\begin{aligned} & \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D_n^l(t) dt = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) d_n^{l^0}(t) dt + \frac{2}{l} \int_0^{t_0^l} f(t) D_n^l(t) dt + \frac{2}{l} \int_{t_0^l}^l f(t) r_n^l(t) dt = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) d_n^{l^0}(t) dt + \frac{2}{l} \int_0^{t_0^l} f(t) D_n^l(t) dt + \\ &+ \frac{2}{l} \int_{t_0^l}^{\xi_0^l} f(t) r_n^l(t) dt + \frac{2}{l} \int_{\xi_0^l}^l f(t) r_n^l(t) dt. \end{aligned}$$

განვიხილოთ ბოლო სამი შესაკრები. შევნიშნოთ, რომ

$$|D_n^l(t)| = \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \right| \leq \frac{1}{2} + n = \frac{2n+1}{2},$$

მაშინ

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{l} \left| \int_0^{t_0^l} f(t) D_n^l(t) dt \right| = \\
& = \frac{2}{l} \left| \int_0^{t_0^l} [f(t) - f(0)] D_n^l(t) dt \right| \leq \\
& \leq \frac{2}{l} \frac{2n+1}{2} \int_0^{t_0^l} \omega(t) dt \leq \\
& \leq \frac{2}{l} \frac{2n+1}{2} \omega(t_0) \frac{l}{2n+1} = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned}
& [t_0^l, \xi_0^l] \subset [t_0^l, t_1^l] = \\
& = \frac{3l}{2n+1} - \frac{l}{2n+1} = \frac{2l}{2n+1},
\end{aligned}$$

ხოლო $[t_0^l, t_1^l]$ შუალედზე $r_n^l(t)$ ფუნქცია თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს t_0^l წერტილში. მაშასადამე,

$$\begin{aligned}
r_n^l(t_0) &= \left| \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2 \sin \frac{x_1^l \pi}{2l}} \right) \sin(2n+1) \frac{\pi t_0^l}{2l} \right| \leq \\
& \leq \left| \frac{1}{2 \sin \frac{\pi t_0^l}{2l}} - \frac{1}{2 \sin \frac{x_1^l \pi}{2l}} \right| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\pi t_0^l}{2l}} \leq \\
& \leq \frac{1}{2 \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2l} t_0^l} = \frac{l}{2 t_0^l} = \frac{l}{2 \frac{l}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2}.
\end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{l} \left| \int_{t_0^l}^{\xi_1^l} f(t) r_n^l(t) dt \right| \leq \\
& \leq \frac{2}{l} |r_n^l(t)| \int_{t_0^l}^{\xi_1^l} |f(t)| dt \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{l} \frac{2n+1}{2} \frac{2l}{2n+1} \omega(\xi_0^l) \leq$$

$$\leq 2\omega(t_1) = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

შევნიშნოთ, რომ $r_n^l(t)$ ფუნქციის აგებიდან გამომდინარე, ჩვენ შეგვიძლია შემდეგი სახით გამოვიყენოთ კორნეიჩუკი 1.4 თეორემა, როცა

$$\psi(t) = r_n^l(t), \quad x_i^l = \xi_i^l, \quad h = \max(\xi_{i+1}^l - \xi_i^l),$$

$$t_{i+1}^l < \xi_{i+1}^l < t_{i+2}^l, \quad t_i^l < \xi_i^l < t_{i+1}^l,$$

$$\max(\xi_{i+1}^l - \xi_i^l) < t_{i+2}^l - t_i^l = \frac{l(i+3)}{2n+1} - \frac{l(i+1)}{2n+1} = \frac{2l}{2n+1}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{2}{l} \left| \int_{\xi_0^l}^l f(t) r_n^l(t) dt \right| < \frac{1}{l} \omega\left(\frac{2l}{2n+1}\right) \int_{\xi_0^l}^l |r_n^l(t)| dt.$$

$r_n^l(t)$ ფუნქციის განსაზღვრების ძალით მივიღებთ:

$$\int_{\xi_0^l}^l |r_n^l(t)| dt \leq$$

$$< \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \left| \frac{1}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2 \sin \frac{x_{k+1}^l \pi}{2l}} \right| \left| \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} \right| dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \left| \frac{1}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2 \sin \frac{x_{k+1}^l \pi}{2l}} \right| dt$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \left| \frac{1}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2 \sin \frac{x_{k+1}^l \pi}{2l}} \right| dt = \frac{1}{2} \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \left| \frac{1}{\sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{\sin \frac{x_{k+1}^l \pi}{2l}} \right| dt.$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$g(t) = \frac{1}{\sin \frac{\pi t}{2l}},$$

მაშინ

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\left(\sin \frac{\pi t}{2l}\right)^{-2} \cos \frac{\pi t}{2l} \frac{\pi}{2l} = \\ &= -\frac{\pi}{2l} \cos \frac{\pi t}{2l} \left(\sin \frac{\pi t}{2l}\right)^{-2} \end{aligned}$$

და ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \left| \frac{1}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2 \sin \frac{x_{k+1}^l \pi}{2l}} \right| dt = \\ &= \frac{\pi}{2l} \frac{1}{2} \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \frac{1}{\left(\sin \frac{\pi \zeta_k^l}{2l}\right)^2} \frac{l}{2n+1} dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{4} \frac{1}{\left(\sin \frac{\pi t_k^l}{2l}\right)^2} \frac{1}{2n+1} \frac{2l}{2n+1} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2} \frac{l}{(2n+1)^2} \frac{1}{\left(\frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2l} t_k^l\right)^2} = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{l}{(2n+1)^2} \frac{l^2}{(t_k^l)^2} = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{l}{(2n+1)^2} \frac{(2n+1)^2}{l^2 (2k+1)^2} \leq \frac{Cl}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{l} \left| \int_{\xi_0^l}^l f(t) r_n^l(t) dt \right| < \\ & < \frac{C}{l} \omega\left(\frac{2l}{2n+1}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l}{(2k+1)^2} = O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ

$$(1.4) \quad \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D_n^l(t) dt = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) d_n^{l^0}(t) dt + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in H} |I_0^l(f)| = \\ &= \sup_{f \in H} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) d_n^{l^0}(t) dt + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right) \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{l} \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{f \in H} \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2l} \pi t}{2 \sin \frac{x_{k+1}^l \pi}{2l}} dt \right| + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n+1}} \sup_{f \in H} \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} f(t) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t dt \right| + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

განვიხილოთ

$$e_k^l = \sup_{f \in H} \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} f(t) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t dt \right|$$

კორნეიჩუკის თეორემის შედეგი (1.5)-ის ძალით, როცა

$$a = t_k^l, \quad b = t_{k+1}^l, \quad c = x_{k+1}^l, \quad \psi(t) = \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t$$

გვექნება

$$\psi(t) = -\psi(2c - t).$$

მართლაც,

$$\begin{aligned} -\psi(2c - t) &= -\sin \frac{(2n+1)\pi \left(2 \frac{2l(k+1)}{2n+1} - t\right)}{2l} = \\ &= -\sin \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} \cdot 2 \cdot \frac{2l(k+1)}{2n+1} - \frac{(2n+1)\pi t}{2l} \right] = \\ &= -\sin \left[2\pi(2k+1) - \frac{(2n+1)\pi t}{2l} \right] = \end{aligned}$$

$$= \sin \left[\frac{(2n+1)\pi t}{2l} \right] = \psi(t).$$

მაშასადამე,

$$e_k^l < \int_{x_{k+1}^l}^{t_{k+1}^l} \left| \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t \right| \omega(2(t-x_{k+1}^l)) dt.$$

ცვლადის გარდაქმნით $t - x_{k+1}^l = y$, $t = \frac{2l(k+1)}{2n+1} + y$ მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \left| \sin \left[\frac{(2n+1)\pi \left(\frac{2l(k+1)}{2n+1} + y \right)}{2l} \right] \right| \omega(2y) dy = \\ &= \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \left| \sin \left[\pi(k+1) + \frac{(2n+1)\pi t}{2l} \right] \right| \omega(2t) dt = \\ &= \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \sin \left[\frac{(2n+1)\pi t}{2l} \right] \omega(2t) dt \end{aligned}$$

კვლავ ცვლადის გარდაქმნით $\frac{(2n+1)\pi t}{2l} = x$, $t = \frac{2lx}{(2n+1)\pi}$, მივიღებთ

$$\frac{2l}{(2n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi} \right) dt.$$

ამრიგად,

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in H} |I_0^l(f)| \leq \\ & \leq \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n+1}} \frac{2l}{(2n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi} \right) dt + O \left(\omega \left(\frac{l}{n} \right) \right) = \\ & = \frac{2}{(2n+1)\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{(k+1)\pi}{2n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega \left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi} \right) \sin t dt + O \left(\omega \left(\frac{l}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ დებულება 1.9-ს, მაშინ გვექნება შეფასება:

$$\sup_{f \in H} |I_0^l(f)| \leq \frac{2}{\pi^2} \ln n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi}\right) \sin t \, dt + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ტოლობაც მიიღწევა ამოზნექული უწყვეტობის მოდულის შემთხვევაში. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f_k^l(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \omega(2(x_{k+1}^l - x)), & x \in (t_k^l, x_{k+1}^l] \\ \frac{1}{2} \omega(2(x - x_{k+1}^l)), & x \in (x_{k+1}^l, t_k^l] \end{cases}.$$

ვთქვათ,

$$\begin{aligned} A &:= \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} f_k^l(t) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t \, dt \right| = \\ &= \left| \int_{t_k^l}^{x_{k+1}^l} -\frac{1}{2} \omega(2(x_{k+1}^l - x)) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t \, dt + \int_{x_{k+1}^l}^{t_{k+1}^l} \frac{1}{2} \omega(2(x - x_{k+1}^l)) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t \, dt \right| \end{aligned}$$

მე-2 შესაკრებში ცვლადის $x - x_{k+1}^l = t$ გარდაქმნით მივიღებთ

$$\begin{aligned} &\int_{x_{k+1}^l}^{t_{k+1}^l} \frac{1}{2} \omega(2(x - x_{k+1}^l)) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \omega(2t) \sin \left[\frac{(2n+1)}{2l} \pi \left(t + \frac{2l(k+1)}{2n+1} \right) \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \omega(2t) \sin \left(\pi(k+1) + \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) dt; \end{aligned}$$

პირველი შესაკრებში ცვლადის $x_{k+1}^l - x = t$ გარდაქმნით გვქვია

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \int_{t_k^l}^{x_{k+1}^l} \omega(2(x_{k+1}^l - x)) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{l}{2n+1}}^0 \omega(2t) \sin \left[\frac{(2n+1)}{2l} \pi \left(\frac{2l(k+1)}{2n+1} - t \right) \right] dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{l}{2n+1}}^0 \omega(2t) \sin \left(\pi(k+1) - \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) dt ;$$

ამრიგად,

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}^l} f_k^l(t) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \omega(2t) \sin \left(\pi(k+1) + \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\frac{l}{2n+1}}^0 \omega(2t) \sin \left(\pi(k+1) - \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \omega(2t) \sin \left(\pi(k+1) + \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \omega(2t) \sin \left(\pi(k+1) - \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \omega(2t) \left[\sin \left(\pi(k+1) + \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) - \sin \left(\pi(k+1) - \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) \right] dt \right|. \end{aligned}$$

მაგრამ

$$\begin{aligned} &\left[\sin \left(\pi(k+1) + \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) - \sin \left(\pi(k+1) - \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) \right] = \\ &= \sin \pi(k+1) \cos \frac{(2n+1)}{2l} \pi t + \cos \pi(k+1) \sin \frac{(2n+1)}{2l} \pi t - \\ &\quad - \sin \pi(k+1) \cos \frac{(2n+1)}{2l} \pi t + \cos \pi(k+1) \sin \frac{(2n+1)}{2l} \pi t = \\ &= 2 \cos \pi(k+1) \sin \frac{(2n+1)}{2l} \pi t. \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \omega(2t) \left[\sin \left(\pi(k+1) + \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) - \sin \left(\pi(k+1) - \frac{(2n+1)}{2l} \pi t \right) \right] dt \right| = \\
 & = \left| \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \omega(2t) \cos \pi(k+1) \sin \frac{(2n+1)}{2l} \pi t dt \right| = \int_0^{\frac{l}{2n+1}} \omega(2t) \sin \frac{(2n+1)}{2l} \pi t dt = \\
 & = \frac{2l}{(2n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi} \right) dt.
 \end{aligned}$$

ამიტომ

$$A = \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} f_k^l(t) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi t dt \right| = \frac{2l}{(2n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \omega \left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi} \right) dt.$$

ვთქვათ,

$$\hat{f}(x) = (-1)^{k+1} f_k^l(x), \text{ როცა } x \in [t_k^l, t_{k+1}^l], \quad k = \overline{0, n-1}$$

და

$$f^*(x) = \hat{f}(x) - \frac{1}{2} \omega \left(\frac{2l}{2n+1} \right).$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} d_n^{l^0}(t) dt = 0.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned}
 |I_0^l(f^*)| &= \frac{2}{l} \left| \int_0^l f^*(t) d_n^{l^0}(t) dt \right| + O \left(\omega \left(\frac{l}{n} \right) \right) = \\
 &= \frac{2}{l} \left| \int_0^l \left[\hat{f}(x) - \frac{1}{2} \omega \left(\frac{2l}{2n+1} \right) \right] d_n^{l^0}(t) dt \right| + O \left(\omega \left(\frac{l}{n} \right) \right) = \\
 &= \frac{2}{l} \left| \int_0^l \hat{f}(x) d_n^{l^0}(t) dt - \frac{1}{2} \omega \left(\frac{2l}{2n+1} \right) \int_0^l d_n^{l^0}(t) dt \right| + O \left(\omega \left(\frac{l}{n} \right) \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{l} \left| \int_0^l \hat{f}(x) d_n^{l^0}(t) dt \right| + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right) = \\
&= \frac{2}{l} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} (-1)^{k+1} f_k^l(x) d_n^{l^0}(t) dt \right| + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

რადგან

$$(-1)^{k+1} f_k^l(x) d_n^{l^0}(t)$$

ყოველთვის დადებითია, ამიტომ

$$\begin{aligned}
|I_0^l(f^*)| &= \frac{2}{l} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2 \sin \frac{k+1}{2n+1} \pi} \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} f_k^l(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2l} \pi t\right) dt + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right) = \\
&= \frac{2}{(2n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sint} \omega\left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi}\right) dt \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{k+1}{2n+1} \pi} + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right) = \\
&= \frac{2}{\pi^2} \ln n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi}\right) \operatorname{sint} dt + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

შედეგი 1.11 დამტკიცება:

სამართლიანია წარმოდგენა

$$I_0^l(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{l} \int_0^l f(t) D_n^l(t) dt = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) d_n^{l_0}(t) dt + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

აქედან ვიღებთ შეფასებას:

$$\sup_{f \in H} |I_0^l(f)| = \sup_{f \in H} \frac{2}{l} \left| \int_0^l f(t) d_n^{l_0}(t) dt \right| + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right),$$

სადაც

$$x_k^l = \frac{2lk}{2n+1}, \quad t_k^l = \frac{l(2k+1)}{2n+1}, \quad k=0, \dots, n.$$

H შეიცავს H_ω კლასის ფუნქციებს თვისებით $f(0)=0$.

$$d_n^{l,0}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & t \in (0, t_0^l], \\ D_n^{l_0}(t), & t \geq t_0^l, \end{cases}$$

სადაც $D_n^{l_0}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2L_n^0(t)},$

$$L_n^0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sin \frac{\pi t}{2l}, & t \in (0, t_0^l], \\ \sin \frac{x_{k+1} \pi}{2l}, & t \in (t_k^l, t_{k+1}^l]. \end{cases}, \quad k=0, \dots, n-1.$$

ყოველი ფიქსირებული n -სათვის H_n^l -ით აღვნიშნოთ ისეთი $\varphi(t)$ ფუნქციები რომლებიც არის H კლასში და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\varphi\left(t + \nu \frac{2l}{2n+1}\right) = (-1)^\nu \varphi(t), \quad \nu=1, \dots, n-1, \quad t \in \left[\frac{l}{2n+1}, \frac{3l}{2n+1}\right].$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$(1.5) \quad \sup_{f \in H} \frac{2}{l} \left| \int_0^l f(t) d_n^{l_0}(t) dt \right| = \sup_{f \in H_n^l} \frac{2}{l} \left| \int_0^l f(t) d_n^{l_0}(t) dt \right|.$$

ამ მიზნისათვის დავუშვათ

$$\phi_1^l(t) = \frac{1}{2} \left[f(t) - f(2x_{k_0+1}^l - t) \right], \quad t \in [t_{k_0}^l, t_{k_0+1}^l],$$

$$\phi_2^l(t) = \begin{cases} \phi_1^l(t), & t \in [t_{k_0}^l, t_{k_0+1}^l], \\ \phi_1^l(2t_{k_0}^l - t), & t \in [t_{k_0+1}^l, t_{k_0+2}^l]. \end{cases}$$

$\phi_3^l(t)$ -ით აღვნიშნოთ $\frac{4l}{2n+1}$ -პერიოდული, $\phi_2^l(t)$ ფუნქციის გაგრძელება. $\phi_0^l(t)$ აღვნიშნოთ $2l$ -პერიოდული ფუნქცია, რომელიც $t \in [0, l]$ -ზე ემთხვევა $\phi_3^l(t)$ -ს. შევნიშნოთ $\phi_0^l(t)$ -ის შემდეგი თვისებები

$$\phi_0^l(t_{k_0}^l) = \phi_1^l(t_{k_0}^l) = \frac{1}{2} \left[f(t) - f(2x_{k_0+1}^l - t_{k_0}^l) \right] = \frac{1}{2} \left[f(t_{k_0}^l) - f(t_{k_0+1}^l) \right].$$

$$2x_{k_0+1}^l - t_{k_0}^l = 2 \frac{2l(k_0+1)}{2n+1} - \frac{l(2k_0+1)}{2n+1} = \frac{2lk_0+3l}{2n+1} = \frac{l(k_0+3)}{2n+1} = t_{k_0+1}^l;$$

$$\phi_0^l(x_{k_0+1}^l) = \phi_1^l(x_{k_0+1}^l) = \frac{1}{2} \left[f(x_{k_0+1}^l) - f(2x_{k_0+1}^l - x_{k_0+1}^l) \right] = 0;$$

$$\begin{aligned} \phi_0^l(t_{k_0+1}^l) &= \phi_1^l(t_{k_0+1}^l) = \frac{1}{2} \left[f(t_{k_0+1}^l) - f(2x_{k_0+1}^l - t_{k_0+1}^l) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[f(t_{k_0+1}^l) - f(t_{k_0}^l) \right] = -\phi_1^l(t_{k_0}^l). \end{aligned}$$

$$2x_{k_0+1}^l - t_{k_0+1}^l = 2 \frac{2l(k_0+1)}{2n+1} - \frac{l(2k_0+3)}{2n+1} = \frac{l(k_0+1)}{2n+1} = t_{k_0}^l;$$

$$\phi_0^l(x_{k_0+2}^l) = \phi_1^l(2t_{k_0+1}^l - x_{k_0+2}^l) = \frac{1}{2} \left[f(2t_{k_0+1}^l - x_{k_0+2}^l) - f(2x_{k_0+1}^l - 2t_{k_0+1}^l - x_{k_0+2}^l) \right] = 0$$

$$2t_{k_0+1}^l - x_{k_0+2}^l = 2 \frac{l(2k_0+3)}{2n+1} - \frac{2l(2k_0+2)}{2n+1} = 2l \frac{2k_0+3-k_0-2}{2n+1} = 2l \frac{k_0+1}{2n+1}.$$

$$\begin{aligned} 2x_{k_0+1}^l - t_{k_0+1}^l + x_{k_0+2}^l &= \\ &= 2 \frac{2l(2k_0+1)}{2n+1} - 2 \frac{l(2k_0+3)}{2n+1} + \frac{2l(k_0+2)}{2n+1} = \\ &= 2l \frac{2k_0+2-2k_0-3+k_0+2}{2n+1} = 2l \frac{k_0+1}{2n+1}; \end{aligned}$$

$$\phi_0^l(t_{k_0+2}^l) = \phi_1^l(2t_{k_0+1}^l - t_{k_0+2}^l) = \phi_1^l(t_{k_0}^l).$$

$$\begin{aligned}
2t_{k_0+1}^l - t_{k_0+2}^l &= 2 \frac{l(2k_0+3)}{2n+1} - \frac{l(2k_0+5)}{2n+1} = \\
&= \frac{4lk_0+6l-2lk_0-5l}{2n+1} = \frac{2lk_0+l}{2n+1} = \frac{l(2k_0+1)}{2n+1} = t_{k_0}^l;
\end{aligned}$$

აგებიდან გამომდინარეობს, რომ $\phi_0^l(0)=0$. შევნიშნოთ, რომ $\phi_0^l(t) \in H_\omega$ ვინაიდან $\phi_1^l(t) \in H_\omega$, როცა $t \in [t_{k_0}^l, t_{k_0+1}^l]$. მაშასადამე, $\phi_0^l(t) \in H_n^l$. შევნიშნოთ, რომ $\phi_0^l(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l}$ არ იცვლის ნიშანს $\left[\frac{l}{2n+1}, l \right]$ -ზე, ხოლო ინტეგრალის მნიშვნელობა

$$\int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \phi_0^l \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{l} dt$$

არ არის დამოკიდებული k -ზე. ამასთანავე, k_0 ავარჯიოთ ისე, რომ

$$\max_k \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} f(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{l} dt \right| = \left| \int_{t_{k_0}^l}^{t_{k_0+1}^l} f(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{l} dt \right| \stackrel{\text{def}}{=} M(f).$$

ამსრიგად, ყოველი $k=0, \dots, n-1$ -სათვის

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} \phi_0^l \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{l} dt \right| = \\
&= \left| \int_{t_{k_0}^l}^{t_{k_0+1}^l} \frac{1}{2} [f(t) - f(2x_{k_0+1}^l - t)] \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{l} dt \right| = \\
&= \left| \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} f(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{l} dt \right|.
\end{aligned}$$

მართლაც, განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{k_0}^l}^{t_{k_0+1}^l} f(2x_{k_0+1}^l - t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{l} dt = \\
&= - \int_{t_{k_0+1}^l}^{t_{k_0}^l} f(y) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} (2x_{k_0+1}^l - y) dy = \\
&= - \int_{t_{k_0}^l}^{t_{k_0+1}^l} f(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} t dt.
\end{aligned}$$

მაშინ, ცხადია,

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad & \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) d_n^{l_0}(t) dt \right| = \\
 & = \frac{1}{l} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi(k+1)}{2n+1}} \int_{t_k^l}^{t_{k+1}^l} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \\
 & \leq \frac{M(f)}{l} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi(k+1)}{2n+1}}.
 \end{aligned}$$

და ტოლობა მიიღწევა $\phi_0^l(t)$ (1.5) გამოსახულების სამართლიანობას. მაგრამ

$$\begin{aligned}
 & \sup_{f \in H_n^l} \left| \frac{2}{l} \int_0^l f(t) d_n^{l_0}(t) dt \right| = \\
 & = \sup_{f \in H_n^l} \frac{1}{l} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi(k+1)}{2n+1}} \int_{\frac{l}{2n+1}}^{\frac{3l}{2n+1}} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\
 & = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi(k+1)}{2n+1}} \sup_{f \in H_n^l} \left| \int_{\frac{l}{2n+1}}^{\frac{3l}{2n+1}} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right|.
 \end{aligned}$$

ვინაიდან $H_n^l \subset H_\omega$, ამიტომ

$$c_n^l(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in H_n} \left| \int_{\frac{l}{2n+1}}^{\frac{3l}{2n+1}} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| \leq \sup_{f \in H_\omega} \left| \int_{\frac{l}{2n+1}}^{\frac{3l}{2n+1}} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right|.$$

მეორე მხრივ, თუ მოვიქცევით ისე, როგორც $\phi_0^l(t)$ აგებისას ყოველი $f \in H_\omega$ ფუნქციისთვის შეგვიძლია მოვძებნოთ H_n კლასში ისეთი $\phi^l(f; t)$ ფუნქცია, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$\left| \int_{\frac{l}{2n+1}}^{\frac{3l}{2n+1}} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \left| \int_{\frac{l}{2n+1}}^{\frac{3l}{2n+1}} \phi^l(f; t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right|.$$

ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned}
c_n^l(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in H_\omega} \left| \int_{\frac{l}{2n+1}}^{\frac{3l}{2n+1}} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\
&= \sup_{f \in H_\omega} \left| \int_{\frac{l}{2n+1}}^{\frac{l}{2n+1}} f\left(t + \frac{2l}{2n+1}\right) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\
&= \sup_{f \in H_\omega} \left| \int_{\frac{l}{2n+1}}^{\frac{l}{2n+1}} f(t) \sin(2n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \right| = \\
&= \frac{2l}{\pi(2n+1)} \sup_{f \in H_\omega \left[\frac{l}{2n+1}, \frac{l}{2n+1} \right]} \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{2lt}{(2n+1)\pi}\right) \sin t dt \right|.
\end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$c_n^l(\omega) = \frac{2l}{\pi(2n+1)} \sup_{f \in H_\omega \left[\frac{l}{2n+1}, \frac{l}{2n+1} \right]} \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{2lt}{(2n+1)\pi}\right) \sin t dt \right| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2l}{\pi(2n+1)} s_n^l(\omega).$$

ამ ყველაფერის და დებულება 1.9 გათვალისწინებით ვასკვნით, რომ

$$\sup_{f \in H} |I_0(f)| = \frac{2s_n^l(\omega)}{\pi^2} \ln n + O\left(\omega \left(\frac{l}{n}\right)\right).$$

შედეგი 1.12 დამტკიცება:

შევნიშნოთ, რომ $s_n^l(\omega)$ -სათვის მართებულია შეფასება

$$s_n^l(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in H_\omega \left[-\frac{l}{2n+1}, \frac{l}{2n+1} \right]} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{2lt}{(2n+1)\pi}\right) \sin t dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4lt}{(2n+1)\pi}\right) \sin t dt.$$

ტოლობა მიიღწევა

$$f_*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\omega(2|t|), & t < 0, \\ \frac{1}{2}\omega(2t), & t \geq 0. \end{cases}$$

ფუნქციისათვის, იმ შემთხვევაში, როცა $\omega(t)$ არის ამოზნექილი ფუნქცია. თუ $\omega(t)$ ნებისმიერი უწყვეტობის მოდულია, მაშინ $f_*(t)$ შეიძლება არ ეკუთვნოდეს $H_\omega \left[-\frac{l}{2n+1}, \frac{l}{2n+1} \right]$, მაგრამ $\varphi_*(t) = \frac{2}{3} f_*(t) \in H_\omega \left[-\frac{l}{2n+1}, \frac{l}{2n+1} \right]$ კლასის ფუნქციაა.

მართლაც, ვთქვათ x და x' წერტილებიდან ორივე მდებარეობს $\left[-\frac{l}{2n+1}, 0 \right] \stackrel{\text{def}}{=} [a, c]$ ან $\left[\frac{l}{2n+1}, \frac{\pi}{2} \right] \stackrel{\text{def}}{=} [c, b]$ ინტერვალზე. მაშინ $|f(x) - f(x')| \leq \omega(|x - x'|)$ შეფასებას უზრუნველყოფს $\omega(t)$ ფუნქციის ნახევრადადიციურობა. ვთქვათ, $x' \in [a, c]$ და $x \in [c, b]$, მაშინ $f_*(t)$ ფუნქციის მონოტონურობის ძალით მივიღებთ

$$\begin{aligned} |\varphi_*(x) - \varphi_*(x')| &= \frac{2}{3} |f_*(x) - f_*(x')| = \\ &= \frac{1}{3} [\omega(2(x-c)) + \omega(2(c-x'))] = \\ &= \frac{1}{3} \omega(2(x-c)) + \frac{1}{3} \omega(2((x-x') + (c-x))). \end{aligned}$$

თუ $x-c \leq x-x' \leq 2(x-c)$, მაშინ

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \omega(2(x-c)) + \frac{1}{3} \omega(2((x-x') + (c-x))) \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \omega(2(x-x')) + \frac{1}{3} \omega\left(2\left((x-x') + \frac{x'-x}{2}\right)\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \omega(2(x-x')) + \frac{1}{3} \omega(2(x-x') + x' - x) = \\
&= \frac{1}{3} \omega(2(x-x')) + \frac{1}{3} \omega(x-x') \leq \omega(x-x').
\end{aligned}$$

თუ $x-x' \geq 2(x-c)$, მაშინ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} \omega(2(x-c)) + \frac{1}{3} \omega(2((x-x') + (c-x))) \leq \\
&\leq \frac{1}{3} \omega(x-x') + \frac{1}{3} \omega(2(x-x')) \leq \omega(x-x').
\end{aligned}$$

ამრიგად, $\varphi^*(t) \in H_\omega \left[-\frac{l}{2n+1}, \frac{l}{2n+1} \right]$. მაშასადამე,

$$\begin{aligned}
s_n(\omega) &\geq \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_*(t) \sin t dt = \\
&= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4t}{(2n+1)\pi}\right) \sin t dt.
\end{aligned}$$

ამ ყველაფრის გათვალისწინებით ვიღებთ

$$\sup_{f \in H^\omega} |S_n^l(x; f) - f(x)| = \Theta \frac{2}{\pi^2} \ln n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4t}{(2n+1)\pi}\right) \sin t dt + O\left(\omega\left(\frac{l}{n}\right)\right),$$

სადაც

$$\frac{2}{3} \leq \Theta_\omega^l \leq 1.$$

ამასთან, $\omega(t)$ ამოზნექილი ფუნქციისთვის $\Theta_\omega^l = 1$.

თავი II: განზოგადებული ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების ჩეზაროს აზრით
შეჯამებადობა

დისერტაციის მეორე თავში განხილილია (C, α_n) შეჯამებადობა ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივებისთვის. მიღებულია თეორემა 8-ის ანალოგი განზოგადებული ჩეზაროს საშუალოებისათვის. აღნიშნული თეორემა წარმოადგენს ფურიეს მწკრივის კრებადობის ლებეგის ნიშანის (თეორემა 5) გამზოგადლებას, (C, α_n) შეჯამებადობისათვის.

2.1 ლებეგის კრებადობის ნიშანი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის (C, α_n) ,
 $-1 < \alpha_n < 1$, შეჯამებადობისთვის

2.1.1 განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე დებულებები

$K_n^{\alpha_n}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n-\nu}^{\alpha_n}}{A_n^{\alpha_n}} \cos \nu x$ -ს უწოდებენ (C, α_n) შეჯამებადობის მეთოდის გულს.

ლემა 2.1 ნებისმიერი ნატურალური n -სათვის სამართლიანია შეფასება:

$$(2.1) \quad \left| K_n^{\alpha_n}(x) \right| \leq \frac{n}{1+\alpha_n} + \frac{1}{2}.$$

ლემა 2.2 ვთქვათ, $k, n, i \in \mathbb{N}$, მაშინ

$$C_1(i)(i+\alpha_n)(i+1+\alpha_n)k^{\alpha_n} < A_k^{\alpha_n} < C_2(i)(i+\alpha_n)(i+1+\alpha_n)k^{\alpha_n}, \quad \alpha_n \in (-i-1, -i)$$

ლემის დამკვიცება იხილე [4, ლემა 2].

ლემა 2.3 ნებისმიერი ნატურალური n -სათვის და $\alpha_n \in (-1, 1)$ სამართლიანია შეფასება:

$$\left| \left(K_n^{\alpha_n}(x) \right)' \right| \leq \frac{4n^2}{1+\alpha_n}.$$

დამტკიცება: მოცემული უტოლობა გამომდინარეობს ჯექსონის ცნობილი უტოლობიდან (იხილე [52] თავი III ლემა (13.16)) და ლემა 2.2-დან

გამოვიყენოთ წარმოდგენა (1.12) (იხილე [53] თავი XI) α_n მიმდევრობისათვის, მაშინ

$$K_n^{\alpha_n}(t) = \varphi_n^{\alpha_n}(t) + r_n^{\alpha_n}(t),$$

სადაც

$$\varphi_n^{\alpha_n}(t) = \frac{\sin\left[\frac{2n+1+\alpha_n}{2}t - \frac{\alpha_n\pi}{2}\right]}{A_n^{\alpha_n}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha_n}}$$

და

$$(2.2) \quad r_n^{\alpha_n}(t) = -\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2A_n^{\alpha_n}\sin\frac{t}{2}}\sum_{j=1}^3\frac{A_n^{\alpha_n-j}}{(1-e^{-it})^j} + \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2A_n^{\alpha_n}\sin\frac{t}{2}}\frac{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}A_n^{\alpha_n-4}e^{-i\nu t}}{(1-e^{-it})^3}\right\}.$$

განვიხილოთ (2.2)-ის პირველი შესაკრები

$$(2.2^*) \quad \begin{aligned} & \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2A_n^{\alpha_n}\sin\frac{t}{2}}\sum_{j=1}^3\frac{A_n^{\alpha_n-j}}{(1-e^{-it})^j} = \\ & = \frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\frac{A_n^{\alpha_n-1}}{1-e^{-it}} + \frac{A_n^{\alpha_n-2}}{(1-e^{-it})^2} + \frac{A_n^{\alpha_n-3}}{(1-e^{-it})^3}\right) \end{aligned}$$

და გავითვალისწინოთ, რომ:

$$\begin{aligned} 1-e^{-it} &= e^{-i\frac{t}{2}}\left(e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}\right)= \\ &= e^{-i\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}\right)= \\ &= e^{-i\frac{t}{2}}2i\sin\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

მაშინ (2.2*) -ის პირველი შესაკრები ტოლია

$$\frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2\sin\frac{t}{2}} \frac{A_n^{\alpha_n-1}}{1-e^{-it}} = \frac{A_n^{\alpha_n-1}}{A_n^{\alpha_n}} \frac{1}{i\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}.$$

განვიხილოთ (2.2*) -ის მე-2 შესაკრები:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2\sin\frac{t}{2}} \frac{A_n^{\alpha_n-2}}{(1-e^{-it})^2} &= \frac{A_n^{\alpha_n-2}}{A_n^{\alpha_n}} \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2\sin\frac{t}{2} e^{-i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} 2i\sin\frac{t}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{A_n^{\alpha_n-2}}{A_n^{\alpha_n}} \frac{e^{\frac{t}{2}}}{i^2 \left(2\sin\frac{t}{2}\right)^3}. \end{aligned}$$

განვიხილოთ (2.2*) -ის მე-3 შესაკრები:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2\sin\frac{t}{2}} \frac{A_n^{\alpha_n-3}}{(1-e^{-it})^3} &= \\ &= \frac{A_n^{\alpha_n-3}}{A_n^{\alpha_n}} \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2\sin\frac{t}{2} \left(e^{-i\frac{t}{2}} 2i\sin\frac{t}{2}\right)^3} = \\ &= \frac{A_n^{\alpha_n-3}}{A_n^{\alpha_n}} \frac{e^{it}}{i^3 \left(2\sin\frac{t}{2}\right)^4}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2\sin\frac{t}{2}} \left(\frac{A_n^{\alpha_n-1}}{1-e^{-it}} + \frac{A_n^{\alpha_n-2}}{(1-e^{-it})^2} + \frac{A_n^{\alpha_n-3}}{(1-e^{-it})^3} \right) &= \\ &= \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \frac{A_n^{\alpha_n-1}}{2i\sin\frac{t}{2}} + \frac{A_n^{\alpha_n-2}}{A_n^{\alpha_n}} \frac{e^{\frac{t}{2}}}{i^2 \left(2\sin\frac{t}{2}\right)^3} + \frac{A_n^{\alpha_n-3}}{A_n^{\alpha_n}} \frac{e^{it}}{i^3 \left(2\sin\frac{t}{2}\right)^4} = \\ &= \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \left[\frac{A_n^{\alpha_n-1}}{i \left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2} + \frac{e^{\frac{t}{2}} A_n^{\alpha_n-2}}{i^2 \left(2\sin\frac{t}{2}\right)^3} + \frac{e^{it} A_n^{\alpha_n-3}}{i^3 \left(2\sin\frac{t}{2}\right)^4} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{j=1}^3 i^{-j} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{-j-1} e^{\frac{i(j-1)t}{2}} A_n^{\alpha_n-j}.$$

განვიხილოთ (2.2) -ის მე-2 შესაკრები:

$$\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_{\nu}^{\alpha_n-4} e^{-i\nu t}}{2A_n^{\alpha_n} \sin \frac{t}{2} (1-e^{-it})^3}.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$(1-e^{-it})^3 = \left(e^{-i\frac{t}{2}} 2i \sin \frac{t}{2} \right)^3.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} & \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_{\nu}^{\alpha_n-4} e^{-i\nu t}}{2A_n^{\alpha_n} \sin \frac{t}{2} (1-e^{-it})^3} = \\ & = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_{\nu}^{\alpha_n-4} e^{-i\nu t}}{2A_n^{\alpha_n} \sin \frac{t}{2} \left(e^{-i\frac{t}{2}} 2i \sin \frac{t}{2} \right)^3} = \\ & = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} e^{\frac{3}{2}t}}{i^3 A_n^{\alpha_n} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^4} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_{\nu}^{\alpha_n-4} e^{-i\nu t} = \\ & = -\frac{1}{i} \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_{\nu}^{\alpha_n-4} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{-4} e^{-i(n+2-\nu)t} = \\ & = i \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_{\nu}^{\alpha_n-4} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{-4} e^{-i(n+2-\nu)t}. \end{aligned}$$

ამრიგად, მივიღებთ:

$$r_n^{\alpha_n}(t) = -\operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2A_n^{\alpha_n} \sin \frac{t}{2}} \sum_{j=1}^3 \frac{A_n^{\alpha_n-j}}{(1-e^{-it})^j} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{-\frac{it}{2}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_n^{\alpha_n-4} e^{-i\nu t}}{2A_n^{\alpha_n} \sin \frac{t}{2} (1-e^{-it})^3} \Bigg\} = \\
& = -\frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=1}^3 i^{-j} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{-j-1} e^{\frac{i(j-1)t}{2}} A_n^{\alpha_n-j} + \right. \\
& \quad \left. + i \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_n^{\alpha_n-4} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{-4} e^{i(n+2-\nu)t} \right\}.
\end{aligned}$$

ლემა 2.4 ყოველი ნატურალური n -სათვის და $\alpha_0 \in (-1, 1)$ -თვის.

$$\left| \left[r_n^{\alpha_n}(t) \right]' \right| \leq \frac{C}{(1+\alpha_n)nt^3}.$$

დამტკიცება. გამოვიყენოთ წარმოდგენა (2.2), მაშინ

$$\begin{aligned}
\left[r_n^{\alpha_n}(t) \right]' &= \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=1}^3 i^{-j} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{-j-2} (j+1) \cos \frac{t}{2} e^{\frac{i(j-1)t}{2}} A_n^{\alpha_n-j} - \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 i^{-j+1} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{-j-1} (j-1) e^{\frac{i(j-1)t}{2}} A_n^{\alpha_n-j} - \\
& \quad - 4i \sum_{j=n+1}^{\infty} A_n^{\alpha_n-4} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{-5} \cos \frac{t}{2} e^{i(n+2-\nu)t} - \\
& \quad \left. - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_n^{\alpha_n-4} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{-4} (n+2-\nu) e^{i(n+2-\nu)t} \right\} = \sum_{k=1}^4 N_k.
\end{aligned}$$

ლემა (2.2) -ის გათვალისწინებით, თუ $t \in \left[\frac{\pi}{n}, \pi \right]$, მაშინ

$$\begin{aligned}
(2.4) \quad N_1 &= \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{j=1}^3 i^{-j} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{-j-2} (j+1) \cos \frac{t}{2} e^{\frac{i(j-1)t}{2}} A_n^{\alpha_n-j} \leq \\
& \leq C \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{j=1}^3 \frac{A_n^{\alpha_n-j}}{\left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{j+2}} = \\
& = C \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \left(\frac{A_n^{\alpha_n-1}}{\left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^3} + \frac{A_n^{\alpha_n-2}}{\left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^4} + \frac{A_n^{\alpha_n-3}}{\left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^5} \right) =
\end{aligned}$$

$$= N'_1 + N'_2 + N'_3.$$

განვიხილოთ თითოეული წევრი:

$$\begin{aligned} N'_1 &= C \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \frac{A_n^{\alpha_n-1}}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^3} \leq C \frac{A_n^{\alpha_n-1}}{A_n^{\alpha_n} t^3} = \\ &= C \frac{\alpha_n(\alpha_n+1) \cdots (\alpha_n+n-1)}{(\alpha_n+1) \cdots (\alpha_n+n) t^3} = \\ &= C \frac{1}{(\alpha_n+1)} \frac{\alpha_n(\alpha_n+1)}{(\alpha_n+n) t^3} = \\ &= O\left(\frac{1}{(1+\alpha_n) n t^3}\right). \end{aligned}$$

მე-2 წევრისთვის გვექნება:

$$\begin{aligned} N'_2 &= C \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \frac{A_n^{\alpha_n-2}}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^4} \leq \\ &\leq C \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \frac{A_n^{\alpha_n-2}}{t^4} = \\ &= C \frac{(\alpha_n-1)\alpha_n \cdots (\alpha_n+n-2)}{(\alpha_n+1)(\alpha_n+2) \cdots (\alpha_n+n-1)(\alpha_n+n) t^4} = \\ &= C \frac{1}{(\alpha_n+1)} \frac{(\alpha_n-1)\alpha_n(\alpha_n+1)}{(\alpha_n+n-1)(\alpha_n+n) t^4} = \\ &= O\left(\frac{1}{(1+\alpha_n) n^2 t^4}\right). \end{aligned}$$

განვიხილოთ ბოლო წევრი:

$$\begin{aligned} N'_3 &= C \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \frac{A_n^{\alpha_n-3}}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^5} = \\ &\leq C \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \frac{A_n^{\alpha_n-3}}{t^5} = \\ &= C \frac{(\alpha_n-2)(\alpha_n-1)\alpha_n \cdots (\alpha_n+n-3)}{(\alpha_n+1)(\alpha_n+2) \cdots (\alpha_n+n-2)(\alpha_n+n-1)(\alpha_n+n) t^5} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \frac{1}{(\alpha_n + 1)} \frac{(\alpha_n - 2)(\alpha_n - 1)\alpha_n(\alpha_n + 1)}{(\alpha_n + n - 2)(\alpha_n + n - 1)(\alpha_n + n)t^5} = \\
&= O\left(\frac{1}{(1 + \alpha_n)n^3 t^5}\right).
\end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned}
N_1 &= O\left(\frac{1}{(1 + \alpha_n)nt^3}\right) + O\left(\frac{1}{(1 + \alpha_n)n^2 t^4}\right) + O\left(\frac{1}{(1 + \alpha_n)n^3 t^5}\right) = \\
&= O\left(\frac{1}{1 + \alpha_n} \sum_{j=1}^3 (nt)^{-j} t^{-2}\right) = O\left(\frac{1}{(1 + \alpha_n)nt^3}\right).
\end{aligned}$$

ამის გარდა,

$$\begin{aligned}
(2.5) \quad N_2 &= O\left\{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{t^{1+j}} \frac{A_n^{\alpha_n-j}}{A_n^{\alpha_n}}\right\} = \\
&= O\left\{\frac{1}{1 + \alpha_n} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{(nt)^j t}\right\} = \\
&= O\left\{\frac{1}{(1 + \alpha_n)nt^3}\right\}
\end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned}
(2.6) \quad N_3 &= O\left\{\frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{j=1}^3 \frac{\nu^{\alpha_n-4}}{t^5}\right\} = \\
&= O\left\{\frac{1}{A_n^{\alpha_n} t^5} (n+1)^{\alpha_n-3}\right\} = \\
&= O\left\{\frac{1}{(1 + \alpha_n)nt^3}\right\}.
\end{aligned}$$

ადვილი დასაწახია, რომ

$$\begin{aligned}
(2.7) \quad N_4 &= O\left\{\frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\nu^{\alpha_n-4} |n+2-\nu|}{t^4}\right\} = \\
&= O\left\{\frac{1}{(1 + \alpha_n)(nt)^4} + \frac{n^{\alpha_n-4}}{A_n^{\alpha_n} t^4} \sum_{\nu=n+3}^{2n} (\nu - n - 2) + \frac{1}{A_n^{\alpha_n} t^4} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\alpha_n-3}\right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O\left\{\frac{1}{(1+\alpha_n)(nt)^4} + \frac{n^{\alpha_n-2}}{A_n^{\alpha_n} t^4} + \frac{n^{\alpha_n-2}}{A_n^{\alpha_n} t^4}\right\} = \\
&= O\left\{\frac{1}{(1+\alpha_n)n^2 t^4}\right\} = O\left\{\frac{1}{(1+\alpha_n)nt^3}\right\}.
\end{aligned}$$

მაშასადამე, (2.3)-(2.7) გამოსახულების გათვალისწინებით მივიღებთ ლემის სამართლიანობის დამტკიცებას.

2.1.2 ძირითადი შედეგის ჩამოყალიბება

თეორემა 2.5 ვთქვათ, $-1 < \alpha_n < 1$, $n=1, 2, 3, \dots$, და

$$\bar{\Phi}(x, t) = \sup_{0 \leq u \leq t} |\Phi(x, u)|.$$

დავუშვათ, რომ

$$(2.8) \quad \frac{1}{(1+\alpha_n)n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\bar{\Phi}(x, t)}{t^3} dt = o(1),$$

$$(2.9) \quad \frac{1}{(1+\alpha_n)n^{\alpha_n}} \sup_{0 < h < \frac{\pi}{n}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{|\varphi(x, t) - \varphi(x, t+h)|}{t^{1+\alpha_n}} dt = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

მაშინ ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი (C, α_n) შეჯამებადობა x წერტილში.

ამასთან, კრებადობა თანაბარია ნებისმიერი ჩაკეტილ ინტერვალზე სადაც (2.8) და (2.9)

სრულდება თანაბრად.

შედეგი 2.6 ვთქვათ, $\alpha_0 \in (0, 1]$ და ნებისმიერი ნატურალური n -სთვის, $\alpha_n \in (\alpha_0, 1]$.

მაშინ თითქმის ყველა x -სთვის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი $(C, -\alpha_n)$

შეჯამებადია x წერტილში.

შედეგი 2.7 თეორემა 2.5 გამომდინარეობს თეორემა 8, როცა $-1 < \alpha < 0$.

2.1.3 ძირითადი შედეგის დამტკიცება

თეორემა 2.5 დამტკიცება: ვთქვათ $-1 < \alpha_n < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. ცნობილია, რომ (იხილე [52, თავი III, (5.4)])

$$(2.10) \quad \sigma_n^{-\alpha_n}(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi(x, t) K_n^{-\alpha_n}(t) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x, t) K_n^{-\alpha_n}(t) dt =: I_1 + I_2.$$

თუ გამოვიყენებთ ლემა (2.1)-ს და (2.3)-ს, მაშინ ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$(2.11) \quad |I_1| = \left| \frac{1}{\pi} [\Phi(x, t) K_n^{-\alpha_n}(t)] \Big|_0^{\frac{\pi}{n}} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Phi(x, t) [K_n^{\alpha_n}(x)]' dt \right| \leq \\ \leq \frac{1}{\pi} \Phi\left(x, \frac{\pi}{n}\right) \left(\frac{n}{1-\alpha_n} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{n} \frac{4n^2}{1-\alpha_n} \right) < \\ \leq \frac{5n}{1-\alpha_n} \Phi\left(x, \frac{\pi}{n}\right).$$

მეორე მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ (18) (იხილე [52], თავი III, (5.14)) წარმოდგენას, მივიღებთ:

$$(2.12) \quad I_2 = \frac{1}{\pi A_n^{-\alpha_n}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x, t) \frac{\sin \left[\frac{2n+1-\alpha_n}{2} t + \frac{\alpha_n \pi}{2} \right]}{\left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^{1-\alpha_n}} dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x, t) r_n^{-\alpha_n}(t) dt =: I_2^{(1)} + I_2^{(2)},$$

სადაც

$$(2.13) \quad r_n^{-\alpha_n}(t) = -\frac{\alpha_n}{n} \frac{\theta_n(t)}{\left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2}, \quad |\theta_n(t)| \leq 1.$$

მაშასადამე,

$$|I_2^{(2)}| = \left| \frac{1}{\pi} [\Phi(x, t) r_n^{-\alpha_n}(t)] \Big|_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Phi(x, t) [r_n^{-\alpha_n}(x)]' dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left| \Phi(x, \pi) \right| + \frac{1}{\pi} \left| \Phi\left(x, \frac{\pi}{n}\right) \right| r_n^{-\alpha_n} \left(\frac{\pi}{n} \right) + \\ + \frac{C}{\pi(1-\alpha_n)n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\Phi(x, t)}{t^3} dt.$$

ამრიგად, (2.13) და (2.8) გათვალისწინებით I_2 შესაფასებლად საკმარისია განვიხილოთ (იხილე 2.12)

$$M = \frac{n^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x, t) g_n(t) \cos nt dt,$$

სადაც

$$(2.14) \quad g_n(t) = \cos \frac{1-\alpha_n}{2} t \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{\alpha_n-1}.$$

ადვილი დასაწახია, რომ

$$(2.15) \quad 2M = \frac{n^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \left\{ \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left[\varphi(x, t) - \varphi\left(x, t + \frac{\pi}{n}\right) \right] g_n(t) \cos nt dt + \right. \\ + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi\left(x, t + \frac{\pi}{n}\right) \left[g_n(t) - g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos nt dt - \\ - \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi\left(x, t + \frac{\pi}{n}\right) g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \cos nt dt + \\ \left. + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x, t) g_n(t) \cos nt dt \right\} =: \sum_{i=1}^4 M_i.$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.9) პირობას მივიღებთ:

$$(2.16) \quad M_1 = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

ამასთან (2.15), შეფასება გვაძლევს

$$(2.17) \quad \left| g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - g_n(t) \right| \leq \frac{C(1-\alpha_n)}{nt^{2-\alpha_n}}.$$

ამიტომ (2.9) პირობის ძალით

$$\begin{aligned}
(2.18) \quad & \left| M_2 - \frac{n^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \varphi(x, t) \left[g_n(t) - g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] dt \right| \leq \\
& \leq \frac{n^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left[\varphi\left(x, t + \frac{\pi}{n}\right) - \varphi(x, t) \right] \left[g_n(t) - g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos ntdt \leq \\
& \leq C n^{\alpha_n-1} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left[\varphi\left(x, t + \frac{\pi}{n}\right) - \varphi(x, t) \right] \frac{1}{t^{2-\alpha_n}} dt \leq \\
& \leq C n^{\alpha_n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left[\varphi\left(x, t + \frac{\pi}{n}\right) - \varphi(x, t) \right] \frac{1}{t^{1-\alpha_n}} dt = o(1), \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

ამიტომ M_2 შესაფასებლად საკმარისია განვიხილოთ

$$M_2^* = \frac{n^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \varphi(x, t) \left[g_n(t) - g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos ntdt.$$

(2.15) ანალოგიურად, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
(2.19) \quad & 2M_2^* = \frac{n^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \left\{ \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \varphi(x, t) \left[g_n(t) - g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos ntdt + \right. \\
& + \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left[\varphi(x, t) - \varphi\left(x, t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \left[g_n(t) - g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos ntdt + \\
& + \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \varphi\left(x, t + \frac{\pi}{n}\right) \left[g_n(t) - 2g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) + g_n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) \right] \cos ntdt - \\
& \left. - \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \varphi\left(x, t + \frac{\pi}{n}\right) \left[g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - g_n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) \right] \cos ntdt + \right.
\end{aligned}$$

$$\left. + \int_{\pi - \frac{2\pi}{n}}^{\pi - \frac{\pi}{n}} \varphi(x, t) \left[g_n(t) - g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cos nt dt \right\} =: \sum_{i=5}^9 M_i$$

ადვილი დასაწახია, რომ თუ $t \in \left[\frac{\pi}{n}, \pi \right]$, მაშინ

$$\left| g_n(t)'' \right| \leq \frac{C(1-\alpha_n)}{t^{3-\alpha_n}}$$

და

$$\left| g_n^{(3)}(t) \right| \leq \frac{C(1-\alpha_n)}{t^{4-\alpha_n}}.$$

თუ გამოვიყენებთ, ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის თეორემას, გვექნება:

$$(2.20) \quad \left| g_n'(t) - g_n'\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right| \leq \frac{C(1-\alpha_n)}{nt^{3-\alpha_n}},$$

$$(2.21) \quad \left| g_n(t) - 2g_n\left(t + \frac{\pi}{n}\right) + g_n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) \right| \leq \frac{C(1-\alpha_n)}{n^2 t^{3-\alpha_n}},$$

$$(2.22) \quad \left| g_n'(t) - 2g_n'\left(t + \frac{\pi}{n}\right) + g_n'\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) \right| \leq \frac{C(1-\alpha_n)}{n^2 t^{4-\alpha_n}}.$$

ნაწილობითი ინტეგრებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $\cos n\tau$ არის მონოტონური $\left[0, \frac{2\pi}{n} \right]$ -ზე და ამასთანავე (2.8)-ის, (2.17)-ის და (2.20)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$(2.23) \quad \begin{aligned} |M_5| &\leq \frac{n^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \left\{ \left| g_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) - g_n\left(\frac{3\pi}{n}\right) \right| \left| \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \varphi(x, t) \cos nt dt \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| g_n\left(\frac{\pi}{n}\right) - g_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right| \left| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi(x, t) \cos nt dt \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi(x, \tau) \cos n\tau d\tau \left[g_n'(t) - g_n'\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] dt \right| \right\} \leq \\ &\leq \frac{Cn^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \frac{(1-\alpha_n)n^{2-\alpha_n}}{n} \Phi\left(x, \frac{2\pi}{n}\right) + \end{aligned}$$

$$+\frac{Cn^{\alpha_n}}{1-\alpha_n}\frac{1-\alpha_n}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}\frac{\Phi\left(x,\frac{2\pi}{n}\right)}{t^{3-\alpha_n}}dt=o(1),\quad n\rightarrow\infty.$$

მეორე მხრივ, (2.9)-ის და (2.17)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$(2.24) \quad |M_6| \leq \frac{Cn^{\alpha_n}}{1-\alpha_n}\frac{1-\alpha_n}{n}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{2\pi}{n}}\frac{\left|\varphi\left(x,t\right)-\varphi\left(x,t+\frac{2\pi}{n}\right)\right|}{t^{2-\alpha_n}}dt \leq \\ \leq Cn^{\alpha_n}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{2\pi}{n}}\frac{\left|\varphi\left(x,t\right)-\varphi\left(x,t+\frac{2\pi}{n}\right)\right|}{t^{1-\alpha_n}}dt=o(1),\quad n\rightarrow\infty.$$

დაუშვათ, რომ

$$b_n(t)=g_n(t)-2g_n\left(t+\frac{\pi}{n}\right)+g_n\left(t+\frac{2\pi}{n}\right),$$

მაშინ

$$|M_7|=\frac{n^{\alpha_n}}{1-\alpha_n}\left[b_n\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)\cos(\pi n-2\pi)\int_0^{\pi-\frac{2\pi}{n}}\varphi\left(x,\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau- \right. \\ \left.-b_n\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cos(2\pi)\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\varphi\left(x,\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau- \right. \\ \left.\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{2\pi}{n}}\int_0^t\varphi\left(x,\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau\left(b'_n(t)\cos nt-nb_n(t)\sin nt\right)dt\right].$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.21)-ს, (2.22)-ს და (2.8)-ს, მაშინ გვქვნება:

$$(2.25) \quad |M_7| \leq \frac{Cn^{\alpha_n}}{1-\alpha_n}\left[\frac{(1-\alpha_n)}{n^2\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)^{3-\alpha_n}}\left|\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}\varphi(x,\tau)d\tau\right|+ \right. \\ \left. +\frac{1-\alpha_n}{n^2n^{\alpha_n-3}}\left|\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{3\pi}{n}}\varphi(x,\tau)d\tau\right|+ \right. \\ \left. +\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{2\pi}{n}}\left|\int_{\frac{\pi}{n}}^{t+\frac{\pi}{n}}\varphi(x,\tau)d\tau\right|\left(\frac{1-\alpha_n}{n^2t^{4-\alpha_n}}+\frac{n(1-\alpha_n)}{n^2t^{3-\alpha_n}}\right)dt\right]=o(1),\quad n\rightarrow\infty.$$

ანალოგიურად, მივიღებთ

$$(2.26) \quad |M_8| = o(1), n \rightarrow \infty.$$

(2.17)-ის გათვალისწინებით, ადვილი დასაწახია, რომ

$$(2.27) \quad |M_9| = o(1), n \rightarrow \infty.$$

ამასთანავე (2.19) და (2.23)-(2.27) შეფასებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(2.28) \quad |M_2| = o(1), n \rightarrow \infty.$$

მეორეს მხრივ M_3 -თვის (იხილე (2.15)) გვაქვს

$$(2.29) \quad |M_3| \leq \frac{Cn^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Phi\left(x, \frac{2\pi}{n}\right) n \cdot n^{1-\alpha_n} dt = o(1), n \rightarrow \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ $g_n(t)$ არის კლებადი ფუნქცია და საშუალო მნიშვნელობის მე-2

თეორემის გამოყენებით $\left(\xi_n \in \left(\pi - \frac{\pi}{n}, \pi\right)\right)$ მივიღებთ (იხილე (2.15)):

$$\begin{aligned} |M_4| &= \left| \frac{n^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \int_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi(x, t) g_n(t) dt \right| = \\ &= \left| \frac{n^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} g_n\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) \int_{\pi-\frac{\pi}{n}}^{\xi_n} \varphi(x, t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{Cn^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \left| \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\xi_n} \varphi(x, t) dt - \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \varphi(x, t) dt \right| = \\ &= \frac{Cn^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \left| \int_{\frac{\pi}{n}+(\pi-\xi_n)}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \varphi\left(x, t+\xi_n+\frac{\pi}{n}-\pi\right) dt - \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \varphi(x, t) dt \right| \leq \\ &= \frac{Cn^{\alpha_n}}{1-\alpha_n} \left\{ \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \left| \varphi\left(x, t+\xi_n+\frac{\pi}{n}-\pi\right) - \varphi(x, t) \right| dt - \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}+\pi-\xi_n} \varphi(x, t) dt \right\}. \end{aligned}$$

თეორემა (2.5) პირობების გათვალისწინებით, გვექნება

$$(2.30) \quad |M_4| = o(1), n \rightarrow \infty.$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.10)-ს, (2.11)-ს, (2.15)-ს, (2.16)-ს, (2.19)-ს და (2.23)-(2.30)-ს მივიღებთ, რომ თეორემა (2.5)-ის პირველ ნაწილის სამართლიანობის მტკიცებას.

ადვილი დასანახია, რომ შესაბამისი შეზღუდვებში ფურიეს ტროგონომეტრიული მწკრივის (C, α_n) შეიძლება დამტკიცდეს ანალოგიურად.

შედეგი 2.7 დამტკიცება.

თუ გავითვალისწინებთ $\bar{\Phi}(x, t)$ განსაზღვრებას, მაშინ არსებობს ისეთი $t_0 \in [0, t]$, რომ

$$\bar{\Phi}(x, t) = \left| \int_0^{t_0} \varphi(x, u) du \right|.$$

ამრიგად,

$$\frac{1}{t} \bar{\Phi}(x, t) \leq \frac{1}{t_0} \left| \int_0^{t_0} \varphi(x, u) du \right|.$$

მაშასადამე, (7)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\bar{\Phi}(x, t) = o(t), \quad t \rightarrow +0,$$

და მუდმივი მიმდევრობისთვის α_n ($\alpha_n = \alpha \in (-1, 0]$) თავისთავად ეს იწვევს (2.7)-ს.

ვთქვათ, $\alpha \in (-1, 0]$ და $h \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right]$. ამრიგად, არსებობს ისეთი $h_0 \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right]$, რომ

$$\sup_{0 < h < \frac{\pi}{n}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{|\varphi(x, t) - \varphi(x, t+h)|}{t^{1+\alpha_n}} dt = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{|\varphi(x, t) - \varphi(x, t+h_0)|}{t^{1+\alpha_n}} dt.$$

ამრიგად,

$$\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha \sup_{0 < h < \frac{\pi}{n}} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{|\varphi(x, t) - \varphi(x, t+h)|}{t^{1+\alpha_n}} dt \leq h_0^\alpha \int_{h_0}^{\pi} \frac{|\varphi(x, t) - \varphi(x, t+h_0)|}{t^{1+\alpha_n}} dt.$$

მაშასადამე (9)-დან გამომდინარეობს (2.8).

დასკვნა

უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში, განხილულია H_ω კლასის ფუნქციები, რომლებისთვისაც შეფასებულია განზოგადებული ფურიეს კერძო ჯამის და გადახრა შესაბამისი ფუნქციიდან. მიღებულია ასიმპტოტური უტოლობები, რიგ შემთხვევაში ტოლობებიც, სადაც გამოყენებულია ფურიეს მწკრივის ტაბერსკის საშუალო. მიღებული შედეგებიდან, როგორც ერთ-ერთი კერძო შემთხვევა, გამომდინარეობს სტეპანეცის შედეგები.

განხილილია (C, α_n) შეჯამებადობის მეთოდი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივებისთვის. მიღებულია ჟიჟიაშვილის თეორემის ანალოგი განზოგადებული ჩეზაროს საშუალოებისათვის. თავის მხრივ, აღნიშნული თეორემა წარმოადგენს ფურიეს მწკრივის კრებადობის ლებეგის ნიშანის გამოზოგადოებას (C, α_n) შეჯამებადობისათვის.

ლიტერატურა

1. Akhobadze T., On a Theorem of M. Sato, *Acta math. Hungar.*, 130 (2011), 286 – 308.
2. Akhobadze T., On Generalized Cesàro Summability of Trigonometric Fourier series, *Bulletin of the Georgian Academy of Sciences*, 170 (2004), 23 – 24.
3. Akhobadze T., On the Convergence of Generalized Cesàro Means of Trigonometric Fourier Series. I, *Acta math. Hungar.*, 115 (2007), 59 – 78.
4. Akhobadze T., On the Convergence of Generalized Cesàro Means of Trigonometric Fourier Series. II, *Acta math. Hungar.*, 115 (2007), 59 – 78.
5. Akhobadze T., Zviadadze Sh. A note on the generalized Cesàro means of trigonometric Fourier series, *Journal of Contemporary Math. Analysis*, 54(5) (2019), 263 – 267.
6. Akhobadze T., Zviadadze Sh., A note on the generalized Cesàro means of trigonometric, Fourier series *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, 54 (2019), 263-267.
7. Dzyadyk V.K., Stepanets A.I., Asymptotic equalities for exact upper bounds in the approximation of functions of Hölder classes using Rogozinsky polynomials. - *Ukr. mat. zhurn.*, 24, No. 4, 1972, pp. 476-487. (in Russian)
8. Dzyadyk V.K., Stepanets A.I., On the sequence of zeros of the integral sine. - In the book: *Metric Questions in the Theory of Functions and Mappings*, Kyiv: Naukova Dumka, 1971, Issue 2, pp. 64-73. (in Russian)
9. Efimov A.V., Approximation of continuous periodic functions by Fourier sums. - *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics*, 24, No. 2 (1960), p. 243-296. (in Russian)
10. Efimov A.V., Approximation of functions with a given modulus of continuity by Fourier sums. - *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics*, 23, No. 1 (1959), p. 115-134. (in Russian)
11. Efimov A.V., On the approximation of continuous functions by Fourier sums. - *Good luck mat. Sciences*, 14, no. 2 (1959), p. 183-188. (in Russian)

12. Efimov A.V., On the approximation of some classes of continuous functions by Fourier sums and Fejer sums. - *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics*, 22, No. 1 (1958), p. 81-116. (in Russian)
13. Gergen I., Convergence and Summability Criteria for Fourier Series, *Quar. Jour. Math.*, 1 (1930), 252 – 275.
14. Kaplan I., Cesàro means of variable order, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 18 (5) (1960), 62 – 73, [in Russian].
15. Kolmogorov A., Zur Grossenordnung des Restliedes Fourierschen Reihen differenzierbaren Functionen.-*Ann.Math.*, 36, 1935 p.521-526.
16. Kolmogorov, Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen: Diss.- Cöttingen (1911).
17. Korneychuk M.P. On estimating class approximations by trigonometric polynomials. - In the book: *Research on Modern Problems of the Constructive Theory of Functions*. Moscow: Fizmatgiz, 1961, pp. 148-154. (in Russian)
18. Korneychuk N.P., Extreme problems of approximation theory - *Science*, 1976. - 230 p. (in Russian)
19. Lebesgue H., Recherches sur la Convergence des S´eries de Fourier, *Math. Ann.*, 61 (1905), 251 –280.
20. Lebesgue H., Sur les intégrales singulieres, *Ann. De Toulouse*, 1 (1909), 25-117.
21. Nady B., Methodes de summation des series de Fouries. I.-*Acta sci, math.*, 12 (1950), p. 204-210.
22. Nady B., Methodes de summation des series de Fouries. II.- *Casapis pro pestovani Mat. A Fis.*, 74 (1949), p. 210-219.
23. Nady B., Methodes de summation des series de Fouries. III.- *Acta sci, math.*, 13 (1950), p. 247-351.
24. Nady B., Sur une classes générale de procedes de summation pour les series de Fouries.- *Hung. Acta Math.*, 1, N 3 (1948), p. 14-521.
25. Nikolsky S.M. Approximation of periodic functions by trigonometric polynomials. - *Tr. Mat. Institute of the USSR Academy of Sciences*, 15 (1945), 1-76. (in Russian)

26. Nikolsky S.M. Asymptotic estimate of the remainder when approximated by Fourier sums. - Dokl. Academy of Sciences of the USSR, 22, No. 6 (1941), 386-389. (in Russian)
27. Nikolsky S.M. Fourier series of functions with a given modulus of continuity. - Dokl. Academy of Sciences of the USSR. 52 (1946), 191-193. (in Russian)
28. Nikolsky S.M. On linear methods for summing Fourier series. - Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics, 12 (1948), 191-193. (in Russian)
29. Nikolsky S.M. On linear methods for summing Fourier series. - Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics, 12 (1948), 259-278. (in Russian)
30. Nikolsky S.M. On some methods of approximation by trigonometric sums. - Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics, 4, no. 6 (1940), 509-520. (in Russian)
31. Nikolsky S.M. On the asymptotic behavior of the remainder when functions satisfying the Lipschitz condition are approximated by Fejér sums. Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics, 4, no. 6 (1940), 501-508. (in Russian)
32. Sahney B. and D.Waterman, On the Summability of Fourier Series, Rev. Roum Math. Pureset Appl., 26 (1981), 327 – 330.
33. Stechkin S. B., On the order of best approximations of non-terminating functions. – Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics, 15 (1951), p. 219-242. (in Russian)
34. Stechkin S.B., A few remarks about trigonometric polynomials. - Uspekhi Mat. Sciences, 10, no. 1 (1956), p. 159-166. (in Russian)
35. Stechkin S.B., On the best approximation of some classes of periodic functions by trigonometric polynomials. - Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics, 20 (1956), p. 643-648. (in Russian)
36. Stepanets A. I., Uniform approximations by trigonometric polynomials, Kiev: "Naukova dumka" (1981). (in Russian)
37. Taberski R., On General Dirichlet's integrals, Prace matyczne, 17 (1973), 499-512.
38. Telyakovsky S. A., Approximations of differentiable functions by partial sums of their Fourier series. - Mat. notes, 1968, 4, No. 3, p. 291-300. (in Russian)

39. Telyakovsky S. A., On the approximation of differentiable functions by linear means of their Fourier series. - *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics*, 24, No. 2 (1960), p. 213-242. (in Russian)
40. Telyakovsky S. A., On the norms of trigonometric polynomials and the approximation of differentiable functions by linear averages of their Fourier series. I.- *Tr. Mat. Institute of the USSR Academy of Sciences*, 1961, 62, p. 61-97. (in Russian)
41. Telyakovsky S. A., On the norms of trigonometric polynomials and the approximation of differentiable functions by linear averages of their Fourier series. II.- *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics*, 27, no. 2 (1963), p. 253-272. (in Russian)
42. Telyakovsky S.A., Conditions for the integrability of trigonometric series and their applications to the study of linear methods for summing Fourier series. - *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. Mathematics*, 28, No. 6 (1964), p. 1209-1236. (in Russian)
43. Tetunashvili Sh., On divergence of Fourier series by some methods of summability, *Journal of Function Spaces and Applications*, 2012 Article ID 542607, 9 pages, 2010.
44. Tetunashvili Sh., On divergence of Fourier trigonometric series by some methods of summability with variable orders, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 155 (2011), 130 – 131.
45. Tetunashvili Sh., On iterated summability of trigonometric Fourier series, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 139 (2005), 142 – 144.
46. Tetunashvili Sh., On the summability method defined by matrix of functions, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 148 (2008), 141 – 145.
47. Tetunashvili Sh., On the summability method depending on a parameter, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 150 (2009), 150 – 152.
48. Tetunashvili Sh., On the summability of Fourier trigonometric series of variable order, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 145 (2007), 130 – 131.
49. Zhizhiashvili L., On Some Properties of (C, α) -means of Trigonometric Fourier Series and Conjugate trigonometric series, *Matem. Sb.*, 63 (1964), 489 – 504.
50. Zhizhiashvili L., *Trigonometric Fourier Series and their Conjugates* (Kluwer Acad. Publ., 1996).
51. Zviadadze Sh. On generalizations of a theorem of Ferenc Lukacs. *Acta Math hungar.*, 122 (1-2) (2009), 105-120.

- 52. Zygmund A., Trigonometric Series, Vol.1 (Cambridge University Press, 1959).
- 53. Zygmund A., Trigonometric Series, Vol.2 (Cambridge University Press, 1959).

გამოქვეყნებული ნაშრომები

სადისერტაციო ნაშრომი დაეყრდნო შემდეგ გამოქვეყნებულ შრომებს:

1. T Akhobadze, G Gognadze, [On the Summability of Fourier Series by the Generalized Cesáro Method.](#) Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences) **57** (2022), 67-76.
2. T Akhobadze, G Gognadze, [On the Asymptotic Estimation for Generalized Dirichlet Integrals.](#) Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences, vol. **17**, no. 4 (2023), n. 20-23.
3. G Gognadze, [On the Asymptotic Estimation for Generalized Fourier Coefficients.](#) Seminar of Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics Reports, vol. **49** (2023), 59-66.