ავტორის სტილი დაცულია

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, მათემატიკის დეპარტამენტი

სადოქტორო პროგრამის სახელწოდება: მათემატიკა

მედეა იორდანიშვილი

ამონახსნის წარმოდგენის ლოკალური ფორმულები და ოპტიმიზაციის ამოცანები სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის შერეული საწყისი პირობით

მათემატიკაში დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

თამაზ თადუმაძე - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

ლელა ალხაზიშვილი - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასოც. პროფესორი

თბილისი 2023

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Faculty of Exact and Natural Sciences

Department of Mathematics

Name of Doctoral Program: Mathematics

Medea Iordanishvili

Local Representation Formulas of Solution And Optimization Problems for The Controlled Functional-Differential Equation with The Mixed Initial Condition

A thesis submitted for the degree of PhD in Mathematics

Scientific advisers:

Tamaz Tadumadze – Doctor of Physical Mathematical Sciences, Professor

Lela Alkhazishvili – Candidate of Physical Mathematical sciences, Acc. Professor

Tbilisi 2023

აბსტრაქტი

ნაშრომი, ეხება ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულებსა და ოპტიმიზაციის ამოცანებს არაწრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის შერეული საწყისი პირობით და ორი ტიპის მართვით. ნაშრომის პირველ ნაწილში, სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ ამონახსნის წარმოდგენის ლოკალური ფორმულები, პირველად, დამტკიცებულია საწყისი მონაცემების ახალი კლასისთვის. საწყისი მომენტისა და დაგვიანების პარამეტრების ვარიაციათა სხვადასხვა შემთხვევისთვის დადგენილია: ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულების მთავარი ნაწილის-ამონახსნის პირველი ვარიაციის ანალიზური სახე; ამონახსნის ნაზრდის რიგი საწყისი მონაცემების შეშფოთების მიმართ, რომელიც არსებითად გამოიყენება ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულების დამტკიცებისას; სახე წრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისა ვარიაციებში, რომელსაც აკმაყოფილებს ამონახსნის პირველი ვარიაცია. ანალიზური სახით აგებულია შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი. მიღებული შედეგები დაკონკრეტებულია წრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის. ფორმულებში გამოვლენილია საწყისი მონაცემების შეშფოთებისა და შერეული საწყისი პირობის ეფექტები. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, დაგვიანების პარამეტრების, საწყისი ვექტორის, საწყისი და მართვის ფუნქციების ერთობლიობა. შერეული საწყისი პირობა ნიშნავს, რომ საწყის მომენტში ტრაექტორიის კოორდინატების ნაწილის მნიშვნელობა არ ემთხვევა შესაბამისი საწყისი ფუნქციის მნიშვნელობას ე. ი. ადგილი აქვს წყვეტას, ხოლო-დარჩენილი ნაწილის მნიშვნელობა ემთხვევა შესაბამისი საწყისი ფუნქციის მნიშვნელობას ე. ი. ადგილი აქვს უწყვეტობას. ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების დამტკიცებისას. ნაშრომის მეორე ნაწილში, ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის, ორი ტიპის მართვით და შერეული საწყისი პირობით, განხილულია ოპტიმიზაციის ამოცანა ზოგადი სასაზღვრო პირობებით და ფუნქციონალით. ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულების საფუძველზე, საწყისი-საბოლოო მომენტების და დაგვიანების პარამეტრების ვარიაციათა სხვადასხვა კომბინაციისთვის, დამტკიცებულია საწყისი და საბოლოო მომენტების, დაგვიანების პარამეტრების, საწყისი ვექტორის,

საწყისი და მართვის ფუნქციების ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები. მიღებული შედეგები დაკონკრეტებულია ოპტიმალური ამოცანისთვის დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით, სწრაფქმედების და წრფივი ამოცანებისთვის. გარდა ამისა, განხილულია ოპტიმალური ამოცანა საბაზრო ურთიერთობის მოდელისთვის, რომლისთვისაც მიღებულია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები.

Abstract

The work concerned with the presentation formulas of the solution and optimization problems for the nonlinear functional differential equation with the mixed initial condition and two types controls. In the first part of the work, the fact that the local formulas of the solution presentation are proved for the first time for a new class of initial data is a novelty. For various cases of variations of the initial moment and delay parameters are established: the analytical form of the main part-of the first variation of the solution; the order of solution increments with respect to the initial data perturbations, which is essentially used in the proof of the formulas for the solution presentation; the form of the linear functional-differential equation in variations, which satisfies the first variation of solution. An approximate solution of the perturbed equation is constructed in the analytical form. The obtained results are specified for the linear functional differential equation. The effects of initial data perturbation and mixed initial condition are identified in the formulas. Under the initial data is meant a set of initial moment, delay parameters, initial vector, initial and control functions. Under the initial data we mean a set of initial moment, delay parameters, initial vector, initial and control functions. A mixed initial condition means that at the initial moment the value of the part of the trajectory coordinates does not coincide with the value of the corresponding initial function i. e. take place discontinuity and the value of the remaining part coincides with the value of the corresponding initial function i. e. take place continuity. The presentation formulas of the solution play an important role in proving the necessary optimality conditions. In the second part of the work, for the functional differential equation with two types controls and mixed initial condition, the optimization problem with general boundary conditions and functional is considered. On the bases of presentation formulas of the solution, the necessary conditions of optimality for initial and final moments, delay parameters, initial vector, initial and control functions are proved for various combinations of variations of initial-final moments and delay parameters. The obtained results are specified for the optimal problem with fixed ends and integral functional, time optimal and linear problems. Besides, the optimal problem for the market relationship model is discussed, for which the necessary conditions of optimality are obtained.

შინაარსი

შესავალი

ცნობილია, რომ სამართი სისტემები რომელთა ყოფაქცევა მოცემულ მომენტში დამოკიდებულია სისტემის მდგომარეობაზე წარსულში, აღიწერებიან დაგვიანების შემცველი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებით [17, 25, 33, 38, 39, 43, 44, 57]. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ საბაზრო ურთიერთობის თეორიული მოდელი. ვთქვათ, i_1 და i_2 საქონლის დასამზადებლად საჭიროა x^1 და x^2 სახის ნედლეული, რომელთა კონცენტრაცია $t \in [t_0, t_1]$ მომენტში არის $x^1 = x^1(t)$ და $x^2 = x^2(t)$. ვთქვათ ამ კონცენტრაციების დინამიკა აღიწერება დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = ax^1(t) + bx^2(t), \\ \dot{x}^2(t) = cx^1(t) + dx^2(t). \end{cases}$$

დავუშვათ, საბაზრო ურთიერთობა მოთხოვნა და მიწოდება i_1 საქონლისთვის აღიწერება $D_1(t,\omega)$ და $S_1(t,x^1,x^2,u)$ ფუნქციებით, ხოლო i_2 საქონლისთვის აღიწერება $D_2(t,w)$ და $S_2(t,x^1,x^2,v)$ ფუნქციებით. ვთქვათ, t მომენტში i_1 საქონლის ღირებულება არის $u(t)$, ხოლო i_2 საქონლის ღირებულება- $v(t)$. ვიგულისხმოთ, რომ t მომენტში უნდა დაკმაყოფილდეს: ა) მოთხოვნა i_1 საქონელზე, რომელიც შეკვეთილი იყო $t-\rho$ მომენტში, სადაც $\rho > 0$; ბ) მოთხოვნა i_2 საქონელზე, რომელიც შეკვეთილი იყო $t-\theta$ მომენტში, სადაც $\theta > 0$.

ფუნქციას

$$E_1(t) = D_1(t, u(t-\rho)) - S_1(t, x^1(t-\tau), x^2(t-\sigma), u(t))$$

ეწოდება დისბალანსის ინდექსი i_1 საქონლისთვის. $D_1(t,u(t-\rho))$ მიუთითებს $t-\rho$ მომენტებში შეკვეთილი i_1 საქონლის რაოდენობას, ხოლო

$$S_1(t, x^1(t-\tau), x^2(t-\sigma), u(t))$$

მიუთითებს t მომენტში მიწოდებული i_1 საქონლის რაოდენობას, რომლის დასამზადებლად საჭიროა $t-\tau$ მომენტში გამოყოფილი $x^1(t-\tau)$ რაოდენობის ნედლეული, სადაც $\tau > 0$, ხოლო $t-\sigma$ მომენტში, სადაც $\sigma > 0$ - $x^2(t-\sigma)$ რაოდენობის ნედლეული. აქ გათვალისწინებულია ის გარემომება, რომ ნედლეულის გამოყოფიდან საქონლის დამზადება ხდება გარკვეული დროის შემდეგ. ანალოგიურად,

$$E_2(t) = D_2(t, v(t-\theta)) - S_2(t, x^1(t-\tau), x^2(t-\sigma), v(t))$$

ფუნქციას ეწოდება დისბალანსის ინდექსი i_2 საქონლისთვის. $D_2(t, v(t-\theta))$ მიუთითებს $t-\theta$ მომენტებში შეკვეთილი i_2 საქონლის რაოდენობას, ხოლო

$$S_2(t, x^1(t-\tau), x^2(t-\sigma), v(t))$$

მიუთითებს t მომენტში მიწოდებული i_2 საქონელის რაოდენობას, რომლის დასამზადებლად საჭიროა $t-\tau$ მომენტში გამოყოფილი $x^1(t-\tau)$ რაოდენობის ნედლეული, ხოლო $t-\sigma$ მომენტში- $x^2(t-\sigma)$ რაოდენობის ნედლეული. თუ $E_1(t) = 0$, მაშინ ადგილი არა აქვს დისბალანსს, ე. ი. t მომენტში მომხმარებელს მიეწოდება i_1 საქონლის მოთხოვნილი რაოდენობა. თუ $E_1(t) > 0,$ მაშინ მოთხოვნა აჭარბებს მიწოდებას. თუ $E_1(t) < 0,$ მაშინ მიწოდება აჭარბებს მოთხოვნას. ანალოგიურად განიხილება შემთხვევები i_2 საქონლისთვის. დროში დისბალანსის დინამიკის დახასიათების მიზნით $t \in [t_0, t_1]$ მომენტისთვის შემოვიღოთ დისბალანსის ინტეგრალური ინდექსები

$$x^3(t) = x_0^3 + \int_{t_0}^{t} \{D_1(\xi, u(\xi-\rho)) - S_1(\xi, x^1(\xi-\tau), x^2(\xi-\sigma), u(\xi))\} d\xi, x_0^3 = E_1(t_0).$$

$$x^4(t) = x_0^4 + \int_{t_0}^{t} \{D_2(\xi, v(\xi-\theta)) - S_2(\xi, x^1(\xi-\tau), x^2(\xi-\sigma), v(\xi))\} d\xi, x_0^4 = E_2(t_0).$$

ამრიგად, ზემოაღნიშნულ პირობებში, საბაზრო ურთიერთობა შეგვიძლია დავახასი-ათოთ ფაზურ კოორდინატებსა და მართვებში დაგვიანების შემცველი ფუნქციონა-ლურ-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით

$$
\begin{cases}
\dot{x}^1(t) = ax^1(t) + bx^2(t), \\
\dot{x}^2(t) = cx^1(t) + bx^2(t), \\
\dot{x}^3(t) = D_1(t, u(t-\rho)) - S_1(t, x^1(t-\tau), x^2(t-\sigma), u(t)), \\
\dot{x}^4(t) = D_2(t, v(t-\theta)) - S_2(t, x^1(t-\tau), x^2(t-\sigma), v(t)).
\end{cases} \tag{1}
$$

სადისერტაციო ნაშრომში, სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის

$$
\dot{x}(t) = (\dot{p}(t), \dot{q}(t))^T = f(t, x(t), p(t-\tau), q(t-\sigma), u(t), u(t-\rho), v(t), v(t-\theta)),\ x(t) \in R^n \tag{2}
$$

შერეული საწყისი პირობით

$$
x(t) = (p(t), q(t))^T = (\varphi(t), g(t))^T,\ t < t_0,\ x(t_0) = (p_0, g(t_0))^T. \tag{3}
$$

განხილულია პრობლემები, რომლებიც დაკავშირებულია ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულებთან (თავი 1) და ოპტიმიზაციის ამოცანებთან (თავი 2). აქვე აღვნიშნავთ, რომ ამ თავებში მიღებული შედეგები მჭიდრო კავშირშია ერთმანეთთან. სახელდობრ, მე-2 თავის ძირითადი შედეგები, ელემენტის ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები, არსებითად ეყრდნობა პირველ თავში მიღებულ ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულებს. სხვადასხვა კლასის ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისა და მათი შესაბამისი ოპტიმიზაციის ამოცანების გამოკვლევას მრავალი ნაშრომი მიეძღვნა, მათ შორისაა ნაშრომები: არუთინოვი და მარდანოვი [6]; ბეიკერი [8]; ბენქსი [9]; ბეკლარიანი [10]; ბელმანი და კუკი [11]; ბოჩია და ვინტერი [12]; დრაივერი [13]; ელსგოლცი და ნორკინი [18]; გაბასოვი და კირილოვა [19]; გოლმანი და მაურერი [22]; ჰალანაი [23, 24]; ჰეილი [25]; კოლმანოვსკი და მიშკისი [38, 39]; მანიტიუსი [43]; მარდანოვი, მანსიმოვი და მელიქოვი [45]; მიშკისი [47]; მორდუხოვიჩი [48]; ნოიშტადტი [49]; ოგუსტორელი [50]; ვარგა [60]; ალხაზიშვილი [1]; აშორდია [7]; გორგოძე [21]; დვალიშვილი და რამიშვილი [14]; თადუმაძე [53, 55, 57]; თადუმაძე და ალხაზიშვილი [54]; თადუმაძე და შავაძე [58]; კიღურაძე და პუჟა [37]; კოპლატაძე [40]; მაჩაიძე [41]; მარკოზაშვილი [46]; შავაძე [51, 52]; ხარატიშვილი [32]; ხარატიშვილი და თადუმაძე [34-36] და სხვა.

ქვემოთ, თავების მიხედვით მოკლედ იქნება აღწერილი სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები.

თავი 1: (3) პირობას ეწოდება შერეული საწყისი პირობა, რადგანაც იგი შედგება ორი ნაწილისგან: პირველი-წყვეტილი ნაწილი $p(t) = \varphi(t),\ t < t_0$, $p(t_0) = p_0$, სადაც საზოგადოდ $\varphi(t_0) \neq p_0$. წყვეტილობა საწყის მომენტში შეიძლება დაკავშირებული იყოს დინამიური პროცესის მყისიერ ცვლილებასთან (ინვესტიციის, გარემო პირობების, ვირუსების კონცენტრაციის და ა. შ. ცვლილება); მეორე- უწყვეტი ნაწილი $q(t) = g(t), t \le t_0$, რადგანაც ყოველთვის $q(t_0) = g(t_0)$.

(2)-(3) ამოცანას ვუწოდოთ

$$\mu = (t_0, \tau, \sigma, \theta, p_0, \varphi(t), g(t), u(t), v(t))$$

ელემენტის შესაბამისი კოშის ამოცანა.

$$\mu_0 = (t_{00}, \tau_0, \sigma_0, \theta_0, p_{00}, \varphi_0(t), g_0(t), u_0(t), v_0(t))$$

ეწოდება საწყისი ელემენტი, ხოლო მის შესაბამის ამოცანას

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), p(t-\tau_0), q(t-\sigma_0), u_0(t), u_0(t-\rho), v_0(t), v_0(t-\theta_0)), \qquad (4)$$

$$x(t) = (\varphi_0(t), g_0(t))^T,\ t < t_{00},\ x(t_{00}) = (p_{00}, g(t_{00}))^T. \qquad (5)$$

ეწოდება საწყისი ამოცანა. $\delta\mu = \mu - \mu_0$ ეწოდება μ_0 ელემენტის ვარიაცია, ცხადია $\mu = \mu_0 + \delta\mu$. ამრიგად, $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ ელემენტი მიიღება μ_0 ელემენტის შეშფოთებით ანუ (2)-(3) ამოცანა მიიღება (4)-(5) ამოცანის შეშფოთებით. ვთქვათ t_{10} რაიმე ინტერვალის ბოლო წერტილია და t_{10} წერტილის მიდამოში არსებობს თავდაპირველი (4)-(5) და შეშფოთებული (2)-(3) ამოცანების ამონახსნები, შესაბამისად, $x(t;\mu_0)$ და $x(t;\mu_0+\delta\mu)$. მცირე $\delta\mu$ ვარიაციის პირობებში (სიმცირის შესახებ იხ. პუნქტი 1.1), დამტკიცებულია $x(t;\mu_0+\delta\mu)$ ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულები t_{10} წერტილის მიდამოში. სახელდობრ, დამტკიცებულია შემდეგი წარმოდგენა

$$x(t;\mu_0+\delta\mu) = x(t;\mu_0) + \delta x(t;\delta\mu) + o(t;\delta\mu), \qquad (6)$$

სადაც $\delta x(t;\delta\mu)$ არის წრფივი ოპერატორი $\delta\mu$ შეშფოთების მიმართ, ხოლო $o(t;\delta\mu)$ არის მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე $|\delta\mu|$ სიმცირესთან შედარებით თანაბრად t

მიმართ. დადგენილია $\delta x(t;\delta\mu)$ ოპერატორის ანალიზური სახე, რომელშიც გამოვლენილია შერეული საწყისი პირობის და საწყისი მონაცემების შეშფოთების ეფექტები. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, ფაზურ კოორდინატებში შემავალი მუდმივი დაგვიანებების, უწყვეტად წარმოებად მართვაში შემავალი მუდმივი დაგვიანების, საწყისი ვექტორის, საწყისი და მართვის ფუნქციების ერთობლიობა. ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულა (6) მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების დამტკიცებისას [9, 19, 20, 32, 34, 45, 50, 58]. გარდა ამისა, ეს ფორმულები გამოიყენება შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის მოძებნაში. ნაშრომში, სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ [36, 42, 56] -ში განხილული შემთხვევებისგან განსხვავებით: ერთის მხრივ- განტოლება შეიცავს ორი ტიპის მართვას, მეორეს მხრივ- საწყისი მონაცემების ასეთი ფართო კლასი შერეული საწყისი პირობის გათვალისწინებით, პირველად არის განხილული. ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულები ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის, პირველად, დამტკიცებული იყო გამყრელიძის მიერ [20], ხოლო ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებების სხვადასხვა კლასებისთვის, როცა საწყისი მომენტი ფიქსირებულია დამტკიცებული იყო [9, 19, 45, 50] შრომებში. ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულები და წყვეტილი საწყისი პირობის ეფექტები, საწყისი მომენტის ვარიაციის შემთხვევაში, პირველად, მიღებული და გამოვლენილი იყო თადუმაძის მიერ [53]. სხვადასხვა კლასის ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებებისთვის, საწყისი მომენტის ვარიაციის, წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობის გათვალისწინებით ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულები დამტკიცებული იყო შრომებში [34, 52, 54, 57, 58]. პირველი თავის 1.1 პუნქტში მოყვანილია ამონახსნის წარმოდგენასთან დაკავშირებული სხვადასხვა ტიპის თეორემები. თეორემების ტიპი დამოკიდებულია განტოლების მარჯვენა მხარის თვისებაზე, t_{00} და τ_0-ის ვარიაციათა კომბინაციაზე (მარჯვნიდან, მარცხნიდან, ორივე მხრიდან და ა. შ.). აქვე ჩამოწერილია შერეული საწყისი პირობისა და საწყისი მონაცემების შეშფოთების ეფექტები. გარდა ამისა, ამოწერილია განტოლება ვარიაციებში, რომელსაც აკმაყოფილებს ამონახსნის პირველი ვარიაცია; მოყვანილია შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის ანალიზური სახე, აღწერილია მისი

მოძებნის ორი შესაძლებლობა. ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა დაკონკრეტებულია წრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის. 1.2 და 1.3 პუნქტებში დადგენილია ამონახსნის ნაზრდის შეფასება t_{00} მომენტის მარცხნიდან და მარჯვნიდან ვარიაციის შემთხვევაში. სახელდობრ, დამტკიცებულია რომ ამონახსნის ნაზრდის შეფასება არის $|\delta\mu|$ რიგის. აღნიშნული შეფასებების საფუძველზე მომდევნო პუნქტებში 1.4 და 1.5-ში, [57]-ში მოყვანილი სქემის მიხედვით, დამტკიცებულია ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულები.

თავი 2: სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის, ორი ტიპის მართვით და შერეული საწყისი პირობით, განხილულია ოპტიმიზაციის ამოცანა ზოგადი სასაზღვრო პირობებით და ფუნქციონალით. დამტკიცებულია საწყისი და საბოლოო მომენტების, დაგვიანების პარამეტრების, საწყისი ვექტორის, საწყისი და მართვის ფუნქციების. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები. მიღებული შედეგები დაკონკრეტებულია ამოცანისთვის დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით, წრფივი და სწრაფქმედების ამოცანისთვის. გარდა ამისა, განხილულია ოპტიმალური ამოცანა საბაზრო ურთიერთობის მოდელისთვის, რომლისთვისაც მიღებულია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობა–პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის ანალოგი სწრაფქმედების ოპტიმალური ამოცანისათვის ფიქსირებული საწყისი მომენტითა და დამაგრებული ბოლოებით, სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის ერთი მუდმივი დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებში, პირველად, დამტკიცებული იყო ხარატიშვილის მიერ ნაშრომში [32]. ამ შედეგის გავრცელებას ოპტიმიზაციის ამოცანებზე სხვადასხვა კლასის სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის მრავალი ნაშრომი მიეძღვნა, მათ შორის [1, 6, 9, 10, 12, 19, 21, 24, 34, 43, 45-51, 57, 60] განსხვავებით ზემოჩამოთვლილი შრომებისგან, ნაშრომში სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ აქ შერეული საწყისი პირობების ფონზე განიხილება ამოცანა, სადაც ტრადიციული საწყისი მონაცემების ოპტიმიზაციასთან ერთად მოითხოვება ოპტიმალურად შერჩევა როგორც ორი ტიპის მართვის, ასევე ფაზურ კოორდინატებსა და ერთ-ერთ მართვაში შემავალი დაგვიანების პარამეტრების.

2.1 პუნქტში განხილულია შემდეგი ამოცანა

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), p(t-\tau), q(t-\sigma), u(t), u(t-\rho), v(t), v(t-\theta)), t \in [t_0, t_1], \\ x(t) = (\varphi(t), g(t))^T, \ t < t_0, \ x(t_0) = (p_0, g(t_0))^T, \\ z^i(t_0, t_1, \tau, \sigma, \theta, p_0, g(t_0), x(t_1)) = 0, i = 1, ..., l, \\ z^0(t_0, t_1, \tau, \sigma, \theta, p_0, g(t_0), x(t_1)) \to \min. \end{cases}$$

მოყვანილია $(t_0, t_1, \tau, \sigma, \theta, p_0, \varphi(t), g(t), u(t), v(t))$ ელემენტის ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები: ოპტიმალური t_{00}, t_{10}, τ_0-თვის უტოლობებისა და ტოლობების სახით. აღნიშნული სახეობები დამოკიდებულია ვარიაციის ტიპზე (მარცხნიდან, მარჯვნიდან, ორივემხრიდან); ოპტიმალური σ_0, θ_0-თვის ტოლობების სახით; ოპტიმალური $p_{00}, \varphi_0(t), g_0(t), u_0(t), v_0(t)$-თვის მაქსიმუმის პრინციპის სახით. გარდა ამისა, ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები მოყვანილია ოპტიმალური ამოცანისთვის შერეული საწყისი პირობით, დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით; სწრაფქმედების ამოცანისთვის; წრფივი ამოცანისთვის. 2.2 პუნქტში განხილულია ოპტიმიზაციის ამოცანა შერეული საწყისი პირობით საბაზრო ურთიერთობის (1) მოდელისთვის. ჩამოყალიბებულია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები. 2.3 პუნქტში დამტკიცებულია ელემენტის ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები მარჯვნიდან ვარიაციის შემთხვევაში გამყრელიძე-ხარატიშვილის მეთოდით [34, 57], სახელდობრ, აგებულია ოპტიმიზაციის ამოცანის შესაბამისი ასახვა და დამტკიცებულია წერტილის კრიტიკულობა; გამოთვლილია ასახვის დიფერენციალი და კრიტიკულობის აუცილებელი პირობიდან გამოყვანილია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები.

ნაშრომში გამოყენებულია სამმაგი ნუმერაცია: პირველი ციფრი ნიშნავს თავის ნომერს, მეორე ციფრი-პუნქტის ნომერს, მესამე ციფრი-ფორმულის ნომერს.

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია [2-5, 15,16, 26-31, 59] შრომებში, იგი მოხსენებული იყო მრავალ საერთაშორისო კონფერენციაზე.

თავი I. ამონახსნის წარმოდგენის ლოკალური ფორმულები სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის შერეული საწყისი პირობით, დაგვიანებებით ფაზურ კოორდინატებსა და მართვებში

1.1. ამოცანის დასმა და ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ, R^n არის $x=(x^1,...,x^n)^T$ წერტილების n–განზომილებიანი ვექტორული სივრცე, სადაც T სიმბოლო აღნიშნავს ტრანსპონირების ოპერაციას,

$$|x|^2=\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2.$$

ვთქვათ,

$$s_{11}>s_{10}>s_{01}>s_{00},\ \tau_2>\tau_1>0,\ \sigma_2>\sigma_1>0,\quad \rho>0,\ \theta_2>\theta_1>0$$

მოცემული რიცხვებია ისეთი, რომ შესრულებულია უტოლობა

$$s_{10}-s_{01}>\max\{\tau_2,\sigma_2,\rho,\theta_2\}.$$

ვიგულისხმოთ, რომ

$$P\subset R^m,\ Q\subset R^k, U\subset R^r, V\subset R^l$$

არის ღია შემოსაზღვრული სიმრავლეები, ამასთან

$$x=(p,q)^T\in O=(P,Q)^T\subset R^n,\ n=m+k;$$

ვექტორ ფუნქცია

$$f(t,x,p_1,q_1,u,\omega,v,w)=(f^1(t,x,p_1,q_1,u,\omega,v,w),...,f^n(t,x,p_1,q_1,u,\omega,v,w))^T$$

უწყვეტია სიმრავლეზე $I\times O\times P\times Q\times U^2\times V^2$, სადაც $I=[s_{00},s_{11}]$ და უწყვეტად წარმოებადია x,p_1,q_1,u,ω,v,w ცვლადების მიმართ. Φ და G-თი აღვნიშნოთ, შესაბამისად, უწყვეტად წარმოებადი საწყისი ფუნქციების სიმრავლე

$$\varphi(t)\in P, t\in I_1=[\hat{\tau},s_{01}],\ \hat{\tau}=s_{00}-\max\{\tau_2,\sigma_2\}$$

და $g(t)\in Q, t\in I_1$. შემოვიღოთ მართვის ფუნქციების სიმრავლე: Ω არის უბან-უბან უწყვეტი $u(t)\in U, t\in I_2=[\hat{\rho},s_{11}], \hat{\rho}=s_{00}-\rho$ მართვის ფუნქციების სიმრავლე,

რომლებსაც აქვთ შემდეგი თვისება, $cl u(I_2)$ სიმრავლე კომპაქტია და შედის U -ში; W არის უწყვეტად წარმოებადი $v(t) \in V, t \in I_3 = [\hat{\theta}, s_{10}], \hat{\theta} = s_{00} - \theta_2$ მართვის ფუნქციების სიმრავლე. ყოველ

$$\mu = (t_0, \tau, \sigma, \theta, p_0, \varphi(t), g(t), u(t), v(t)) \in \Lambda = (s_{00}, s_{01}) \times (\tau_1, \tau_2) \times (\sigma_1, \sigma_2) \times (\theta_1, \theta_2)$$

$$\times P \times \Phi \times G \times \Omega \times W$$

ელემენტს შევუსაბამოთ სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = (\dot{p}(t), \dot{q}(t))^T = f(t, x(t), p(t-\tau), q(t-\sigma), u(t), u(t-\rho), v(t), v(t-\theta)) \qquad (1.1.1)$$

საწყისი პირობით

$$x(t) = (\varphi(t), g(t))^T, \ t \in [\hat{\tau}, t_0), \ x(t_0) = (p_0, g(t_0))^T. \qquad (1.1.2)$$

(1.1.2) ეწოდება შერეული საწყისი პირობა, იგი შედგება ორი ნაწილისგან: პირველი-წყვეტილი ნაწილი $p(t) = \varphi(t), \ t < t_0$, $p(t_0) = p_0$ სადაც საზოგადოდ $\varphi(t_0) \neq p_0$. წყვეტილობა საწყის მომენტში შეიძლება დაკავშირებული იყოს დინამიური პროცესის მყისიერ ცვლილებასთან (ინვესტიციის, გარემო პირობების, ვირუსების კონცენტრაციის და ა. შ. ცვლილებასთან); მეორე- უწყვეტი ნაწილი $q(t) = g(t), t \in [\hat{\tau}, t_0]$, რადგანაც ყოველთვის $q(t_0) = g(t_0)$.

განსაზღვრება 1.1.1. ვთქვათ $\mu \in \Lambda$. ფუნქციას $x(t) = x(t; \mu) \in O, t \in [\hat{\tau}, t_1], \ t_1 \in (s_{10}, s_{11})$ ეწოდება (1.1.1) განტოლების ამონახსნი (1.1.2) საწყისი პირობით ან μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_1]$ ინტერვალზე, თუ იგი აკმაყოფილებს (1.1.2) პირობას, ხოლო $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე აბსოლუტურად უწყვეტია და თითქმის ყველა (თ. ყ.) $t \in [t_0, t_1]$ აკმაყოფილებს (1.1.1) განტოლებას.

განტოლების მარჯვენა მხარეზე მოთხოვნილი პირობები, ყოველი ელემენტისთვის უზრუნველყოფს, ლოკალურად, შესაბამისი ამონახსნის არსებობას და ერთადერთობას ინტერვალზე $[\hat{\tau}, t_0 + \delta]$, სადაც $\delta > 0$ მცირე რიცხვია.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$|\mu| = |t_0| + |\tau| + |\sigma| + |\theta| + |p_0| + \|\varphi\|_1 + \|g\|_1 + \|u\| + \|v\|_1,$$

სადაც

$$\|\varphi\|_1=\sup\{|\varphi(t)|+|\dot{\varphi}(t)|: t\in I_1\},\ \|u\|=\sup\{|u(t)|: t\in I_2\}, \|v\|_1=\sup\{|v(t)|+|\dot{v}(t)|: t\in I_3\};$$

$\varepsilon>0$ და $\mu_0=(t_{00},\tau_0,\sigma_0,\theta_0,p_{00},\varphi_0(t),g_0(t),u_0(t),v_0(t))\in\Lambda$ არის ფიქსირებული რიცხვი და ელემენტი;

$t_{00},\tau_0,\sigma_0,\theta_0,p_{00},\varphi_0(t),g_0(t),u_0(t),v_0(t)$ და μ_0 -ის ვარიაცია ეწოდება, შესაბამისად, შემდეგს

$$\delta t_0=t_0-t_{00},\ \delta\tau=\tau-\tau_0,\ \delta\sigma=\sigma-\sigma_0,\ \delta\theta=\theta-\theta_0,$$

$$\delta p_0=p_0-p_{00},\delta\varphi(t)=\varphi(t)-\varphi_0(t),\ \delta g(t)=g(t)-g_0(t),\delta u(t)=u(t)-u_0(t),\delta v(t)=v(t)-v_0(t),$$

$$\delta\mu=\mu-\mu_0.$$

ცხადია,

$$\begin{cases} t_0=t_{00}+\delta t_0,\tau=\tau_{00}+\delta\tau,\sigma=\sigma_{00}+\delta\sigma,\theta=\theta_{00}+\delta\theta,p_0=p_{00}+\delta p_0,\\ \varphi(t)=\varphi_0(t)+\delta\varphi(t),g(t)=g_0(t)+\delta g(t),u(t)=u_0(t)+\delta u(t),v(t)=v_0(t)+\delta v(t),\\ \mu=\mu_0+\delta\mu; \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

შემდეგ,

$$\Lambda_\varepsilon(\mu_0)=\{\mu\in\Lambda:|\mu-\mu_0|\le\varepsilon\},\ \Lambda_\varepsilon(\mu_0)-\mu_0=\{\mu-\mu_0:\mu\in\Lambda_\varepsilon(\mu_0)\};$$

$\Lambda_\varepsilon(\mu_0)-\mu_0$ შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$\Lambda_\varepsilon(\mu_0)-\mu_0=\{\delta\mu\in\Lambda-\mu_0:|\delta\mu|\le\varepsilon\}.$$

ვთქვათ $x_0(t)$ არის μ_0 ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული ინტერვალზე $[\hat{\tau},t_{10}],\ t_{10}\in(s_{10},s_{11})$. არსებობს რიცხვები $\varepsilon_1>0$ და $\delta_1>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერ $\mu\in\Lambda_{\varepsilon_1}(\mu_0)$ ელემენტს შეესაბამება ამონახსნი $x(t;\mu)$ განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე, თანაც $(t_{10}-\delta_1,t_{10}+\delta_1)\in(s_{10},s_{11})$. (იხ. ლემა 1.2.2). ერთადერთობის ძალით ამონახსნი $x(t;\mu_0)$ არის $x_0(t)$ ამონახსნის გაგრძელება

$[\hat{\tau}, t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე. ამიტომ შემდგომში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $x_0(t)$ ამონახსნი განსაზღვრულია $[\hat{\tau}, t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე. შემოვიღოთ $x_0(t)=x(t;\mu_0)$ ამონახსნის ნაზრდი

$$x(t;\mu_0+\delta\mu)-x_0(t):=\Delta x(t;\delta\mu),\ \delta\mu\in\Lambda_{\varepsilon_1}(\mu_0)-\mu_0, t\in[\hat{\tau}, t_{10}+\delta_1].$$

ამოცანა: ამონახსნის ნაზრდი $x(t;\mu_0+\delta\mu)-x_0(t)$ წარმოადგინეთ ორი შესაკრების სახით, სადაც პირველი შესაკრები იქნება წრფივი ოპერატორი $\delta\mu$ ვარიაციის მიმართ, ხოლო მეორე შესაკრები მაღალი რიგის უსასრულო მცირე

$$|\delta\mu|=|\delta t_0|+|\delta\tau|+|\delta\sigma|+|\delta\theta|+|\delta p_0|+|\delta\varphi\|_1+\|\delta g\|_1+\|\delta u\|+\|\delta v\|_1 \qquad (1.1.4)$$

სიდიდესთან შედარებით. ქვემოთ, მოყვანილი იქნება ხუთი ტიპის თეორემა, რომლებიც შეესაბამებიან t_{00}, τ_0 პარამეტრების ერთდროულად ვარიაციას მარცხნიდან ან მარჯვნიდან; t_{00} ვარიაციას მარცხნიდან ან მარჯვნიდან, ხოლო τ_0 ვარიაციას ორივე მხრიდან; t_{00}, τ_0 ვარიაციას ორივე მხრიდან. შევნიშნავთ, რომ ρ დაგვიანების პარამეტრის ვარიაცია არ ხდება, ხოლო σ_0 და θ_0 დაგვიანების პარამეტრების ვარიაცია, ყოველთვის ხდება ორივე მხრიდან.

თეორემა 1.1.1. ვთქვათ $x_0(t)$ არის μ_0 ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე. არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$, რომ ნებისმიერი $t\in[t_{10}-\delta_1, t_{10}+\delta_1]$ და $\delta\mu\in\Lambda^-_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$x(t;\mu_0+\delta\mu)=x_0(t)+\delta x^-(t;\delta\mu)+o(t;\delta\mu), \qquad (1.1.5)$$

სადაც

$$\Lambda^-_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0=\left\{\delta\mu\in\Lambda_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0:\ \delta t_0\le 0, \delta\tau\le 0\right\},$$

$$\delta x^-(t;\delta\mu)=Y(t_{00};t)(\delta p_0,\delta g(t_{00}))^T+\left\{Y(t_{00};t)[(\Theta_{m\times 1},\dot{g}_0(t_{00}))^T-f_0^-]-Y(t_{00}+\tau_0;t)f_{01}^-\right\}\delta t_0$$
$$-Y(t_{00}+\tau_0;t)f_{01}^-\delta\tau+\gamma(t;\delta\mu), \qquad (1.1.6)$$

$$\gamma(t;\delta\mu)=-\left\{\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\dot{p}_0(\xi-\tau_0)d\xi\right\}\delta\tau-$$

$$-\left\{\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi\right\}\delta\sigma - \left\{\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_w[\xi]\dot{v}_0(\xi-\theta_0)d\xi\right\}\delta\theta + \int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t) f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(\xi+\sigma_0;t) f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi + \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)(f_u[\xi]\delta u(\xi) + f_\omega[\xi]\delta u(\xi-\rho))d\xi +$$

$$+\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)(f_v[\xi]\delta v(\xi) + f_w[\xi]\delta v(\xi-\theta_0))d\xi\,; \qquad (1.1.7)$$

$$\lim_{\delta\mu\to 0}\frac{o(t;\delta\mu)}{|\delta\mu|}=0$$

თანაბრად $t\in[t_{10}-\delta_1, t_{10}+\delta_1]$ მიმართ;

$$f_0^- = f(t_{00}, x_0(t_{00}), \varphi_0(t_{00}-\tau_0), g_0(t_{00}-\sigma_0), u_0(t_{00}-), u_0(t_{00}-\rho-), v_0(t_{00}), v_0(t_{00}-\theta_0)),$$

$$f_{01}^- = f(t_{00}+\tau_0, x_0(t_{00}+\tau_0), p_{00}, q_0(t_{00}+\tau_0-\sigma_0), u_0(t_{00}+\tau_0-), u_0(t_{00}+\tau_0-\rho-),$$

$$v_0(t_{00}+\tau_0), v_0(t_{00}+\tau_{00}-\theta_0)) - f(t_{00}+\tau_0, x_0(t_{00}+\tau_0), \varphi_0(t_{00}), q_0(t_{00}+\tau_0-\sigma_0), u_0(t_{00}+\tau_0-),$$

$$u_0(t_{00}+\tau_0-\rho-), v_0(t_{00}+\tau_0), v_0(t_{00}+\tau_{00}-\theta_0)),$$

$$f_{p_1}[\xi] = f_{p_1}(\xi, x_0(\xi), p_0(\xi-\tau_0), q_0(\xi-\sigma_0), u_0(\xi), u_0(\xi-\rho), v_0(\xi), v_0(\xi-\theta_0)).$$

გარდა ამისა, $Y(\xi;t)$ არის $n\times n$ განზომილებიანი მატრიც-ფუნქცია , რომელიც (t_{00},t) ინტერვალზე აკმაყოფილებს მატრიცულ ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებას წინმსწრები არგუმენტით

$$Y_\xi(\xi;t) = -Y(\xi;t) f_x[\xi] - (Y(\xi+\tau_0;t) f_{p_1}[\xi+\tau_0]\, Y(\xi+\sigma_0;t) f_{q_1}[\xi+\sigma_0]), \xi\in(t_{00},t), \; (1.1.8)$$

ხოლო $[t,\infty)$ ინტერვალზე საწყის პირობას

$$Y(\xi;t) = \begin{cases} E_{n\times n}, \; \xi = t, \\ \Theta_{n\times n}, \xi > t, \end{cases} \qquad (1.1.9)$$

აქ $E_{n\times n}$ არის ერთეულოვანი მატრიცა, ხოლო- $\Theta_{n\times n}$ ნულოვანი მატრიცა.

ზოგიერთი კომენტარი. $\delta x^-(t;\delta\mu)$ ეწოდება $x_0(t)$ ამონახსნის პირველი ვარიაცია $t\in[t_{10}-\delta_1, t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე. (1.1.6) წრფივ ოპერატორს, სადაც $\gamma(t;\delta\mu)$ აქვს (1.1.7) სახე ეწოდება ამონახსნის ვარიაციის ლოკალური ფორმულა. ნაშრომში, არსებით

სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება რომ ამონახსნის ვარიაციის ფორმულების დამტკიცებისას გარდა ადრე ცნობილი ვარიაციებისა, შერეული საწყისი პირობის ფარგლებში, გათვალისწინებულია ორი ტიპის მართვის და $v_0(t)$ მართვაში შემავალი დაგვიანების პარამეტრის ვარიაცია.

(1.1.6) ფორმულაში

$$Y(t_{00};t)(\delta p_0,\delta g(t_{00}))^T+\left\{Y(t_{00};t)[(\Theta_{m\times 1},\dot{g}_0(t_{00}))^T-f_0^-]-Y(t_{00}+\tau_0;t)f_{01}^-\right\}\delta t_0$$

გამოსახულება არის შერეული საწყისი პირობის ეფექტი.

$$\left\{Y(t_{00};t)[(\Theta_{m\times 1},\dot{g}_0(t_{00}))^T-f_0^-]-Y(t_{00}+\tau_0;t)f_{01}^-\right\}\delta t_0$$

არის საწყისი t_{00} მომენტის მარცხნიდან ვარიაციის ეფექტი.

$$Y(t_{00};t)(\delta p_0,\delta g(t_{00}))^T$$

არის საწყისი p_{00} ვექტორის და $g_0(t)$ საწყისი ფუნქციის ვარიაციის ეფექტი.

f_{01}^- არის $p_0(t)$-ს საწყის მომენტში წყვეტილობის ეფექტი,

ხოლო $(\Theta_{m\times 1},\dot{g}_0(t_{00}))^T$ არის $q_0(t)$-ს საწყის მომენტში უწყვეტობის ეფექტი.

(1.1.7) ფორმულაში

$$\left\{\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\dot{p}_0(\xi-\tau_0)d\xi\right\}\delta\tau$$

არის τ_0 დაგვიანების პარამეტრის ვარიაციის ეფექტი.

(1.1.7) ფორმულაში

$$\left\{\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi\right\}\delta\sigma$$

არის σ_0 დაგვიანების პარამეტრის ვარიაციის ეფექტი.

(1.1.7) ფორმულაში

$$\left\{\int_{t_{00}}^{t}Y(t_{00};t)f_w[\xi]\dot{v}_0(\xi-\theta_0)d\xi\right\}\delta\theta$$

არის θ_0 დაგვიანების პარამეტრის ვარიაციის ეფექტი.

(1.1.7) ფორმულაში

$$\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t) f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi + \int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(\xi+\sigma_0;t) f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi$$

არის საწყისი ფუნქციების ვარიაციის ეფექტი.

(1.1.7) ფორმულაში

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)(f_u[\xi]\delta u(\xi)+ f_\omega[\xi]\delta u(\xi-\rho))d\xi$$

არის $u_0(t)$ მართვის ვარიაციის ეფექტი.

(1.1.7) ფორმულაში

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)[f_v[\xi]\delta v(\xi)+ f_w[\xi]\delta v(\xi-\theta_0)]d\xi$$

არის $v_0(t)$ მართვის ვარიაციის ეფექტი.

განვიხილოთ წრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)p(t-\tau)+C(t)q(t-\sigma)+ f(t),\ t\in[t_0,t_1] \qquad (1.1.10)$$

შერეული საწყისი პირობით

$$x(t)=(\varphi(t),g(t))^T,\ t\in[\hat{\tau},t_0),\ x(t_0)=(p_0,g(t_0))^T, \qquad (1.1.11)$$

სადაც $A(t), B(t), C(t)$ შესაბამისი განზომილების ინტეგრებადი მატრიც-ფუნქციებია, $f(t)$ ინტეგრებადი ვექტორ-ფუნქციაა; $t_0\in(s_{00},s_{01}), t_1\in(s_{10},s_{11})$.

ლემა 1.1.1 (კოშის ფორმულა ([57], გვ. 31)). ვთქვათ $t\in(t_0,t_1]$ ფიქსირებული წერტილია, ხოლო $x(t),t\in[\hat{\tau},t_1]$ არის (1.1.10)-(1.1.11) ამოცანის ამონახსნი. მაშინ იგი $[t_0,t]$ ინტერვალზე წარმოიდგინება ფორმულით

$$x(t)=S(t_{00};t)(p_0,g(t_0))^T + \int_{t_0-\tau}^{t_0} S(\xi+\tau;t)B(\xi+\tau)\varphi(\xi)d\xi + \int_{t_0-\sigma}^{t_0} S(\xi+\sigma;t)C(\xi+\sigma)g(\xi)d\xi +$$

$$+\int_{t_0}^{t} S(\xi;t)\, f(\xi)d\xi\ ,$$

სადაც $S(\xi;t),\xi \in [t_0,t],$ მატრიც-ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$S_{\xi}(\xi;t) = -S(\xi;t)A(\xi) - (S(\xi+\tau;t)B(\xi+\tau)\ S(\xi+\sigma;t)C(\xi+\sigma)), \xi \in (t_{00},t)$$

და (1.1.9) პირობას .

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\delta x^{-}(t;\delta\mu) = \delta x_1^{-}(t;\delta\mu) + \delta x_2^{-}(t;\delta\mu),$$

სადაც

$$\delta x_1^{-}(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)\{(\delta p_0,\delta g(t_{00}))^T + [(\Theta_{m\times 1},\dot g_0(t_{00}))^T - f_0^{-}]\delta t_0\} - \left\{\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)\, f_{p_1}[\xi]\dot p_0(\xi-\tau_0)d\xi\right\}\delta\tau -$$

$$-\left\{\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)\, f_{q_1}[\xi]\dot q_0(\xi-\sigma_0)d\xi\right\}\delta\sigma - \left\{\int_{t_{00}}^{t} Y(t_{00};t)\, f_w[\xi]\dot v_0(\xi-\theta_0)d\xi\right\}\delta\theta +$$

$$+\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)\, f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi + \int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(\xi+\sigma_0;t)\, f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi +$$

$$+\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)(\, f_u[\xi]\delta u(\xi) + f_{\omega}[\xi]\delta u(\xi-\rho))d\xi + \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)[\, f_v[\xi]\delta v(\xi) + f_w[\xi]\delta v(\xi-\theta_0)]d\xi;$$

$$\delta x_2^{-}(t;\delta\mu) = -Y(t_{00}+\tau_0;t)\, f_{01}^{-}(\delta t_0 + \delta\tau)\,.$$

კოშის ფორმულის საფუძველზე დავასკვნით, რომ ფუნქცია

$$\delta x_1^{-}(t) = \begin{cases} (\delta\varphi(t),\delta g(t))^T, t \in [\hat\tau, t_{00}), \\ (\delta p_0,\delta g(t_{00}))^T, t = t_{00}, \\ \delta x_1^{-}(t;\delta\mu), t \in (t_{00}, t_{10}+\delta_1] \end{cases}$$

არის დიფერენციალური განტოლების

$$\delta\dot x(t) = f_x[t]\delta x(t) + f_{p_1}[t]\delta p(t-\tau_0) + f_{q_1}[t]\delta q(t-\sigma_0) - f_{p_1}[t]\dot p_0(t-\tau_0)\delta\tau - f_{q_1}[t]\dot q_0(t-\sigma_0)\delta\sigma -$$

$$- f_w[t]\dot{v}_0(t-\theta_0)\delta\theta + f_u[t]\delta u(t) + f_\omega[t]\delta u(t-\rho) + f_v[t]\delta v(t)$$

$$+ f_w[t]\delta v(t-\theta_0), t\in[t_{00}, t_{10}+\delta_1] \qquad (1.1.12)$$

ამონახსნი საწყისი პირობით

$$\delta x(t) = (\delta\varphi(t), \delta g(t))^T, t\in[\hat{\tau}, t_{00}), \ \delta x(t_{00}) = (\delta p_0, \delta g(t_{00}))^T. \qquad (1.1.13)$$

(1.1.12) ეწოდება განტოლება „ვარიაციებში“.

ფუნქცია

$$\delta x_2^-(t) = \begin{cases} 0, t\in[\hat{\tau}, t_{00}+\tau_0), \\ - f_{01}^-[\delta t_0 + \delta\tau], t = t_{00}+\tau_0, \\ \delta x_2^-(t;\delta\mu), t\in(t_{00}+\tau_0, t_{10}+\delta_1] \end{cases}$$

არის დიფერენციალური განტოლების

$$\delta\dot{x}(t) = f_x[t]\delta x(t) + f_{p_1}[t]\delta p(t-\tau_0) + f_{q_1}[t]\delta q(t-\sigma_0), \ t\in[t_{00}+\tau_0, t_{10}+\delta_1] \qquad (1.1.14)$$

ამონახსნი საწყისი პირობით

$$\delta x(t) = 0, t\in[\hat{\tau}, t_{00}+\tau_0), \ \delta x(t_{00}+\tau_0) = -f_{01}^-[\delta t_0 + \delta\tau]. \ (1.1.15)$$

(1.1.5) ფორმულა საშუალებას იძლევა $[t_{10}-\delta_2, t_{10}+\delta_2]$ ინტერვალზე ანალიზური სახით ვიპოვოთ

$$\mu = \mu_0 + \delta\mu =$$
$$= (t_{00}+\delta t_0, \tau_0+\delta\tau, \sigma_0+\delta\sigma, \theta_0+\delta\theta, p_{00}+\delta p_0, \varphi_0(t)+\delta\varphi(t), g(t)+\delta g(t), u_0(t)+\delta u(t),$$
$$v_0(t)+\delta v(t))$$

ელემენტის შესაბამისი შეშფოთებული კოშის ამოცანის

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), p(t-\tau_0-\delta\tau), q(t-\sigma_0-\delta\sigma), u_0(t)+\delta u(t), u_0(t-\rho)+\delta u(t-\rho),$$

$$v_0(t)+\delta v(t), v_0(t-\theta_0-\delta\theta)+\delta v(t-\theta_0-\delta\theta)),$$

$$x(t) = (\varphi_0(t)+\delta\varphi(t), g_0(t)+\delta g\ (t))^T, t\in[\hat{\tau}, t_{00}+\delta t_0),$$

$$x(t_{00}+\delta t_0) = (p_{00}+\delta p_0, g_0(t_{00}+\delta t_0)+\delta g(t_{00}+\delta t_0))^T$$

მიახლოებითი ამონახსნი.

მართლაც, საკმარისად მცირე $|\delta\mu|$-თვის (1.1.5) -დან დავასკვნით, რომ

$$x(t;\mu_0+\delta\mu)\approx x_0(t)+\delta x^-(t;\delta\mu), t\in[t_{10}-\delta_2, t_{10}+\delta_2]. \qquad (1.1.16)$$

ამონახსნის პირველი ვარიაცია შეიძლება ვიპოვოთ ორი ხერხით: პირველი- ვიპოვოთ მატრიც-ფუნქცია $Y(\xi;t)$ (იხ. (1.1.8)-(1.1.19)); მეორე- ვიპოვოთ (1.1.12)-(1.1.13) და (1.1.14)-(1.1.15) ამოცანების ამონახსნები.

განვიხილოთ წრფივი შემთხვევა.

ვთქვათ

$$f(t,x,p_1,q_1,u,\omega,v,w)=A_1(t)x+B_1(t)p_1+C_1(t)q_1+D_1(t)u+D_2(t)\omega+E_1(t)v+E_2(t)w+f_1(t),$$

სადაც კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრი უწყვეტია I -ზე. ამ შემთხვევაში თეორემა 1.1.1-სთვის გვექნება

$$f_0^-=A_1(t_{00})x_0(t_{00})+B_1(t_{00})p_0(t_{00}-\tau_0)+C_1(t_{00})q_0(t_{00}-\sigma_0)+D_1(t_{00})u_0(t_{00}-)+D_2(t_{00}-\rho-)+$$

$$+E_1(t_{00})v_0(t_{00})+E_2(t_{00})v_0(t_{00}-\theta_0)+f_1(t_{00}),$$

$$f_{01}^-=B_1(t_{00}+\tau_0)(p_{00}-\varphi_0(t_{00}));$$

$$\gamma(t;\delta\mu)=-\left\{\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)B_1(\xi)\dot p_0(\xi-\tau_0)d\xi\right\}\delta\tau-$$

$$-\left\{\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)C_1(\xi)\dot q_0(\xi-\sigma_0)d\xi\right\}\delta\sigma-\left\{\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)E_0(\xi)\dot v_0(\xi-\theta_0)d\xi\right\}\delta\theta+\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_0;t)B_1(\xi+\tau_0)\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}Y(\xi+\sigma_0;t)C_1(\xi+\sigma_0)\delta g(\xi)d\xi+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)(D_1(\xi)\delta u(\xi)+D_2(\xi)\delta u(\xi-\rho))d\xi+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)(E_1(\xi)\delta v(\xi)+E_2(\xi)\delta v(\xi-\theta_0))d\xi;$$

$$Y_\xi(\xi;t)=-Y(\xi;t)A_1(\xi)-(Y(\xi+\tau_0;t)B_1(\xi+\tau_0)\ \ Y(\xi+\sigma_0;t)C_1(\xi+\sigma_0)),\xi\in(t_{00},t).$$

თეორემა 1.1.2. ვთქვათ $x_0(t)$ არის μ_0 ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე. არსებობს რიცხვი $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ ისეთი რომ, ნებისმიერი $t \in [t_{10}-\delta_1, t_{11}+\delta_1]$ და $\delta\mu \in \Lambda^+_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$x(t;\mu_0+\delta\mu) = x_0(t) + \delta x^+(t;\delta\mu) + o(t;\delta\mu), \qquad (1.1.17)$$

სადაც

$$\Lambda^+_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0 = \{\delta\mu \in \Lambda_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0 : \delta t_0 \ge 0, \delta\tau \ge 0\},$$

$$\delta x^+(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)(\delta p_0, \delta g(t_{00}))^T + \{Y(t_{00};t)[(\Theta_{m\times 1}, \dot{g}_0(t_{00}))^T - f_0^+] - Y(t_{00}+\tau_0;t) f_{01}^+\}\delta t_0 -$$

$$-Y(t_{00}+\tau_0;t) f_{01}^+ \delta\tau + \gamma(t;\delta\mu). \qquad (1.1.18)$$

თეორემა 1.1.3. ვთქვათ $x_0(t)$ არის μ_0 ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე. გარდა ამისა, ფუნქციები $u_0(t)$ და $u_0(t-\rho)$ უწყვეტია წერტილში $t_{00}+\tau_0$. არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$, რომ ნებისმიერი

$$t \in [t_{10}-\delta_1, t_{10}+\delta_1] \text{ და } \delta\mu \in \hat{\Lambda}^-_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0$$

ადგილი აქვს ტოლობას

$$x(t;\mu_0+\delta\mu) = x_0(t) + \delta\hat{x}^-(t;\delta\mu) + o(t;\delta\mu),$$

სადაც

$$\Lambda^-_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0 = \{\delta\mu \in \Lambda_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0 : \delta t_0 \le 0\},$$

$$\delta\hat{x}^-(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)(\delta p_0, \delta g(t_{00}))^T + \{Y(t_{00};t)[(\Theta_{m\times 1}, \dot{g}_0(t_{00}))^T - f_0^-] - Y(t_{00}+\tau_0;t) f_{01}\}\delta t_0$$

$$-Y(t_{00}+\tau_0;t) f_{01}\delta\tau + \gamma(t;\delta\mu),$$

$$f_{01}^- = f(t_{00}+\tau_0, x_0(t_{00}+\tau_0), p_{00}, q_0(t_{00}+\tau_0-\sigma_0), u_0(t_{00}+\tau_0), u_0(t_{00}+\tau_0-\rho),$$

$$v_0(t_{00}+\tau_0), v_0(t_{00}+\tau_{00}-\theta_0)) - f(t_{00}+\tau_0, x_0(t_{00}+\tau_0), \varphi_0(t_{00}), q_0(t_{00}+\tau_0-\sigma_0), u_0(t_{00}+\tau_0),$$

$$u_0(t_{00}+\tau_0-\rho), v_0(t_{00}+\tau_0), v_0(t_{00}+\tau_{00}-\theta_0)).$$

თეორემა 1.1.3 მტკიცდება თეორემა 1.1.1 -ის ანალოგიურად იმ განსხვავებით, რომ დამტკიცებისას ცალ-ცალკე განიხილება შემთხვევები $\xi \in [t_0 + \tau, t_{00} + \tau_0]$ (იხ. თეორემა 1.1.1 დამტკიცება) და $\xi \in [t_{00} + \tau_0, t_0 + \tau]$ (იხ. თეორემა 1.1.2 დამტკიცება).

თეორემა 1.1.4. ვთქვათ $x_0(t)$ არის μ_0 ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$ ინტერვალზე. გარდა ამისა, ფუნქციები $u_0(t)$ და $u_0(t-\rho)$ უწყვეტია წერტილში $t_{00} + \tau_0$. არსებობს რიცხვი $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ ისეთი რომ, ნებისმიერი $t \in [t_{10} - \delta_1, t_{10} + \delta_1]$ და $\mu \in \hat{\Lambda}^{+}_{\varepsilon_2}(\mu_0) - \mu_0$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$x(t; \mu_0 + \delta\mu) = x_0(t) + \delta x^{+}(t; \delta\mu) + o(t; \delta\mu),$$

სადაც

$$\hat{\Lambda}^{+}_{\varepsilon_2}(\mu_0) - \mu_0 = \{\delta\mu \in \Lambda_{\varepsilon_2}(\mu_0) - \mu_0 : \delta t_0 \geq 0\},$$

$$\delta x^{+}(t; \delta\mu) = Y(t_{00}; t)(\delta p_0, \delta g(t_{00}))^T + \{Y(t_{00}; t)[(\Theta_{m\times 1}, \dot{g}_0(t_{00}))^T - f_0^{+}] - Y(t_{00} + \tau_0; t) f_{01}\}\delta t_0 -$$

$$- Y(t_{00} + \tau_0; t) f_{01}\delta\tau + \gamma(t; \delta\mu).$$

თეორემა 1.1.4 მტკიცდება თეორემა 1.1.2 -ის ანალოგიურად იმ განსხვავებით, რომ დამტკიცებისას ცალ-ცალკე განიხილება შემთხვევები $\xi \in [t_0 + \tau, t_{00} + \tau_0]$ (იხ. თეორემა 1.1.1 დამტკიცება) და $\xi \in [t_{00} + \tau_0, t_0 + \tau]$ (იხ. თეორემა 1.1.2 დამტკიცება).

თეორემა 1.1.5. ვთქვათ $x_0(t)$ არის μ_0 ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$ ინტერვალზე. გარდა ამისა, ფუნქციები $u_0(t)$ და $u_0(t-\rho)$ უწყვეტია t_{00} და $t_{00} + \tau_0$ წერტილებში. არსებობს რიცხვი $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ ისეთი რომ, ნებისმიერი $t \in [t_{10} - \delta_1, t_{10} + \delta_1]$ და $\delta\mu \in \Lambda_{\varepsilon_2}(\mu_0) - \mu_0$ -სთვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$x(t; \mu_0 + \delta\mu) = x_0(t) + \delta x(t; \delta\mu) + o(t; \delta\mu),$$

სადაც $\delta x(t; \delta\mu) = Y(t_{00}; t)(\delta p_0, \delta g(t_{00}))^T + \{Y(t_{00}; t)[(\Theta_{m\times 1}, \dot{g}_0(t_{00}))^T - f_0] - Y(t_{00} + \tau_0; t) f_{01}\}\delta t_0 -$

$$- Y(t_{00} + \tau_0; t) f_{01}\delta\tau + \gamma(t; \delta\mu).$$

თეორემა 1.1.5 არის თეორემა 1.1.3 და თეორემა 1.1.4 -ის შედეგი.

1.2. ამონახსნის ნაზრდის შეფასება საწყისი მომენტის მარცხენა მხრიდან ვარიაციის შემთხვევაში

ყოველ

$$\mu = (t_0, \tau, \sigma, \theta, p_0, \varphi(t), g(t), u(t), v(t)) \in \Lambda$$

ელემენტს შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{y}(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t))^T = f(t, y(t), h(t_0, \varphi, \alpha)(t-\tau), h(t_0, g, \beta)(t-\sigma), u(t), u(t-\rho), v(t), v(t-\theta)) \quad (1.2.1)$$

საწყისი პირობით

$$y(t_0) = (p_0, g(t_0))^T, \qquad (1.2.2)$$

სადაც ოპერატორი $h(t_0, \varphi, \alpha)(t)$ განიმარტება ფორმულით

$$h(t_0, \varphi, \alpha)(t) = \begin{cases} \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0), \\ \alpha(t), t \in [t_0, s_{11}]. \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$h(t_0, \varphi, \alpha)(t-\tau) = \begin{cases} \varphi(t-\tau), t \in [t_0, t_0+\tau), \\ \alpha(t-\tau), t \in [t_0+\tau, s_{11}]; \end{cases}$$

$$h(t_0, g, \beta)(t-\tau) = \begin{cases} g(t-\sigma), t \in [t_0, t_0+\sigma), \\ \beta(t-\tau), t \in [t_0+\sigma, s_{11}]. \end{cases}$$

განსაზღვრება 1.2.1. ვთქვათ $\mu \in \Lambda$. აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას $y(t;\mu) = (\alpha(t;\mu), \beta(t;\mu))^T \in O, t \in [r_1, r_2]$, სადაც $r_1 \in (s_{00}, s_{01}), r_2 \in (s_{21}, s_{22})$, ფიქსირებული რიცხვებია, ეწოდება (1.2.1) განტოლების ამონახსნი (1.2.2) საწყისი პირობით ან μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[r_1, r_2]$ ინტერვალზე, თუ $t_0 \in [r_1, s_{01})$, $y(t_0) = (p_0, g(t_0))^T$, ხოლო თ. ყ. $t \in [r_1, r_2]$ აკმაყოფილებს (1.2.1) განტოლებას.

შენიშვნა 1.2.1. ვთქვათ $y(t;\mu), t \in [r_1, r_2]$, არის $\mu = (t_0, \tau, \sigma, \theta, p_0, \varphi(t), g(t), u(t), v(t)) \in \Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, მაშინ

$$x(t;\mu) = (h(t_0, \varphi, \alpha(\cdot;\mu))(t)), h(t_0, g, \beta(\cdot;\mu))(t))^T \tag{1.2.4}$$

იქნება μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, ანუ (1.1.2) განტოლების ამონახსნი (1.1.3) საწყისი პირობით $[\hat{\tau}, r_2]$ ინტერვალზე.

მართლაც, ვთქვათ $t \in [\hat{\tau}, t_0)$ მაშინ

$$x(t;\mu) = (\varphi(t), g(t))^T$$

(იხ. (1.2.3)).

ვთქვათ $t \in [t_0, r_2]$ მაშინ

$$x(t;\mu) = (\alpha(t;\mu), \beta(t;\mu))^T ,$$

ე. ი.

$$x(t_0;\mu) = (p_0, g(t_0))^T$$

და იგი აკმაყოფილებს (1.1.2) განტოლებას.

ლემა 1.2.1. ვთქვათ $y_0(t) = (\alpha_0(t), \beta_0(t))^T$ არის

$$\mu_0 = (t_{00}, \tau_0, \sigma_0, \theta_0, p_{00}, \varphi_0(t), g_0(t), u_0(t), v_0(t)) \in \Lambda$$

ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[r_1, r_2]$ მონაკვეთზე, სადაც $r_1 \in (s_{00}, s_{01}), r_2 \in (s_{21}, s_{22})$; გარდა ამისა, ვთქვათ $K_0 \subset O, U_0 \subset U, V_0 \subset V$ კომპაქტები, შესაბამისად, შეიცავენ

$$(\varphi_0(I_1), g_0(I_1))^T \cup y_0([r_1, r_2]), u_0(I_2), v_0(I_3)$$

სიმრავლეების რაიმე მიდამოს. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_1 > 0$ და $\delta_1 > 0$ რომ ნებისმიერ

$$\mu = \mu_0 + \delta\mu = (t_0, \tau, \sigma, \theta, p_0, \varphi(t), g(t), u(t), v(t)) =$$

$$= (t_{00} + \delta t_0, \tau_0 + \delta\tau, \sigma_0 + \delta\sigma, \theta_0 + \delta\theta, p_{00} + \delta p_0, \varphi_0(t) + \delta\varphi(t), g_0(t) + \delta g(t),$$

$$,u_0(t)+\delta u(t),v_0(t)+\delta v(t))\in\Lambda_{\varepsilon_1}(\mu_0)$$

ელემენტს შეესაბამება ამონახსნი $y(t;\mu_0+\delta\mu)$ განსაზღვრული $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]$ ინტერვალზე, თანაც $r_1-\delta_1\in(s_{00},s_{01}),r_2+\delta_1\in(s_{21},s_{22})$. გარდა ამისა,

$$\begin{cases}(\varphi_0(t)+\delta\varphi(t),g_0(t)+\delta g(t))^T\in K_0,t\in I_1,\\ u_0(t)+\delta u(t)\in U_0,t\in I_2,\ v_0(t)+\delta v(t)\in V_0,t\in I_3,\\ y(t;\mu_0+\delta\mu)\in K_0,t\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1],\end{cases}\tag{1.2.5}$$

$$\lim_{\delta\mu\to 0}y(t;\mu_0+\delta\mu)=y(t;\mu_0)\tag{1.2.6}$$

თანაბრად $t\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]$ მიმართ.

ლემა 1.2.1 არის თეორემა 1.8 შედეგი ([57], გვ. 28).

ლემა 1.2.2. ვთქვათ $x_0(t)$ არის $\mu_0\in\Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_{10}]$ მონაკვეთზე (იხ. განსაზღვრება 1.1.1). ვთქვათ $K_0\subset O,U_0\subset U,V_0\subset V$ კომპაქტები, შესაბამისად, შეიცავენ

$$(\varphi_0(I_1),g_0(I_1))^T\cup x_0([\hat{\tau},t_{10}]),u_0(I_2),v_0(I_3)$$

სიმრავლეების რაიმე მიდამოს. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_1>0$ და $\delta_1>0$ რომ ნებისმიერ $\mu\in\Lambda_{\varepsilon_1}(\mu_0)$ ელემენტს შეესაბამება ამონახსი $x(t;\mu_0+\delta\mu)$ განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე, თანაც $t_{10}+\delta_1\in(s_{21},s_{22})$. გარდა ამისა,

$$\begin{cases}(\varphi_0(t)+\delta\varphi(t),g_0(t)+\delta g(t))^T\in K_0,t\in I_1,\\ u_0(t)+\delta u(t)\in U_0,t\in I_2,\ v_0(t)+\delta v(t)\in V_0,t\in I_3,\\ x(t;\mu_0+\delta\mu)\in K_0,t\in[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1].\end{cases}\tag{1.2.7}$$

გარდა ამისა,

$$\lim_{\delta\mu\to 0}x(t;\mu_0+\delta\mu)=x(t;\mu_0)$$

თანაბრად $t\in[t_{10}-\delta_1,t_{10}+\delta_1]$ მიმართ.

ვთქვათ ლემა 1.2.1-ში $r_1=t_{00},r_2=t_{10}$, მაშინ $x_0(t)=y_0(t),t\in[t_{00},t_{10}]$,

$$x(t;\mu_0+\delta\mu)=(h(t_0,\varphi,\alpha(\cdot;\mu_0+\delta\mu))(t)),h(t_0,g,\beta(\cdot;\mu_0+\delta\mu))(t))^T\,,$$

$$\forall(t,\delta\mu)\in[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]\times\hat{\Lambda}^{-}_{\varepsilon_1}(\mu_0)$$

(იხ. (1.2.4)). ამრიგად, ლემა 1.2.2 არის ლემა 1.2.1-ის შედეგი.

შენიშვნა 1.2.2. ერთადერთობის ძალით ამონახსნი $y(t;\mu_0), t\in[r_1-\delta_1, r_2+\delta_1]$ არის $y_0(t)$ ამონახსნის გაგრძელება. ამიტომ შემდგომში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $y_0(t)$ ამონახსნი განსაზღვრულია $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]$ ინტერვალზე .

ლემა 1.2.1 საშუალებას იძლევა შემოვიღოთ $y_0(t)=y(t;\mu_0),[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]$, ამონახსნის ნაზრდი

$$\Delta y(t)=(\Delta\alpha(t),\Delta\beta(t))^T=\Delta y(t;\delta\mu):=y(t;\mu_0+\delta\mu)-y_0(t),\ \delta\mu\in\hat{\Lambda}^{-}_{\varepsilon_1}(\mu_0)-\mu_0, t\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]. \quad (1.2.8)$$

$$\lim_{\delta\mu\to 0}\Delta y(t;\delta\mu)=0 \qquad (1.2.9)$$

თანაბრად $t\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]$ მიმართ.(იხ. (1.2.6)).

ლემა 1.2.3. არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\max_{t\in[t_{00},r_2+\delta_1]}|\Delta y(t;\delta\mu)|\le O(\delta\mu) \qquad (1.2.10)$$

ნებისმიერი $\delta\mu\in\hat{\Lambda}^{-}_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0$, სადაც

$$\lim_{\delta\mu\to 0}\frac{O(\delta\mu)}{|\delta\mu|}<\infty,$$

$$\hat{\Lambda}^{-}_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0=\{\delta\mu\in\Lambda_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0:\delta t_0\le 0\}.$$

გარდა ამისა,

$$\Delta y(t_{00})=(\delta p_0,\delta g(t_{00}))^T+[(\Theta_{m\times 1},\dot{g}_0(t_{00}))^T-f_0^{-}]\delta t_0+o(\delta\mu)\,, \qquad (1.2.11)$$

სადაც

$$f_0^{-}=f(t_{00},y_0(t_{00}),\varphi_0(t_{00}-\tau_0),g_0(t_{00}-\sigma_0),u_0(t_{00}-),u_0(t_{00}-\rho-),v_0(t_{00}),v_0(t_{00}-\theta_0)),$$

$$\lim_{\delta\mu\to 0}\frac{o(\delta\mu)}{|\delta\mu|}=0.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$ იმდენად მცირეა რომ ნებისმიერი

$$(t,\delta\mu)\in[t_0,t_{00}]\times(\hat{\Lambda}^-_{\varepsilon_2}\ (\mu_0)-\mu_0)$$

შესრულებულია უტოლობები

$$t_0\in(s_{00},s_{01}),\ \tau\in(\tau_1,\tau_2),\sigma\in(\sigma_1,\sigma_2),\ \theta\in(\theta_1,\theta_2),$$

$$t-\tau\le t_0,\ t+\tau\ge t_{00},t-\sigma\le t_0,\ t+\sigma\ge t_{00}. \qquad (1.2.12)$$

$[t_{00},r_2+\delta_1]$ ინტერვალზე $\Delta y(t)=y(t)-y_0(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta y}(t)=f(t,y_0(t)+\Delta y(t),h(t_0,\varphi,\alpha_0+\Delta\alpha)(t-\tau),h(t_0,g,\beta_0+\Delta\beta)(t-\sigma),$$

$$u_0(t)+\delta u(t),v_0(t)+\delta v(t),v_0(t-\theta)+\delta v(t-\theta))-$$

$$-f(t,y_0(t),h(t_{00},\varphi_0,\alpha_0)(t-\tau_0),h(t_0,g_0,\beta_0)(t-\sigma_0),u_0(t),u_0(t-\rho),v_0(t),v_0(t-\theta_0))=$$

$$=a(t;\delta\mu)\ . \qquad (1.2.13)$$

ჩავწეროთ (1.2.13) ინტეგრალური სახით,

$$\Delta y(t)=\Delta y(t_{00})+\int_{t_{00}}^{t}a(\xi;\delta\mu)d\xi.$$

აქედან გამომდინარეობს,

$$|\Delta y(t)|\le|\Delta y(t_{00})|+a_1(t_{00},t;\delta\mu), \qquad (1.2.14)$$

სადაც

$$a_1(t_{00},t;\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t}|a(\xi;\delta\mu)|d\xi.$$

პირველ რიგში დავამტკიცოთ ფორმულა (1.2.11).

გვაქვს,

$$\Delta y(t_{00})=y(t_{00})-y_0(t_{00})=y(t_0)+\int_{t_0}^{t_{00}}\dot{y}(t)dt-y_0(t_{00})=$$

$$= \int_{t_0}^{t_{00}} f(t, y_0(t) + \Delta y(t), \varphi(t-\tau), g(t-\sigma), u_0(t) + \delta u(t), u_0(t-\rho) + \delta u(t-\rho), v_0(t) + \delta v(t),$$

$$, v_0(t-\theta) + \delta v(t-\theta))dt + y(t_0) - y_0(t_{00}) \qquad (1.2.15)$$

(იხ. (1.2.8) და (1.2.3)).

შემდეგ,

$$y(t_0) - y_0(t_{00}) = (p_{00} + \delta p_0, g_0(t_0) + \delta g(t_0))^T - (p_{00}, g_0(t_{00}))^T = (\delta p_0, \delta g(t_{00}))^T +$$

$$+ (\Theta_{m\times 1}, \delta g(t_0) - \delta g(t_{00}))^T + (\Theta_{m\times 1}, g_0(t_0) - g_0(t_{00}))^T.$$

გარდავქმნათ $\delta g(t_0) - \delta g(t_{00})$ და $g_0(t_0) - g_0(t_{00}))$.

$$|\delta g(t_0) - \delta g(t_{00})| = |\int_{t_{00}}^{t_0} \dot{\delta g}(t)dt| \le \|\delta g\|_1 |\delta t_0| \le |\delta\mu|^2;$$

$$g_0(t_0) - g_0(t_{00})) = \int_{t_{00}}^{t_0} \dot{g}_0(t)dt = \int_{t_{00}}^{t_0} \dot{g}_0(t_{00})dt + \zeta(\delta\mu) = \dot{g}_0(t_{00})\delta t_0 + \zeta(\delta\mu),$$

სადაც

$$\zeta(\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t_0} [\dot{g}_0(t) - \dot{g}_0(t_{00})]dt.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$|\zeta(\delta\mu)| = |\int_{t_{00}}^{t_0} [\dot{g}_0(t) - \dot{g}_0(t_{00})]dt| \le \max_{t\in[t_0, t_{00}]} |\dot{g}_0(t) - \dot{g}_0(t_{00})| \, |\delta\mu|,$$

ე. ი.

$$\lim_{\delta\mu\to 0} \frac{\zeta(\delta\mu)}{|\delta\mu|} = 0.$$

ამრიგად,

$$\zeta(\delta\mu) = o(\delta\mu).$$

$$\int_{t_0}^{t_{00}} f(t, y_0(t) + \Delta y(t), \varphi(t-\tau), g(t-\sigma), u_0(t) + \delta u(t-\rho) + \delta u(t-\rho), u_0(t) v_0(t) + \delta v(t),$$

$$,v_0(t-\theta)+\delta v(t-\theta))dt=\int_{t_0}^{t_{00}} f_0^- dt+\lambda(\delta\mu),$$

სადაც

$$\lambda(\delta\mu)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_{00}}[f(t,y_0(t)+\Delta y(t),\varphi(t-\tau),g(t-\sigma),u_0(t)+\delta u(t),u_0(t-\rho)+\delta u(t-\rho),v_0(t)+\delta v(t),$$

$$v_0(t-\theta)+\delta v(t-\theta))-f_0^-]dt.$$

თუ $\delta\mu\to 0$, მაშინ

$$\Delta y(t)\to 0,\ \varphi(t-\tau)\to\varphi_0(t-\tau_0),\ g(t-\sigma)\to g_0(t-\sigma_0),\ u_0(t)+\delta u(t)\to u_0(t),$$

$$v_0(t)+\delta v(t)\to v_0(t), v_0(t-\theta)+\delta v(t-\theta)\to v_0(t-\theta_0),$$

ე. ი.

$$\sup_{t\in[t_0,\,t_{00}]}|\,f(t,y_0(t)+\Delta y(t),\varphi(t-\tau),g(t-\sigma),u_0(t)+\delta u(t),u_0(t-\rho)+\delta u(t-\rho),$$

$$,v_0(t)+\delta v(t),v_0(t-\theta)+\delta v(t-\theta))-f_0^-|\to 0$$

როცა $\delta\mu\to 0$, ე. ი. $\lambda(\delta\mu)$ არის $\delta\mu$ -სთან შედარებით უფრო მაღალი რიგის უსასრულო მცირე. ზემომიღებული თანაფარდობების საფუძველზე (1.2.15)-დან მიიღება ფორმულა (1.2.11). ახლა დავამტკიცოთ შეფასება (1.2.10). თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ $K_0\subset O, U_0\subset U, V_0\subset V$ კომპაქტური სიმრავლეებისთვის არსებობს ისეთი რიცხვი $L>0$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(t,x_1,p_{11},q_{11},u_1,\omega_1,v_1,w_1)-f(t,x_1,p_{12},q_{12},u_2,\omega_2,v_2,w_2)|\le$$
$$\le L(|x_1-x_2|+|p_{11}-p_{12}|+|q_{11}-q_{12}|+|u_1-u_2|+|\omega_1-\omega_2|+|v_1-v_2|+|w_1-w_2|)$$

ნებისმიერი

$$t\in I,\ (x_1,x_2)\in K_0^2,(p_{11},q_{11})\in K_0^2,(p_{12},q_{12})\in K_0^2,(u_1,u_2,\omega_1,\omega_2)\in U_0^4,(v_1,v_1,w_1,w_1)\in V_0^4$$

([57] გვ. 29, ლემა 2.2). ამ უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$a_1(t_{00},t;\delta\mu) \le L\int_{t_{00}}^{t}|\Delta y(\xi)|d\xi + \sum_{i=2}^{6} a_i(t_{00},t;\delta\mu), \quad (1.2.16)$$

სადაც

$$a_2(t_{00},t;\delta\mu) = L\int_{t_{00}}^{t}|h(t_0,\varphi,\alpha_0+\Delta\alpha)(\xi-\tau) - h(t_{00},\varphi_0,\alpha_0)(\xi-\tau_0)|d\xi,$$

$$a_3(t_{00},t;\delta\mu) = L\int_{t_{00}}^{t}|h(t_0,g,\beta_0+\Delta\beta)(\xi-\sigma) - h(t_{00},g_0,\beta_0)(\xi-\sigma_0)|d\xi,$$

$$a_4(t_{00},t;\delta\mu) = L\int_{t_{00}}^{t}(|\delta u(\xi)|+|\delta u(\xi-\rho)|)d\xi,\ \ a_5(t_{00},t;\delta\mu) = M\int_{t_{00}}^{t}|\delta v(\xi)|d\xi,$$

$$a_6(t_{00},t;\delta\mu) = L\int_{t_{00}}^{t}(|v_0(\xi-\theta) - v_0(\xi-\theta_0)| + |\delta v(\xi-\theta)|)d\xi.$$

შევაფასოთ $a_2(t_{00},t;\delta\mu)$ სამ ეტაპად:

პირველი ეტაპი. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\varsigma_1 = \min\{t_0+\tau, t_{00}+\tau_0\},\ \ \varsigma_2 = \max\{t_0+\tau, t_{00}+\tau_0\}.$$

ცხადია, რომ

$$|\varsigma_1-\varsigma_2| = |t_0+\tau-t_{00}-\tau_0| = |t_{00}+\delta t_0+\tau_0+\delta\tau-t_{00}-\tau_0| \le |\delta t_0|+|\delta\tau| \le |\delta\mu|$$

და $\varsigma_1 \ge t_{00}$.

1) ვთქვათ , $\varsigma_1 = t_0+\tau$ ე. ი. $t_0+\tau < t_{00}+\tau_0$. აქედან მივიღებთ რომ

$$t_{00}+\delta t_0+\tau_0+\delta\tau < t_{00}+\tau_0 \Rightarrow \delta t_0+\delta\tau < 0.$$

ამ შემთხვევაში, თუ $t\in[t_{00},t_0+\tau)$, მაშინ $\xi\in[t_{00},t]$-თვის გვექნება

$$\xi-\tau < t_0 \ \text{ და } \ \xi-\tau_0 < t_{00}.$$

მართლაც,

$$\xi-\tau < t_0+\tau-\tau = t_0;$$

$$\xi-\tau_0 < t_0+\tau-\tau_0 = t_{00}+\delta t_0+\tau_0+\delta\tau-\tau_0 = t_{00}+\delta t_0+\delta\tau < t_{00}.$$

$a_2(t_{00},t;\delta\mu)$ -თვის მივიღებთ

$$a_2(t_{00},t;\delta\mu) = L\int_{t_{00}}^{t} |\,\varphi_0(t-\tau)+\delta\varphi(t-\tau)-\varphi_0(t-\tau_0)\,|dt \le$$

$$\le L\int_{t_{00}}^{s_{11}} |\,\delta\varphi(t-\tau)\,|dt + m_0\int_{t_{00}}^{s_{11}} |\,\varphi_0(t-\tau)-\varphi_0(t-\tau_0)\,|dt \le$$

$$\le O(\delta\mu) + \int_{t_{00}}^{s_{11}} L\,|\int_{t-\tau_0}^{t-\tau} |\,\dot{\varphi}_0(\xi)\,|d\xi\,|\,dt \le O(\delta\mu)+O(\delta\mu)=O(\delta\mu) \qquad (1.2.17).$$

მეორე ეტაპი. ვთქვათ $t\in[t_0+\tau, t_{00}+\tau_0]$, თუ $\xi\in[t_0+\tau,t]$ მაშინ გვექნება $\xi-\tau\ge t_0$ და $\xi-\tau_0\le t_{00}$, მივიღებთ

$$a_2(t_{00},t;\delta\mu) = a_2(t_{00},t_0+\tau;\delta\mu) + L\int_{t_0+\tau_0}^{t} |\,\alpha_0(\xi-\tau)+\Delta\alpha(\xi-\tau)-\varphi_0(\xi-\tau_0)\,|\,d\xi.$$

წინა გამოსახულების მეორე შესაკრების ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შემოსაზღვრულია (იხ. 1.2.7) , ამიტომ გვექნება

$$a_2(t_{00},t;\delta\mu)\le O(\delta\mu),\;\; t\in[t_0+\tau,t_{00}+\tau_0].$$

ამრიგად,

$$a_2(t_{00},t;\delta\mu)\le O(\delta\mu),\; t\in[t_{00},t_{00}+\tau_0].$$

მესამე ეტაპი. ვთქვათ $t\in[t_{00}+\tau_0, r_2+\delta_1]$,

თუ $\xi\in[t_{00}+\tau_0,t]$ მაშინ გვექნება $\xi-\tau\ge t_0$ და $\xi-\tau_0\ge t_{00}$,

მივიღებთ

$$a_2(t_{00},t;\delta\mu) = a_2(t_{00}+\tau_0,t;\delta\mu) + L\int_{t_{00}+\tau_0}^{t} |\,\Delta\alpha(\xi)\,|\,d\xi \le$$

$$\le O(\delta\mu) + L\int_{t_{00}}^{t} |\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi.$$

ზემომიღებული შეფასებების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$a_2(t_{00},t;\delta\mu) \le O(\delta\mu) + L\int_{t_{00}}^{t} \Delta y(\xi)d\xi. \qquad (1.2.18)$$

2) ვთქვათ , $\varsigma_1 = t_{00} + \tau_{00}$ ე. ი. $t_{00} + \tau_0 < t_0 + \tau$.

პირველი ეტაპი-1 . $t \in [t_{00}, t_{00} + \tau_0)$, მაშინ $\xi \in [t_{00}, t]$-თვის გვექნება

$$\xi - \tau < t_0 \text{ და } \xi - \tau_0 < t_{00}.$$

ანალოგიური გზით $t \in [t_{00}, t_{00} + \tau_0)$, ინტერვალზე დამტკიცდება (1.2.17) შეფასება.

მეორე ეტაპი-2 . $t \in [t_{00} + \tau_0, t_0 + \tau)$, გვექნება

$$\xi - \tau < t_0 \text{ და } \xi - \tau_0 > t_{00}$$

და

$$a_2(t_{00},t;\delta\mu) = a_2(t_{00},t_{00}+\tau_0;\delta\mu) + L\int_{t_{00}+\tau_0}^{t} |\,\alpha_0(\xi-\tau_0) - \varphi_0(\xi-\tau)\,|\,d\xi \le O(\delta\mu).$$

მესამე ეტაპი-3 . $t \in [t_0 + \tau, r_2 + \delta_1)$,

გვექნება $\xi - \tau > t_0$ და $\xi - \tau_0 > t_{00}$

და $a_2(t_{00},t;\delta\mu) = a_2(t_0+\tau,t;\delta\mu) + L\int_{t_0+\tau}^{t} |\,\Delta\alpha(\xi)\,|\,d\xi \le$

$$\le O(\delta\mu) + L\int_{t_{00}}^{t} |\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi.$$

ამ შემთხვევაშიც სამართლიანია (1.2.18).

ანალოგიური ეტაპების გავლით, უმნიშვნელო ცვლილებების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$a_3(t_{00},t;\delta\mu) \le O(\delta\mu) + L\int_{t_{00}}^{t} \Delta y(\xi)d\xi. \qquad (1.2.19)$$

გავაგრძელოთ შეფასებების პროცესი დარჩენილი შესაკრებებისთვის

$$a_i(t_{00},t;\delta\mu), i = 4,5,6.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$a_i(t_{00},t;\delta\mu)\le O(\delta\mu), i=4,5,6. \qquad (1.2.20)$$

(1.2.16), (1.2.18)-(1.2.20) გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ

$$a_1(t_{00},t;\delta\mu)\le O(\delta\mu)+3L\int_{t_{00}}^{t}|\Delta y(\xi)|d\xi.$$

ბოლო შეფასებისა და (1.2.11), (1.2.14) საფუძველზე მივიღებთ უტოლობას

$$|\Delta y(t)|\le O(\delta\mu)+3L\int_{t_{00}}^{t}|\Delta y(\xi)|d\xi.$$

გრონუოლის ლემის თანახმად

$$|\Delta y(t)|\le O(\delta\mu)e^{3L(s_{11}-t_{00})}=O(\delta\mu).$$

ლემა 1.2.3 დამტკიცებულია.

ვთქვათ, ლემა 1.2.3-ში $r_1=t_{00}, r_2=t_{10}$, მაშინ

$$x_0(t)=\begin{cases}(\varphi_0(t),g_0(t))^T,[\hat{\tau},t_{00}),\\ y_0(t),t\in[t_{00},t_{10}+\delta_1],\end{cases}$$

ხოლო ნებისმიერი $\delta\mu\in\hat{\Lambda}^-_{\varepsilon_2}(\mu_0)$ გვექნება

$$x(t;\mu_0+\delta\mu)=\begin{cases}(\varphi(t),g(t))^T,[\hat{\tau},t_0),\\ y(t;\mu_0+\delta\mu),t\in[t_0,t_{10}+\delta_1]\end{cases}$$

(იხ. 1.2.4). შევნიშნოთ რომ $\delta\mu\in\hat{\Lambda}^-_{\varepsilon_2}(\mu_0)$ ე. ი., $t_0\le t_{00}$,

ამიტომ

$$\Delta x(t)=\Delta y(t),t\in[t_{00},t_{10}+\delta_{.1}].$$

ლემა 1.2.3 -ის ძალით გვექნება

$$|\Delta x(t)|\le O(\delta\mu),\ \forall(t,\delta\mu)\in[t_{00},t_{10}+\delta_1]\times\hat{\Lambda}^-_{\varepsilon_2}(\mu_0), \qquad (1.2.21)$$

$$|\Delta p(t)|\le|\Delta x(t)|\le O(\delta\mu),\ \forall(t,\delta\mu)\in[t_{00},t_{10}+\delta_1]\times\hat{\Lambda}^-_{\varepsilon_2}(\mu_0), \quad (1.2.22)$$

$$|\Delta q(t)| \le |\Delta x(t)| \le O(\delta\mu),\ \forall (t,\delta\mu) \in [t_{00}, t_{10}+\delta_1] \times \hat{\Lambda}^{-}_{\varepsilon_2}(\mu_0),$$

$$\Delta x(t_{00}) = (\delta p_0, \delta g(t_{00}))^T + [(\Theta_{m\times 1}, \dot{g}_0(t_{00})) - f_0^{-}]\delta t_0 + o(\delta\mu). \qquad (1.2.23)$$

ახლა $[\hat{\tau},\ t_{00}]$-ზე ვაჩვენოთ, რომ

$$|\Delta q(t)| \le O(\delta\mu).$$

ვთქვათ $t \in [\hat{\tau}, t_0]$ მაშინ

$$|\Delta q(t)| = |g(t) - g_0(t)| = |\delta g(t)| \le |\delta\mu| = O(\delta\mu).$$

თუ $t \in [t_0, t_{00}]$ მაშინ

$$|\Delta q(t)| = |q(t) - g_0(t)| = \left| g(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{q}(\xi)d\xi - g_0(t) \right| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t_{00}} |\dot{g}_0(\xi)| d\xi + \int_{t_0}^{t_{00}} |\dot{q}(\xi)| d\xi = O(\delta z)$$

რადგანაც ინტეგრალქვეშა ფუნქციები შემოსაზღვრულია.

ამრიგად,

$$|\Delta q(t)| \le O(\delta\mu),\ \forall (t,\delta\mu) \in [\hat{\tau}, t_{10}+\delta_1] \times (\hat{\Lambda}^{-}_{\varepsilon_2}(\mu_0) - \mu_0). \qquad (1.2.24)$$

1.3. ნაზრდის შეფასება საწყისი მომენტის მარჯვენა მხრიდან ვარიაციის შემთხვევაში

ლემა 1.3.1. არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\max_{t \in [t_0, r_2+\delta_1]} |\Delta y(t;\delta\mu)| \le O(\delta\mu) \qquad (1.3.1)$$

ნებისმიერი $\delta\mu \in \hat{\Lambda}^{+}_{\varepsilon_2}(\mu_0) - \mu_0$, სადაც

$$\hat{\Lambda}^{+}_{\varepsilon_2}(\mu_0) - \mu_0 = \{\delta\mu \in \Lambda_{\varepsilon_2}(\mu_0) - \mu_0 : \delta t_0 \ge 0\}.$$

გარდა ამისა,

$$\Delta y(t_0) = (\delta p_0, \delta g(t_{00}))^T + [(\Theta_{m\times 1}, \dot{g}_0(t_{00})) - f_0^{+}]\delta t_0 + o(\delta\mu), \qquad (1.3.2)$$

სადაც

$$f_0^+ = f(t_{00}, y_0(t_{00}), \varphi_0(t_{00}-\tau_0), g_0(t_{00}-\sigma_0), u_0(t_{00}+), u_0(t_{00}-\rho+), v_0(t_{00}), v_0(t_{00}-\theta_0)).$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ იმდენად მცირეა, რომ ნებისმიერი

$$(t, \delta\mu) \in [t_{00}, t_0] \times (\Lambda^+_{\varepsilon_2}(\mu_0) - \mu_0)$$

შესრულებულია უტოლობები

$$t_0 \in (s_{00}, s_{01}),\ \tau \in (\tau_1, \tau_2), \sigma \in (\sigma_1, \sigma_2),\ t-\tau_0 \le t_{00},\ t-\sigma_0 \le t_{00}. \qquad (1.3.3)$$

$[t_0, r_2+\delta_1]$ ინტერვალზე $\Delta y(t) = y(t) - y_0(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (1.2.13) განტოლებას. ეს განტოლება ჩავწეროთ ინტეგრალური სახით

$$\Delta y(t) = \Delta y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\xi; \delta\mu) d\xi.$$

აქედან გამომდინარეობს,

$$|\Delta y(t)| \le |\Delta y(t_0)| + a_1(t_0, t; \delta\mu), \qquad (1.3.4)$$

სადაც

$$a_1(t_0, t; \delta\mu) = \int_{t_0}^{t} |a(\xi; \delta\mu)| d\xi.$$

პირველ რიგში დავამტკიცოთ ფორმულა (1.3.2).

გვაქვს,

$$\Delta y(t_0) = y(t_0) - y_0(t_0) = y(t_0) - y_0(t_{00}) - \int_{t_{00}}^{t_0} \dot{y}_0(t) dt =$$

$$= y(t_0) - y_0(t_{00}) - \int_{t_{00}}^{t_0} f(t, y_0(t), \varphi_0(t-\tau_0), g_0(t-\sigma_0), u_0(t), u_0(t-\rho), v_0(t), v_0(t-\theta_0)) dt \qquad (1.3.5)$$

(იხ. (1.3.3)).

შემდეგ,

$$y(t_0) - y_0(t_{00}) = (p_{00} + \delta p_0, g_0(t_0) + \delta g(t_0))^T - (p_{00}, g_0(t_{00}))^T =$$

$$=(\delta p_0, g_0(t_0)+\delta g(t_0)-g_0(t_{00}))^T=(\delta p_0, \delta g(t_0))^T+(\Theta_{m\times 1}, g_0(t_0)-g_0(t_{00}))^T=$$

$$=(\delta p_0, \delta g(t_{00}))^T+(\Theta_{m\times 1}, \delta g(t_0)-\delta g(t_{00}))^T+(\Theta_{m\times 1}, g_0(t_0)-g_0(t_{00}))^T.$$

გარდავქმნათ $\delta g(t_0)-\delta g(t_{00})$ და $g_0(t_0)-g_0(t_{00}))$.

$$|\delta g(t_0)-\delta g(t_{00})|=|\int_{t_{00}}^{t_0}\delta\dot{g}(t)dt|\le\|\delta g\|_1|\delta t_0|\le|\delta\mu|^2;$$

$$g_0(t_0)-g_0(t_{00}))=\int_{t_{00}}^{t_0}\dot{g}_0(t)dt=\int_{t_{00}}^{t_0}\dot{g}_0(t_{00})dt+o(\delta\mu)=\dot{g}_0(t_{00})\delta t_0+\gamma(\delta\mu),$$

სადაც

$$\gamma(\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0}[\dot{g}_0(t)-\dot{g}_0(t_{00})]dt.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$|\gamma(\delta\mu)|=|\int_{t_{00}}^{t_0}[\dot{g}_0(t)-\dot{g}_0(t_{00})]dt|\le\max_{t\in[t_0,t_{00}]}|\dot{g}_0(t)-\dot{g}_0(t_{00})||\delta\mu|,$$

ე. ი.

$$\gamma(\delta\mu)=o(\delta\mu).$$

$$\int_{t_{00}}^{t_0}f(t,y_0(t),\varphi_0(t-\tau_0),g_0(t-\sigma_0),u_0(t),v_0(t),v_0(t-\theta_0))dt=\int_{t_0}^{t_{00}}f_0^+dt+\zeta(\delta\mu),$$

სადაც

$$\zeta(\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0}[f(t,y_0(t),\varphi_0(t-\tau_0),g_0(t-\sigma_0),u_0(t),u_0(t-\rho),v_0(t),v_0(t-\theta_0))-f_0^+]dt.$$

ცხადია რომ, თუ $\delta\mu\to 0$, მაშინ

$$\sup_{t\in[t_0,\,t_{00}]}|f(t,y_0(t)+\Delta y(t),\varphi(t-\tau),g(t-\sigma),u_0(t)+\delta u(t),u_0(t-\rho)+\delta u(t-\rho),v_0(t)+\delta v(t),$$

$$v_0(t-\theta)+\delta v(t-\theta))-f_0^-|\to 0$$

ე. ი. $\zeta(\delta\mu)=o(\delta\mu)$.

ზემომიღებული თანაფარდობების საფუძველზე (1.3.5)-დან მიიღება ფორმულა (1.3.2). ახლა დავამტკიცოთ შეფასება (1.3.1).

$$a_1(t_0,t;\delta\mu) \le L\int_{t_0}^{t} |\Delta y(\xi)|d\xi + \sum_{i=2}^{6} a_i(t_0,t;\delta\mu), \quad (1.3.6)$$

სადაც

$$a_2(t_0,t;\delta\mu) = L\int_{t_0}^{t} |h(t_0,\varphi,\alpha_0+\Delta\alpha)(\xi-\tau) - h(t_{00},\varphi_0,\alpha_0)(\xi-\tau_0)|d\xi,$$

$$a_3(t_0,t;\delta\mu) = L\int_{t_0}^{t} |h(t_0,g,\beta_0+\Delta\beta)(\xi-\sigma) - h(t_{00},g_0,\beta_0)(\xi-\sigma_0)|d\xi,$$

$$a_4(t_0,t;\delta\mu) = L\int_{t_0}^{t} (|\delta u(\xi)| + |\delta u(\xi)|)d\xi, \; a_5(t_0,t;\delta\mu) = L\int_{t_0}^{t} |\delta v(\xi)|d\xi,$$

$$a_6(t_0,t;\delta\mu) = L\int_{t_0}^{t} (|v_0(\xi-\theta) - v_0(\xi-\theta_0)| + |\delta v(\xi-\theta)|)d\xi.$$

შევაფასოთ $a_2(t_{00},t;\delta\mu)$ სამ ეტაპად:

პირველი ეტაპი.

ვთქვათ $t\in[t_0,t_{00}+\tau_0]\subset[t_0,t_0+\tau]$, მაშინ თუ $\xi\in[t_0,t]$, გვექნება $\xi-\tau\le t_0$ და $\xi-\tau_0\le t_{00}$, ამიტომ $a_2(t_{00},t;\delta\mu)$-თვის მივიღებთ

$$a_2(t_0,t;\delta\mu) = L\int_{t_0}^{t} |\varphi_0(t-\tau) + \delta\varphi(t-\tau) - \varphi_0(t-\tau_0)|dt \le$$

$$\le L\int_{t_{00}}^{s_{11}} |\delta\varphi(t-\tau)|dt + L\int_{t_{00}}^{s_{11}} |\varphi_0(t-\tau) - \varphi_0(t-\tau_0)|dt \le$$

$$\le O(\delta\mu) + \int_{t_{00}}^{s_{11}} L\left|\int_{t-\tau_0}^{t-\tau} |\dot\varphi_0(\xi)|d\xi\right| dt \le O(\delta\mu).$$

მეორე ეტაპი.

ვთქვათ $t\in[t_{00}+\tau_0,t_0+\tau]$, თუ $\xi\in[t_{00}+\tau_0,t]$ მაშინ გვექნება

$$\xi - \tau \le t_0 \qquad \text{და} \qquad \xi - \tau_0 \ge t_{00},$$

მივიღებთ

$$a_2(t_0,t;\delta\mu) = a_2(t_0,t_{00}+\tau_0;\delta\mu) + L\int_{t_{00}+\tau_0}^{t} |\varphi_0(\xi-\tau)+\delta\varphi(\xi-\tau)-\alpha_0(\xi-\tau_0)|\,d\xi.$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ამიტომ გვექნება

$$a_2(t_0,t;\delta\mu) \le O(\delta\mu), \quad t\in[t_{00}+\tau_0, t_0+\tau].$$

ამრიგად,

$$a_2(t_0,t;\delta\mu) \le O(\delta\mu), \ \ t\in[t_0,t_0+\tau].$$

მესამე ეტაპი.

ვთქვათ $t\in[t_0+\tau, r_2+\delta_1]$, თუ $\xi\in[t_0+\tau,t]$ მაშინ გვექნება $\xi-\tau\ge t_0$ და $\xi-\tau_0\ge t_{00}$,

მივიღებთ

$$a_2(t_0,t;\delta\mu) = a_2(t_0,t_0+\tau;\delta\mu) + L\int_{t_0+\tau}^{t} |\Delta\alpha(\xi)|\,d\xi$$

$$\le O(\delta\mu) + L\int_{t_0}^{t} |\Delta y(\xi)|\,d\xi.$$

ზემომიღებული შეფასებების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$a_2(t_0,t;\delta\mu) \le O(\delta\mu) + L\int_{t_0}^{t} \Delta y(\xi)d\xi, t\in[t_0,r_1+\delta_1]. \qquad (1.3.7)$$

ანალოგიური ეტაპების გავლით, უმნიშვნელო ცვლილებების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$a_3(t_0,t;\delta\mu) \le O(\delta\mu) + L\int_{t_0}^{t} \Delta y(\xi)d\xi. \qquad (1.3.8)$$

გავაგრძელოთ შეფასებების პროცესი $a_i(t_{00},t;\delta\mu), i=4,5,6.$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$a_i(t_{00},t;\delta\mu) \le O(\delta\mu), i=4,5,6. \qquad (1.3.9)$$

საბოლოოდ დავასკვნით (იხ. (1.3.6-1.3.9)), რომ

$$a_1(t_0,t;\delta\mu)\le O(\delta\mu)+3L\int_{t_0}^{t}|\Delta y(\xi)|d\xi.$$

ბოლო შეფასებისა და (1.3.2) გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\Delta y(t)|\le O(\delta\mu)+3L\int_{t_0}^{t}|\Delta y(\xi)|d\xi.$$

გრონუოლის ლემის თანახმად გვექნება

$$|\Delta y(t)|\le O(\delta\mu)e^{3m_0(s_{11}-t_0)}=O(\delta\mu).$$

ლემა 1.3.1 დამტკიცებულია.

ვთქვათ, ლემა 1.3.1-ში $r_1=t_{00},r_2=t_{10}$, მაშინ $[t_0,t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე გვექნება

$$x_0(t)=y_0(t),x(t;\mu_0+\delta\mu)=y(t;\mu_0+\delta\mu).$$

ამრიგად,

$$\Delta x(t)=\Delta y(t),t\in[t_0,t_{10}+\delta_{.1}].$$

ლემა 1.3.1 ძალით გვექნება

$$|\Delta x(t)|\le O(\delta\mu),\ \forall(t,\delta\mu)\in[t_0,t_{10}+\delta_1]\times(\Lambda^{+}_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0),\qquad(1.3.10)$$

$$|\Delta p(t)|\le|\Delta x(t)|\le O(\delta\mu),\ \forall(t,\delta\mu)\in[t_0,t_{10}+\delta_1]\times(\hat{\Lambda}^{+}_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0),\quad(1.3.11)$$

$$\Delta x(t_0)=(\delta p_0,\delta g(t_{00}))^T+[(\Theta_{m\times1},\dot{g}_0(t_{00}))-f_0^{+}]\delta t_0+o(\delta\mu).\quad(1.3.12)$$

ამ შემთხვევაშიც მსგავსი გარდაქმნებით მტკიცდება (იხ. წინა პუქტი), რომ

$$|\Delta q(t)|\le O(\delta\mu),\ \forall(t,\delta\mu)\in[t_0,t_{10}+\delta_1]\times(\hat{\Lambda}^{+}_{\varepsilon_2}(\mu_0)-\mu_0),\qquad(1.3.13)$$

1.4. თეორემა 1.1.1 დამტკიცება

$\Delta x(t)$ ფუნქცია $[t_{00},t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას

$$\dot{\Delta}x(t)=a(t;\delta\mu)= f[t,x_0+\Delta x,u_0+\delta u,v_0+\delta v]- f[t]=$$

$$= f_x[t]\Delta x(t)+ f_{p_1}[t]\Delta p(t-\tau_0)+ f_{q_1}[t]\Delta q(t-\sigma_0)+r(t;\delta\mu), \qquad (1.4.1)$$

სადაც

$$f[t,x_0+\Delta x,u_0+\delta u,v_0+\delta v]= f(t,x_0(t)+\Delta x(t),p_0(t-\tau)+\Delta p(t-\tau),$$

$$,q_0(t-\sigma)+\Delta q(t-\sigma),u_0(t)+\delta u(t),u_0(t-\rho)+\delta u(t-\rho),v_0(t)+\delta v(t),$$

$$,v_0(t-\theta)+\delta v(t-\theta), \qquad (1.4.2)$$

$$f[t]= f(t,x_0(t),p_0(t-\tau_0),q_0(t-\sigma_0),u_0(t),u_0(t-\rho),v_0(t),v_0(t-\theta_0)),$$

$$r(t;\delta\mu)=a(t;\delta\mu)- f_x[t]\Delta x(t)- f_{p_1}[t]\Delta p(t-\tau_0)- f_{q_1}[t]\Delta q(t-\sigma_0). \qquad (1.4.3)$$

კოშის ფორმულის გამოყენებით (იხ. პუნქტი 1.1) (1.4.1) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს შემდეგი ფორმულით

$$\Delta x(t)=Y(t_{00};t)\Delta x(t_{00})+R_{01}(t;t_{00},\delta\mu)+R_{02}(t;t_{00},\delta\mu)+R_1(t;t_{00},\delta\mu), \qquad (1.4.4)$$

სადაც

$$R_{01}(t;t_{00},\delta\mu)=\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi,$$

$$R_{02}(t;t_{00},\delta\mu)=\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}Y(\xi+\sigma_0;t)f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\Delta q(\xi)d\xi,$$

$$R_1(t;t_{00},\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)r(\xi;t)d\xi,$$

ხოლო $Y(\xi;t)$ არის მატრიც ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1.9) განტოლებას და (1.1.10) საწყის პირობას. ფუნქცია $Y(\xi;t)$ უწყვეტია სიმრავლეზე

$$\Pi=\{(\xi,t):\xi\in[s_{00},s_{01}],t\in[t_{10}-\delta_1,t_{10}+\delta_1]\}$$

იხ. ლემა 2.6 ([57], გვ. 32). ამიტომ

$$Y(t_{00};t)\Delta x(t_{00})=Y(t_{00};t)[(\delta p_0,\delta g(t_{00}))^T+[(\Theta_{m\times 1},\dot{g}_0(t_{00}))^T- f_0^-]\delta t_0]+o(t;\delta\mu) \qquad (1.4.5)$$

(იხ. ფორმულა (1.2.23)). გარდავქმნათ $R_{01}(t;t_{00},\delta\mu)$ და $R_{02}(t;t_{00},\delta\mu)$:

$$R_{01}(t;t_{00},\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}-\tau_0}^{t_0}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_{t_0}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi-\int\limits_{t_0}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi=\int\limits_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi+o(t;\delta\mu);\qquad(1.4.6)$$

ანალოგიურად,

$$R_{02}(t;t_{00},\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}-\sigma_0}^{t_0}Y(\xi+\sigma_0;t)f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi+\int\limits_{t_0}^{t_{00}}Y(\xi+\sigma_0;t)f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\Delta q(\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}Y(\xi+\sigma_0;t)f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi-\int\limits_{t_0}^{t_{00}}Y(\xi+\sigma_0;t)f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_{00}}Y(\xi+\sigma_0;t)f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\Delta q(\xi)d\xi=\int\limits_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}Y(\xi+\sigma_0;t)f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi+o(t;\delta\mu),\quad(1.4.7)$$

რადგანაც $\Delta q(\xi)$ არის $O(\delta\mu)$ რიგის (იხ. ფორმულა (1.2.24)).

ვთქვათ, $t\in[t_{10}-\delta_1,t_{10}+\delta_1]$, მაშინ

$$R_1(t;t_{00},\delta\mu)=\sum_{i=1}^{3}R_{2i}(t;\delta\mu),\qquad(1.4.8)$$

სადაც

$$R_{21}(t;\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)r(\xi;t)d\xi\,,\quad R_{22}(t;\delta\mu)=\int\limits_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)r(\xi;t)d\xi\,,$$

$$R_{23}(t;\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)r(\xi;t)d\xi\,.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$f[\xi;s,\delta\mu]= f(\xi,x_0(\xi)+s\Delta x(\xi),p_0(\xi-\tau_0)+s(p_0(\xi-\tau)-p_0(\xi-\tau_0)+\Delta p(\xi-\tau)),$$

$$,q_0(\xi-\sigma_0)+s(q_0(\xi-\sigma)-q_0(\xi-\sigma_0)+\delta q(\xi-\sigma)),u_0(\xi)+s\delta u(\xi),u_0(\xi-\rho)+s\delta u(\xi-\rho),$$

$$,v_0(\xi)+s\delta v(\xi),v_0(\xi-\theta_0)+s(v_0(\xi-\theta)-v_0(\xi-\theta_0)+\Delta v(\xi-\theta));$$

$$\vartheta_x(\xi;s,\delta\mu)= f_x[\xi;s,\delta\mu]-f_x[\xi],\ \vartheta_{p_1}(\xi;s,\delta\mu)= f_{p_1}[\xi;s,\delta\mu]-f_{p_1}[\xi],$$

$$,\vartheta_{q_1}(\xi;s,\delta\mu)= f_{q_1}[\xi;s,\delta\mu]-f_{q_1}[\xi],\ \vartheta_u(\xi;s,\delta\mu)= f_u[\xi;s,\delta\mu]-f_u[\xi],$$

$$\vartheta_\omega(\xi;s,\delta\mu)= f_\omega[\xi;s,\delta\mu]-f_\omega[\xi]\ ,\vartheta_v(\xi;s,\delta\mu)= f_v[\xi;s,\delta\mu]-f_v[\xi],$$

$$\vartheta_w(\xi;s,\delta\mu)= f_w[\xi;s,\delta\mu]-f_w[\xi];$$

$$\vartheta_x(\xi;\delta\mu)=\int_0^1\vartheta_x(\xi;s,\delta\mu)ds\ ,\ \vartheta_{p_1}(\xi;\delta\mu)=\int_0^1\vartheta_{p_1}(\xi;s,\delta\mu)ds,\ \vartheta_{q_1}(\xi;\delta\mu)=\int_0^1\vartheta_{q_1}(\xi;s,\delta\mu)ds,$$

$$\vartheta_u(\xi;\delta\mu)=\int_0^1\vartheta_u(\xi;s,\delta\mu)ds,\ \vartheta_\omega(\xi;\delta\mu)=\int_0^1\vartheta_\omega(\xi;s,\delta\mu)ds,$$

$$\vartheta_v(\xi;\delta\mu)=\int_0^1\vartheta_v(\xi;s,\delta\mu)ds,\ \vartheta_w(\xi;\delta\mu)=\int_0^1\vartheta_w(\xi;s,\delta\mu)ds.$$

შემოღებული აღნიშვნების გამოყენებით $a(\xi;\delta\mu)$ გამოსახულება (იხ. (1.4.1)-(1.4.2)) შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$a(\xi;\delta\mu)=\int_0^1\frac{d}{ds}f[\xi;s,\delta\mu]ds=\int_0^1\{f_x[\xi;s,\delta\mu]\Delta x(\xi)+$$

$$+f_{p_1}[\xi;s,\delta\mu](p_0(\xi-\tau)-p_0(\xi-\tau_0)+\Delta p(\xi-\tau))+f_{q_1}[\xi;s,\delta\mu](q_0(\xi-\sigma)-$$

$$-q_0(\xi-\sigma_0)+\Delta q(\xi-\sigma))+f_u[\xi;s,\delta\mu]\delta u(\xi)+f_\omega[\xi;s,\delta\mu]\delta u(\xi-\rho)+f_v[\xi;s,\delta\mu]\delta v(\xi)+$$

$$+f_w[\xi;s,\delta\mu](v_0(\xi-\theta)-v_0(\xi-\theta_0)+\delta v(\xi-\theta))\}ds.$$

ვისარგებლოთ უკანასკნელი თანაფარდობით, მივიღებთ

$$R_{21}(t;\delta\mu)=\sum_{i=1}^{6}R_{3i}(t;\delta\mu)\,, \qquad (1.4.9)$$

სადაც

$$R_{31}(t;\delta\mu)=\int_{t_{oo}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)\{\int_0^1 f_x[\xi;s,\delta\mu]\Delta x(\xi)ds-f_x[\xi]\Delta x(\xi)\}d\xi,$$

$$R_{32}(t;\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)\{\int_0^1 f_{p_1}[\xi;s,\delta\mu](p_0(\xi-\tau)-p_0(\xi-\tau_0)+\Delta p(\xi-\tau))ds-$$

$$-f_{p_1}[\xi]\Delta p(\xi-\tau_0)\}d\xi,$$

$$R_{33}(t;\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)\{\int_0^1 f_{q_1}[\xi;s,\delta\mu](q_0(\xi-\sigma)-q_0(\xi-\sigma_0)+\Delta q(\xi-\sigma))ds-$$

$$-f_{q_1}[\xi]\Delta q(\xi-\sigma_0)\}d\xi,$$

$$R_{34}(t;\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)\int_0^1 f_u[\xi;s,\delta\mu](\delta u(\xi)+\delta u(\xi-\rho))ds,$$

$$R_{35}(t;\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)\int_0^1 f_v[\xi;s,\delta\mu]\delta v(\xi)ds,$$

$$R_{36}(t;\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)\{\int_0^1 f_w[\xi;s,\delta\mu](v_0(\xi-\theta)-v_0(\xi-\theta_0)+\delta v(\xi-\theta))ds.$$

გარდავქმნათ $R_{3i}(t;\delta\mu), i=1,...,6$ შესაკრებები.

ცხადია

$$R_{31}(t;\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)\vartheta_x(\xi;\delta\mu)\Delta x(\xi)\}d\xi$$

ამიტომ

$$|R_{31}(t;\delta\mu)|\le\|Y\|O(\delta\mu)\vartheta_x(\delta\mu).$$

$$\vartheta_x(\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}|\hat{\vartheta}_x(\xi;\delta\mu)|d\xi|,\|Y\|=\sup\{|Y(\xi;t)|:(\xi,t)\in\Pi\},$$

$$\hat{\vartheta}_x(\xi;\delta\mu)=\int_0^1[f_x(\xi,x_0(\xi)+s\Delta x(\xi),\varphi_0(\xi-\tau_0)+s(\varphi_0(\xi-\tau)-\varphi_0(\xi-\tau_0)+\delta\varphi(\xi-\tau)),$$

$$,q_0(\xi-\sigma_0)+s(q_0(\xi-\sigma)-q_0(\xi-\sigma_0)+\delta q(\xi-\sigma)),u_0(\xi)+s\delta u(\xi),u_0(\xi-\rho)+s\delta u(\xi-\rho)$$

$$,v_0(\xi-\theta_0)+s(v_0(\xi-\theta)-v_0(\xi-\theta_0)+\delta v(\xi-\theta)))-f_x(\xi,x_0(\xi),\varphi_0(\xi-\tau_0),q_0(\xi-\sigma_0),$$

$$,u_0(\xi),u_0(\xi-\rho),v_0(\xi),v_0(\xi-\theta_0)]d\xi.$$

როცა $\xi\in[t_{00},t_0+\tau)$ მაშინ $\xi-\tau<t_0,\ \xi-\tau_0<t_{00}$ ე.ი.

$$\vartheta_x(\xi;\delta\mu)=\hat{\vartheta}(\xi;\delta\mu)$$

და

$$\vartheta_x(\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau}|\,\vartheta_x(\xi;\delta\mu)\,|d\xi\le\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0}|\,\hat{\vartheta}_x(\xi;\delta\mu)\,|d\xi.$$

ლებეგის თეორემის ძალით უტოლობის მარჯვენა მხარე მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $\delta\mu\to 0$. ამრიგად,

$$R_{31}(t;\delta\mu)=o(t;\delta\mu). \qquad (1.4.10)$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად $R_{32}(t;\delta\mu)$ -თვის მივიღებთ

$$R_{32}(t;\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)\{\vartheta_{p_1}(\xi;\delta\mu)(p_0(\xi-\tau)-p_0(\xi-\tau_0)+\Delta p(\xi-\tau)\}d\xi+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi](p_0(\xi-\tau)-p_0(\xi-\tau_0)+\Delta p(\xi-\tau)-\Delta p(\xi-\tau_0))d\xi.$$

როცა $\xi\in[t_{00},t_0+\tau)$, მაშინ

$$\Delta p(\xi-\tau)=\delta\varphi(t-\tau)=O(\delta\mu),$$

$$\Delta p(\xi-\tau)-\Delta p(\xi-\tau_0)=\delta\varphi(\xi-\tau)-\delta\varphi(\xi-\tau_0)=\int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau}\dot{\delta\varphi}(\varsigma)d\varsigma=o(\delta\mu),$$

$$p_0(\xi-\tau)-p_0(\xi-\tau_0)=\varphi_0(\xi-\tau)-\varphi_0(\xi-\tau_0)=\int_0^1\frac{d}{ds}\varphi_0(\xi-\tau_0-s\delta\tau)ds=$$

$$=-\delta\tau\int_0^1\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_0-s\delta\tau)ds=-\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_0)\delta\tau-\delta\tau\int_0^1[\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_0-s\delta\tau)-\varphi_0(\xi-\tau_0)]d\xi=$$

$$=-\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_0)\delta\tau+o(\delta\mu)=-\dot{p}_0(\xi-\tau_0)\delta\tau+o(\delta\mu).$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $\vartheta_p(\delta\mu)\to 0$ როცა $\delta\mu\to 0$.

ამრიგად,

$$R_{32}(t;\delta\mu) = -(\int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_{p_1}[\xi] \dot{p}_0(\xi - \tau_0) d\xi) \delta\tau + o(t;\delta\mu). \qquad (1.4.11)$$

შემდეგ,

$$R_{33}(t;\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) \{\vartheta_{q_1}(\xi;\delta\mu)(q_0(\xi-\sigma) - q_0(\xi-\sigma_0) + \Delta q(\xi-\sigma)\} d\xi +$$

$$+ \int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi](q_0(\xi-\sigma) - q_0(\xi-\sigma_0) + \Delta q(\xi-\sigma) - \Delta q(\xi-\sigma_0)) d\xi.$$

$q_0(\xi)$ აბსოლუტურად უწყვეტია $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$ ინტერვალზე,

ამიტომ

$q_0(\xi-\sigma) - q_0(\xi-\sigma_0) \to 0$ თანაბრად $\xi \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1]$ როცა $\delta\mu \to 0$.

გარდა ამისა, $|\Delta q(\xi)| \le O(\delta\mu), \xi \in [\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$ და

$$q_0(\xi-\sigma) - q_0(\xi-\sigma_0) = \int_{\xi}^{\xi-\delta\sigma} \dot{q}_0(\varsigma - \sigma_0) d\varsigma.$$

$\dot{q}_0(\varsigma - \sigma_0)$ ფუნქციის თითქმის ყველა (თ. ყ.) ფიქსირებული $\xi \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1]$

ლებეგის წერტილისთვის გვექნება

$$\int_{\xi}^{\xi-\delta\sigma} \dot{q}_0(\varsigma - \sigma_0) d\varsigma = -\dot{q}_0(\xi - \sigma_0)\delta\sigma + \rho(\xi;\delta\sigma) \qquad (1.4.12)$$

მასთან

$$\lim_{\delta\mu \to 0} \frac{\rho(\xi;\delta\sigma)}{|\delta\sigma|} = 0 \qquad (1.4.13)$$

თ. ყ. $\xi \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1]$.

(1.4.12)-დან გამომდინარეობს

$$\frac{|\rho(\xi;\delta\sigma)|}{|\delta\sigma|} = \frac{1}{|\delta\sigma|} \int_{\xi}^{\xi-\delta\sigma} \dot{q}_0(\varsigma - \sigma_0) d\varsigma + \dot{q}_0(\xi - \sigma_0).$$

$|\dot{q}_0(\xi)|$ თ. ყ. $\xi \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1]$ შემოსაზღვრულია, ამიტომ

$$\frac{|\rho(\xi;\delta\sigma)|}{|\delta\sigma|} \le const,\ \xi \in [t_{00}, t_{10} + \delta_{10}]. \qquad (1.4.14)$$

(1.4.13)-(1.4.14)-დან დავასკვნით

$$\frac{\rho(\xi;\delta\sigma)}{|\delta\mu|} \to 0, \quad \frac{|\rho(\xi;\delta\sigma)|}{|\delta\mu|} \le const \quad \text{თ. ყ. } \xi \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1]$$

რადგანაც

$$\frac{\rho(\xi;\delta\sigma)}{|\delta\mu|} \le \frac{\rho(\xi;\delta\sigma)}{|\delta\sigma|}. \qquad (1.4.15)$$

ამრიგად,

$$R_{33}(t;\delta\mu) = -(\int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi - \sigma_0)d\xi)\delta\sigma + \int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\rho(\xi;\delta\sigma)d\xi + o(t;\delta\mu).$$

შემდეგ,

$$\frac{1}{|\delta\mu|}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\rho(\xi;\delta\sigma)d\xi \le \frac{1}{|\delta\sigma|}\int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\rho(\xi;\delta\sigma)d\xi \to 0$$

(იხ. (1.4.14)-(1.4.15)), ე. ი.

$$\int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\rho(\xi;\delta\sigma)d\xi = o(t;\delta\mu).$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით გვექნება

$$R_{33}(t;\delta\mu) = -(\int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi - \sigma_0)d\xi)\delta\sigma + o(t;\delta\mu). \qquad (1.4.16)$$

ანალოგიური გარდაქმნებით დამტკიცდება, რომ

$$R_{34}(t;\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_u[\xi]\delta u(\xi) + o(t;\delta\mu), \qquad (1.4.17)$$

$$R_{35}(t;\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_v[\xi]\delta v(\xi) + o(t;\delta\mu), \qquad (1.4.18)$$

$$R_{36}(t;\delta\mu)=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)f_w[\xi](-\dot{v}_0(\xi-\theta_0)\delta\theta+\delta v(\xi-\theta_0))d\xi+o(t;\delta\mu). \qquad (1.4.19)$$

$R_{21}(t;\delta\mu)$ -თვის საბოლოოდ მივიღებთ (იხ. (1.4.10), (1.4.11), (1.4.16)-(1.4.19))

$$R_{21}(t;\delta\mu)=-(\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\dot{p}_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau-(\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)f_w[\xi](-\dot{v}_0(\xi-\theta_0)\delta\theta+\delta v(\xi-\theta_0))+\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)f_v[\xi]\delta v(\xi)+o(t;\delta\mu). \qquad (1.4.20)$$

ცხადია,

$$-(\int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau-(\int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma+$$

$$+\int_{t_0+\tau_0}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_w[\xi](-\dot{v}_0(\xi-\theta_0)\delta\theta+\delta v(\xi-\theta_0))+\int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)f_v[\xi]\delta v(\xi)+o(t;\delta\mu)=o(t;\delta\mu)$$

ამიტომ (1.4.20) ტოლობა შეიძლება შევცვალოთ ტოლობით

$$R_{21}(t;\delta\mu)=-(\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau-(\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_w[\xi](-\dot{v}_0(\xi-\theta_0)\delta\theta+\delta v(\xi-\theta_0))+\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_v[\xi]\delta v(\xi)+o(t;\delta\mu). \qquad (1.4.21)$$

ახლა გარდავქმნათ $R_{22}(t;\delta\mu)$

$$R_{22}(t;\delta\mu)=\int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)(f[\xi,x_0+\Delta x,u_0+\delta u,v_0+\delta v]-f[\xi])d\xi-\int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_x[\xi]\Delta x(\xi)d\xi-$$

$$-\int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_{p_1}[\xi]\Delta p(\xi-\tau_0)d\xi - \int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\Delta q(\xi-\sigma_0)d\xi.$$

თუ $\xi \in [t_0+\tau, t_{00}+\tau_0]$ მაშინ

$$\Delta p(\xi-\tau) = \alpha_0(\xi-\tau) + \Delta\alpha(\xi-\tau)$$

გარდა ამისა,

$$\xi \to t_{00}+\tau_0-,\ \xi-\tau \to t_{00}-,\ \alpha_0(\xi-\tau) \to p_{00}, \Delta\alpha(\xi-\tau) \to 0$$

როცა $\delta\mu \to 0$ (იხ. (1.2.4), 1.2.6, 1.2.9)).

ზემოაღნიშნულის გათვალისწინებით გვექნება

$$\lim_{\delta\mu\to 0} f[\xi, x_0+\Delta x, u_0+\delta u, v_0+\delta v] =$$

$$= \lim_{\xi\to t_{00}+\tau_0-} f(\xi, x_0(\xi)+\Delta x(\xi), \alpha_0(\xi-\tau)+\Delta\alpha(\xi-\tau), q_0(\xi-\sigma)+\Delta q(t-\sigma), u_0(\xi)+\delta u(\xi),$$

$$v_0(\xi)+\delta v(\xi), v_0(\xi-\theta)+\delta v(\xi-\theta)) = f(t_{00}+\tau_0, x_0(t_{00}+\tau_0), p_{00}, q_0(t_{00}+\tau_0-\sigma_0), u_0(t_{00}+\tau_0-),$$

$$, v_0(t_{00}+\tau_0), v_0(t_{00}+\tau_0-\theta_0)),$$

$$\lim_{\delta\mu\to 0} f[\xi] = \lim_{\xi\to t_{00}+\tau_0-} f(\xi, x_0(\xi), \varphi_0(\xi-\tau_0), q_0(\xi-\sigma_0), u_0(\xi), v_0(\xi), v_0(\xi-\theta_0)) =$$

$$= f(t_{00}+\tau_0, x_0(t_{00}+\tau_{00}), \varphi_0(t_{00}), q_0(t_{00}+\tau_0-\sigma_0), u_0(t_{00}+\tau_0-), v_0(t_{00}+\tau_0), v_0(t_0+\tau_0-\theta_0)).$$

ამრიგად,

$$\lim_{\delta\mu\to 0} Y(\xi; t+\tau_0)\{f[\xi, x_0+\Delta x, u_0+\delta u, v_0+\delta v] - f[\xi]\} = Y(t_{00}+\tau_0;t) f_0^-$$

და აქედან გამომდინარე

$$\lim_{\delta\mu\to 0}\sup\left\{|Y(\xi;t)(f[\xi, x_0+\Delta x, u_0+\delta u, v_0+\delta v] - f[\xi]) - Y(t_{00}+\tau_0;t) f_0^-| : \xi \in [t_0+\tau, t_{00}+\tau_{00}]\right\} = 0.$$

შემდეგ,

$$\int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t)(f[\xi, x_0+\Delta x, u_0+\delta u, v_0+\delta v] - f[\xi])d\xi = \int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_{00}} Y(t_{00}+\tau_0;t) f_0^- d\xi +$$

$$+\int_{t_0}^{t_{00}} \{Y(\xi;t)(f[\xi, x_0+\Delta x, u_0+\delta u, v_0+\delta v] - f[\xi]) - Y(t_{00}+\tau_0;t) f_0^-\}d\xi =$$

$$= -Y(t_{00}+\tau_{00};t)\,f_0^-(\delta t_0+\delta\tau)+o(t;\delta\mu);$$

$$\int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t)f_x[\xi]\Delta x(\xi)d\xi = o(t;\delta\mu),$$

$$\int_{t_0+\tau}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\Delta p(\xi-\tau_0)d\xi = \int_{t_0+\tau-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{t_0-\delta\tau}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi = \int_{t_0-\delta\tau}^{t_0} Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int_{t_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi = o(t;\delta\mu)+\int_{t_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi,$$

$$\int_{t_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi = o(t;\delta\mu).$$

საბოლოოდ $R_{22}(t;\delta\mu)$-თვის მივიღებთ

$$R_{22}(t;\delta\mu) = -Y(t_{00}+\tau_{00};t)\,f_0^-(\delta t_0+\delta\tau) - \int_{t_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi + o(t;\delta\mu). \quad (1.6.22)$$

თუ $\xi \ge t_{00}+\tau_0$ მაშინ

$$\Delta x(\xi) = O(\delta\mu),\ \Delta p(\xi) = O(\delta\mu), \Delta q(\xi) = O(\delta\mu).$$

უკანასკნელი ტოლობების გათვალისწინებით გარდავქმნათ $R_{23}(t;\delta\mu)$:

$$R_{23}(t;\delta\mu) = \sum_{i=1}^{6} R_{4i}(t;\delta\mu),$$

სადაც

$$R_{41}(t;\delta\mu) = \int_{t_{00}+\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi;t)\{\int_0^1 f_x[\xi;s,\delta\mu]\Delta x(\xi)ds - f_x[\xi]\Delta x(\xi)\}d\xi,$$

$$R_{42}(t;\delta\mu) = \int_{t_{00}+\tau_0}^{t} Y(\xi;t)\{\int_0^1 f_{p_1}[\xi;s,\delta\mu](p_0(\xi-\tau)-p_0(\xi-\tau_0)+\Delta p(\xi-\tau))ds -$$

$$- f_{p_1}[\xi]\Delta p(\xi-\tau_0)\}d\xi,$$

$$R_{43}(t;\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)\{\int\limits_0^1 f_{q_1}[\xi;s,\delta\mu](q_0(\xi-\sigma)-q_0(\xi-\sigma_0)+\Delta q(\xi-\sigma))ds-$$

$$-f_{q_1}[\xi]\Delta q(\xi-\sigma_0)\}d\xi,$$

$$R_{44}(t;\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)\int\limits_0^1 f_u[\xi;s,\delta\mu]\delta u(\xi)ds,$$

$$R_{45}(t;\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)\int\limits_0^1 f_v[\xi;s,\delta\mu]\delta v(\xi)ds,$$

$$R_{46}(t;\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)\{\int\limits_0^1 f_w[\xi;s,\delta\mu](v_0(\xi-\theta)-v_0(\xi-\theta_0)+\delta v(\xi-\theta))ds.$$

ანალოგიური მსჯელობით, რომელიც გამოყენებული იყო $R_{22}(t;\delta\mu)$ შესაკრებების გარდაქმნისას (იხ. 1.4.9) დავადგენთ, რომ

$$R_{41}(t;\delta\mu)=o(t;\delta\mu),\ \ R_{42}(t;\delta\mu)=-(\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\dot p_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau+o(t;\delta\mu),$$

$$R_{43}(t;\delta\mu)=-(\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)f_{q_1}[\xi]\dot q_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma+o(t;\delta\mu).$$

$$R_{44}(t;\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)+o(t;\delta\mu),$$

$$R_{45}(t;\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)f_v[\xi]\delta v(\xi)+o(t;\delta\mu),$$

$$R_{46}(t;\delta\mu)=\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)f_w[\xi](-\dot v_0(\xi-\theta_0)\delta\theta+\delta v(\xi-\theta_0))d\xi+o(t;\delta\mu).$$

ამრიგად, როცა $t\in[t_{10}-\tau_0,t_{00}+\tau_0]$, მაშინ $R_{23}(t;\delta\mu)$-თვის გვექნება შემდეგი წარმოდგენა

$$R_{23}(t;\delta\mu)=-(\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\dot p_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau-(\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)f_{q_1}[\xi]\dot q_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma+$$

$$+\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)f_w[\xi](-\dot v_0(\xi-\theta_0)\delta\theta+\delta v(\xi-\theta_0))+\int\limits_{t_{00}+\tau_0}^{t}Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)+$$

$$+\int_{t_{00}+\tau_0}^{t} Y(\xi;t) f_v[\xi]\delta v(\xi) + o(t;\delta\mu). \qquad (1.4.23)$$

(1.4.8) -დან (1.4.21)-(1.4.23) საფუძველზე მივიღებთ

$$R_1(t;t_{00},\delta\mu) = -(\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_{p_1}[\xi]\dot{p}_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau - (\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma -$$

$$-Y(t_{00}+\tau_{00};t) f_0^-(\delta t_0+\delta\tau) - \int_{t_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t) f_p[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi +$$

$$+\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_w[\xi](-\dot{v}_0(\xi-\theta_0)\delta\theta + \delta v(\xi-\theta_0)) + \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_u[\xi]\delta u(\xi) +$$

$$+\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_v[\xi]\delta v(\xi) + o(t;\delta\mu). \qquad (1.4.24)$$

(1.4.4)-დან (1.4.5)-(1.4.7) და (1.4.24) გათვალისწინებით მიიღება (1.1.6) და (1.1.7) ფორმულები. თეორემა 1.1.1 დამტკიცებულია.

1.5. თეორემა 1.1.2 დამტკიცება

$\Delta x(t)$ ფუნქცია $[t_0, t_{10}+\delta_1]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას

$$\Delta\dot{x}(t) = f_x[t]\Delta x(t) + f_{p_1}[t]\Delta p(t-\tau_0) + f_{q_1}[t]\Delta q(t-\sigma_0) + r(t;\delta\mu) \quad (1.5.1)$$

(იხ. (1.4.1)-(1.4.3)).

კოშის ფორმულის გამოყენებით (1.5.1) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს შემდეგი ფორმულით

$$\Delta x(t) = Y(t_0;t)\Delta x(t_0) + R_{01}(t;t_0,\delta\mu) + R_{02}(t;t_0,\delta\mu) + R_1(t;t_0,\delta\mu), \qquad (1.5.2)$$

სადაც

$$R_{01}(t;t_0,\delta\mu) = \int_{t_0-\tau_0}^{t_0} Y(\xi+\tau_0;t) f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi,$$

$$R_{02}(t;t_0,\delta\mu)=\int\limits_{t_0-\sigma_0}^{t_0} Y(\xi+\sigma_0;t)\,f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\Delta q(\xi)d\xi,$$

$$R_1(t;t_0,\delta\mu)=\int\limits_{t_0}^{t} Y(\xi;t)r(\xi;t)d\xi,$$

ცხადია, რომ

$$Y(t_0;t)\Delta x(t_0)=Y(t_0;t)[(\delta p_0,\delta g(t_{00}))^T+[(\Theta_{m\times1},\dot g_0(t_{00}))^T-f_0^+]\delta t_0]+o(t;\delta\mu)$$

(იხ. (1.3.12)). ფუნქცია $Y(\xi;t)$ უწყვეტია სიმრავლეზე

$$\Pi=\{(\xi,t):\xi\in[s_{00},s_{01}],t\in[t_{10}-\delta_1,t_{10}+\delta_1]\}$$

ამიტომ

$$Y(t_0;t)=Y(t_{00};t)+O(t;\delta\mu),$$

ე. ი.

$$Y(t_0;t)\Delta x(t_0)=Y(t_{00};t)[(\delta p_0,\delta g(t_{00}))^T+[(\Theta_{m\times1},\dot g_0(t_{00}))^T-f_0^+]\delta t_0]+o(t;\delta\mu)\,. \qquad (1.5.3)$$

გარდავქმნათ $R_{01}(t;t_0,\delta\mu)$ და $R_{02}(t;t_0,\delta\mu)$:

$$R_{01}(t;t_0,\delta\mu)=\int\limits_{t_0-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)\,f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_{t_{00}}^{t_0} Y(\xi+\tau_0;t)\,f_{p_1}[\xi+\tau_0](\varphi(\xi)-x_0(\xi))d\xi=$$

$$=\int\limits_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)\,f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi-\int\limits_{t_{00}-\tau_0}^{t_0-\tau_0} Y(\xi+\tau_0;t)\,f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_{00}}^{t_0} Y(\xi+\tau_0;t)\,f_{p_1}[\xi+\tau_0](\varphi(\xi)-x_0(\xi))d\xi=\int\limits_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)\,f_{p_1}[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_{00}}^{t_0} Y(\xi+\tau_0;t)\,f_{p_1}[\xi+\tau_0](\varphi(\xi)-x_0(\xi))d\xi+o(t;\delta\mu)\,; \qquad (1.5.4)$$

ანალოგიურად,

$$R_{02}(t;t_0,\delta\mu)=\int\limits_{t_0-\sigma_0}^{t_{00}} Y(\xi+\sigma_0;t)\,f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi+\int\limits_{t_{00}}^{t_0} Y(\xi+\sigma_0;t)\,f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\Delta q(\xi)d\xi=$$

$$= \int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(\xi+\sigma_0;t) f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi - \int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_0-\tau_0} Y(\xi+\sigma_0;t) f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi +$$

$$+o(\delta\mu) = \int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(\xi+\sigma_0;t) f_{q_1}[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi + o(t;\delta\mu), \quad (1.5.5)$$

ვთქვათ, $t\in[t_{10}-\delta_1, t_{10}+\delta_1]$, მაშინ

$$R_1(t;t_0,\delta\mu) = \sum_{i=1}^{3} \hat{R}_{2i}(t;\delta\mu), \qquad (1.5.6)$$

სადაც

$$\hat{R}_{21}(t;\delta\mu) = \int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) r(\xi;t)d\xi\,, \quad \hat{R}_{22}(t;\delta\mu) = \int_{t_{00}+\tau_0}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) r(\xi;t)d\xi\,,$$

$$\hat{R}_{23}(t;\delta\mu) = \int_{t_0+\tau}^{t} Y(\xi;t) r(\xi;t)d\xi\,.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ $\hat{R}_{21}(t;\delta\mu)$ გამოსახულება $r(t;\delta\mu)$ გათვალისწინებით ასე შეიძლება ჩაიწეროს

$$\hat{R}_{21}(t;\delta\mu) = \sum_{i=1}^{6} \hat{R}_{3i}(t;\delta\mu)\,, \qquad (1.5.7)$$

სადაც

$$\hat{R}_{31}(t;\delta\mu) = \int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t)\{\int_0^1 f_x[\xi;s,\delta\mu]\Delta x(\xi)ds - f_x[\xi]\Delta x(\xi)\}d\xi,$$

$$\hat{R}_{32}(t;\delta\mu) = \int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t)\{\int_0^1 f_{p_1}[\xi;s,\delta\mu](p_0(\xi-\tau)-p_0(\xi-\tau_0)+\Delta p(\xi-\tau))ds -$$

$$- f_{p_1}[\xi]\Delta p(\xi-\tau_0)\}d\xi,$$

$$\hat{R}_{33}(t;\delta\mu) = \int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t)\{\int_0^1 f_{q_1}[\xi;s,\delta\mu](q_0(\xi-\sigma)-q_0(\xi-\sigma_0)+\Delta q(\xi-\sigma))ds -$$

$$- f_{q_1}[\xi]\Delta q(\xi-\sigma_0)\}d\xi,$$

$$\hat{R}_{34}(t;\delta\mu)=\int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)\int_0^1(f_u[\xi;s,\delta\mu]\delta u(\xi)+f_\omega[\xi]\delta u(\xi-\rho))ds,$$

$$\hat{R}_{35}(t;\delta\mu)=\int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)\int_0^1 f_v[\xi;s,\delta\mu]\delta v(\xi)ds,$$

$$\hat{R}_{36}(t;\delta\mu)=\int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)\{\int_0^1 f_w[\xi;s,\delta\mu](v_0(\xi-\theta)-v_0(\xi-\theta_0)+\delta v(\xi-\theta))ds.$$

გარდავქმნათ $\hat{R}_{3i}(t;\delta\mu), i=1,...,6$ შესაკრებები.

ცხადია

$$\hat{R}_{31}(t;\delta\mu)=\int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)\vartheta_x(\xi;\delta\mu)\Delta x(\xi)\}d\xi$$

ამიტომ

$$|\hat{R}_{31}(t;\delta\mu)|\le\|Y\|\,O(\delta\mu)\vartheta_x(\delta\mu).$$

აქედან, წინა პუნქტში ჩატარებული ანალოგიული მსჯელობის საფუძველზე დავასკვნით, რომ

$$\hat{R}_{31}(t;\delta\mu)=o(t;\delta\mu). \qquad (1.5.8)$$

შემდეგ, $\hat{R}_{32}(t;\delta\mu)$-თვის მივიღებთ

$$\hat{R}_{32}(t;\delta\mu)=\int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)\{\vartheta_{p_1}(\xi;\delta\mu)(\varphi_0(\xi-\tau)-\varphi_0(\xi-\tau_0)+\delta\varphi(\xi-\tau)\}d\xi+$$

$$+\int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi](\varphi_0(\xi-\tau)-\varphi_0(\xi-\tau_0)+\delta\varphi(\xi-\tau)-\delta\varphi(\xi-\tau_0))d\xi=$$

$$=-(\int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\dot{p}_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau+o(t;\delta\mu). \qquad (1.5.9)$$

დანარჩენი შესაკრებებისთვის, უმნიშვნელო ცვლილებებით (იხ. პუნქტი 1.4), დავამტკიცებთ, რომ

$$\hat{R}_{33}(t;\delta\mu) = -(\int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma + o(t;\delta\mu). \qquad (1.5.10)$$

$$\hat{R}_{34}(t;\delta\mu) = \int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_u[\xi]\delta u(\xi) + o(t;\delta\mu), \qquad (1.5.11)$$

$$R_{35}(t;\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t_0+\tau} Y(\xi;t) f_v[\xi]\delta v(\xi) + o(t;\delta\mu), \qquad (1.5.12)$$

$$\hat{R}_{36}(t;\delta\mu) = \int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_w[\xi](-\dot{v}_0(\xi-\theta_0)\delta\theta + \delta v(\xi-\theta_0))d\xi + o(t;\delta\mu). \qquad (1.5.13)$$

$\hat{R}_{21}(t;\delta\mu)$-თვის საბოლოოდ მივიღებთ (იხ. (1.5.7)-(1.5.13))

$$\hat{R}_{21}(t;\delta\mu) = -(\int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_{p_1}[\xi]\dot{p}_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau - (\int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_w[\xi](-\dot{v}_0(\xi-\theta_0)\delta\theta + \delta v(\xi-\theta_0)) + \int_{t_0}^{t_{00}+\tau} Y(\xi;t) f_u[\xi]\delta u(\xi) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_v[\xi]\delta v(\xi) + o(t;\delta\mu). \qquad (1.5.14)$$

ცხადია,

$$-(\int_{t_{00}}^{t_0} Y(\xi;t) f_{p_1}[\xi]\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau - (\int_{t_{00}}^{t_0} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma +$$

$$+ \int_{t_{00}}^{t_0} Y(\xi;t) f_w[\xi](-\dot{v}_0(\xi-\theta_0)\delta\theta + \delta v(\xi-\theta_0)) + \int_{t_{00}}^{t_0} Y(\xi;t) f_u[\xi]\delta u(\xi) +$$

$$+ \int_{t_{00}}^{t_0} Y(\xi;t) f_v[\xi]\delta v(\xi) + o(t;\delta\mu) = o(t;\delta\mu)$$

ამიტომ (1.5.14) ტოლობა შეიძლება შევცვალოთ ტოლობით

$$\hat{R}_{21}(t;\delta\mu) = -(\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_{p_1}[\xi]\dot{\varphi}_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau - (\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t) f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma +$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t)f_w[\xi](-\dot v_0(\xi-\theta_0)\delta\theta+\delta v(\xi-\theta_0))+\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{00}+\tau_0} Y(\xi;t)f_v[\xi]\delta v(\xi)+o(t;\delta\mu). \qquad (1.5.15)$$

ახლა გარდავქმნათ $\hat R_{22}(t;\delta\mu)$

$$\hat R_{22}(t;\delta\mu)=\int_{t_{00}+\tau_0}^{t_0+\tau} Y(\xi;t)(f[\xi,x_0+\Delta x,u_0+\delta u,v_0+\delta v]-f[\xi])d\xi-\int_{t_{00}+\tau_0}^{t_0+\tau} Y(\xi;t)f_x[\xi]\Delta x(\xi)d\xi-$$

$$-\int_{t_{00}+\tau_0}^{t_0+\tau} Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\Delta p(\xi-\tau_0)d\xi-\int_{t_{00}+\tau_0}^{t_0+\tau} Y(\xi;t)f_{q_1}[\xi]\Delta q(\xi-\sigma_0)d\xi.$$

თუ $\xi\in[t_{00}+\tau_0,t_0+\tau]$ მაშინ $\xi\to t_{00}+\tau_0+$ როცა $\delta\mu\to 0$. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ

$$\lim_{\delta\mu\to 0} f[\xi,x_0+\Delta x,u_0+\delta u,v_0+\delta v]=f(t_{00}+\tau_0,x_0(t_{00}+\tau_0),\varphi_0(t_{00}),q_0(t_{00}+\tau_0),u_0(t_{00}+\tau_0+),$$

$$,u_0(t_{00}+\tau_0-\rho+),v_0(t_{00}+\tau_0),v_0(t_{00}+\tau_0-\theta_0)),$$

$$\lim_{\delta\mu\to 0} f[\xi]=f(t_{00}+\tau_0,x_0(t_{00}+\tau_{00}),p_{00},q_0(t_{00}+\tau_0-\sigma_0),u_0(t_{00}+\tau_0+),v_0(t_{00}+\tau_0),v_0(t_0+\tau_0-\theta_0)).$$

ამრიგად,

$$\lim_{\delta\mu\to 0} Y(\xi;t+\tau_0)\{f[\xi,x_0+\Delta x,u_0+\delta u,v_0+\delta v]-f[\xi]\}=-Y(t_{00}+\tau_0;t)f_0^+$$

და აქედან გამომდინარე

$$\lim_{\delta\mu\to 0}\sup\Big\{\ |Y(\xi;t)(f[\xi,x_0+\Delta x,u_0+\delta u,v_0+\delta v]-f[\xi])-Y(t_{00}+\tau_0;t)f_0^+|:\xi\in[t_{00}+\tau_0,t_0+\tau]\Big\}=0.$$

შემდეგ,

$$\int_{t_{00}+\tau_0}^{t_0+\tau} Y(\xi;t)(f[\xi,x_0+\Delta x,u_0+\delta u,v_0+\delta v]-f[\xi])d\xi=-\int_{t_{00}+\tau_0}^{t_0+\tau} Y(t_{00}+\tau_0;t)f_0^+d\xi+$$

$$+\int_{t_{00}+\tau_0}^{t_0+\tau}\{Y(\xi;t)(f[\xi,x_0+\Delta x,u_0+\delta u,v_0+\delta v]-f[\xi])+Y(t_{00}+\tau_0;t)\,f_0^{+}\}d\xi=$$

$$=-Y(t_{00}+\tau_{00};t)\,f_0^{+}(\delta t_0+\delta\tau)+o(t;\delta\mu);$$

$$\int_{t_{00}+\tau_0}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)f_x[\xi]\Delta x(\xi)d\xi=o(t;\delta\mu),$$

$$\int_{t_{00}+\tau_0}^{t_0+\tau}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\Delta p(\xi-\tau_0)d\xi=\int_{t_{00}}^{t_0+\tau-\tau_0}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi=$$

$$=\int_{t_{00}}^{t_0}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0](x_0(\xi)-\varphi(\xi))d\xi+\int_{t_0}^{t_0+\delta\tau}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0]\Delta p(\xi)d\xi=$$

$$=\int_{t_{00}}^{t_0}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0](x_0(\xi)-\varphi(\xi))d\xi+o(t;\delta\mu).$$

საბოლოოდ $\hat{R}_{22}(t;\delta\mu)$ -თვის მივიღებთ

$$\hat{R}_{22}(t;\delta\mu)=-Y(t_{00}+\tau_{00};t)\,f_0^{+}(\delta t_0+\delta\tau)+\int_{t_{00}}^{t_0}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0](x_0(\xi)-\varphi(\xi))d\xi+o(t;\delta\mu).\quad(1.5.16)$$

ვთქვათ $\xi\geq t_0+\tau$,

ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება, რომ

$$\hat{R}_{23}(t;\delta\mu)=-(\int_{t_0+\tau}^{t}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\dot{p}_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau-(\int_{t_0+\tau}^{t}Y(\xi;t)f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma+$$

$$+\int_{t_0+\tau}^{t}Y(\xi;t)f_w[\xi](-\dot{v}_0(\xi-\theta_0)\delta\theta+\delta v(\xi-\theta_0))+\int_{t_0+\tau}^{t}Y(\xi;t)(f_u[\xi]\delta u(\xi)+f_w[\xi]\delta u(\xi-\rho))d\xi+$$

$$+\int_{t_0+\tau}^{t}Y(\xi;t)f_v[\xi]\delta v(\xi)+o(t;\delta\mu).\qquad(1.5.17)$$

(1.5.6) -დან (1.5.15)-(1.5.17) საფუძველზე მივიღებთ

$$R_1(t;t_0,\delta\mu)=-(\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{p_1}[\xi]\dot{p}_0(\xi-\tau_0)d\xi)\delta\tau-(\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_{q_1}[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi)\delta\sigma-$$

$$-Y(t_{00}+\tau_{00};t)f_0^+(\delta t_0+\delta\tau)+\int_{t_0}^{t_{00}}Y(\xi+\tau_0;t)f_{p_1}[\xi+\tau_0](x_0(\xi)-\varphi(\xi))d\xi+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_w[\xi](-\dot v_0(\xi-\theta_0)\delta\theta+\delta v(\xi-\theta_0))+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)(f_u[\xi]\delta u(\xi)+f_\omega[\xi]\delta u(\xi-\rho))d\xi+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t}Y(\xi;t)f_v[\xi]\delta v(\xi)+o(t;\delta\mu). \qquad (1.5.18)$$

(1.5.2)-დან (1.5.3)-(1.5.5) და (1.5.18) გათვალისწინებით მიიღება (1.1.18), სადაც $\delta x^+(t;\delta\mu)$ აქვს (1.1.19) სახე. თეორემა 1.1.2 დამტკიცებულია.

თავი II. ოპტიმიზაციის ამოცანები შერეული საწყისი პირობით. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები

2.1. ოპტიმიზაციის ამოცანის დასმა და ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ, $P_0\subset P, Q_0\subset Q, U_0\subset U, V_0\subset V$ ამოზნექილი კომპაქტებია. შემოვიღოთ სიმრავლეები:

$$\Phi_0=\{\varphi(t)\in P_0:\varphi(t)\in\Phi\},\ G_0=\{g(t)\in Q_0:g(t)\in G\},\ \Omega_0=\{u(t)\in U_0:u(t)\in\Omega\},$$

$$W_0=\{v(t)\in V_0:v(t)\in W\}.$$

ყოველ

$$\vartheta=(t_0,t_1,\tau,\sigma,\theta,p_0,\varphi(t),g(t),u(t),v(t))\in\Delta=(s_{00},s_{01})\times(s_{10},s_{11})\times(\tau_1,\tau_2)\times(\sigma_1,\sigma_2)\times(\theta_1,\theta_2)\times$$

$$\times P_0\times\Phi_0\times G_0\times\Omega_0\times W_0$$

ელემენტს შევუსაბამოთ სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot x(t)=(\dot p(t),\dot q(t))^T=f(t,x(t),p(t-\tau),q(t-\sigma),u(t),u(t-\rho),v(t),v(t-\theta)),t\in[t_0,t_1] \qquad (2.1.1)$$

შერეული საწყისი პირობით

$$x(t)=(\varphi(t),g(t))^T,\ t\in[\hat\tau,t_0),\ x(t_0)=(p_0,g(t_0))^T. \qquad (2.1.2)$$

განსაზღვრება 2.1.1. ვთქვათ $\vartheta\in\Delta$ ფუნქციას $x(t)=x(t;\vartheta),t\in[\hat\tau,t_1]$ ეწოდება (2.1.1) განტოლების ამონახსნი (2.1.2) საწყისი პირობით ან ϑ ელემენტის შესაბამისი

ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_1]$ ინტერვალზე, თუ იგი აკმაყოფილებს (2.1.2) პირობას, ხოლო $[t_0,t_1]$ მონაკვეთზე აბსოლუტურად უწყვეტია და თ. ყ. $t\in[t_0,t_1]$ აკმაყოფილებს (2.1.1) განტოლებას.

ვთქვათ, სკალარული ფუნქციები $z^i(t_0,t_1,\tau,\sigma,\theta,p,q,x), i=0,1,...,l$ უწყვეტად წარმოებადია სიმრავლეზე

$$[s_{00},s_{01}]\times[s_{10},s_{11}]\times[\tau_1,\tau_2]\times[\sigma_1,\sigma_2]\times[\theta_1,\theta_2]\times P\times Q\times O.$$

განსაზღვრება 2.1.2. $\vartheta=(t_0,t_1,\tau,\sigma,\theta,p_0,\varphi(t),g(t),u(t),v(t))\in\Delta$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ შესაბამისი ამონახსნი $x(t)=x(t;\vartheta)$ აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს

$$z^i(t_0,t_1,\tau,\sigma,\theta,p_0,g(t_0),x(t_1))=0, i=1,...,l. \tag{2.1.3}$$

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ Δ_0.

განსაზღვრება 2.1.3. $\vartheta_0=(t_{00},t_{10},\tau_0,\sigma_0,\theta_0,p_{00},\varphi_0(t),g_0(t),u_0(t),v_0(t))\in\Delta_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $\vartheta\in\Delta_0$ ელემენტისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$z^0(t_{00},t_{10},\tau_0,\sigma_0,\theta_0,p_{00},g_0(t_{00}),x_0(t_{10}))\le z^0(t_0,t_1,\tau,\sigma,\theta,p_0,g(t_0),x(t_1)), \tag{2.1.4}$$

სადაც $x_0(t)=x(t;\vartheta_0)$.

(2.1.1)-(2.1.4) ეწოდება ოპტიმიზაციის ამოცანა (2.1.1) განტოლებისთვის შერეული (2.1.2) საწყისი პირობით.

თეორემა 2.1.1. ვთქვათ ϑ_0 ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $x_0(t)=(p_0(t),q_0(t))^T, t\in[\hat{\tau},t_{10}]$ მისი შესაბამისი ამონახსნი. მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,\pi_1,...,\pi_l)\neq 0, \pi_0\le 0$ და ამონახსნი $\psi(t)=(\psi_1(t),...,\psi_n(t))$ განტოლების

$$\dot{\psi}(t)=-\psi(t)f_x[t]-\psi(t+\tau_0)(f_{p_1}[t+\tau_0]\ \Theta_{n\times k})-\psi(t+\sigma_0)(\Theta_{n\times m}\ f_{q_1}[t+\sigma_0]),\ t\in(t_{00},t_{10}) \quad (2.1.5)$$

საწყის პირობით

$$\psi(t_{10})=\pi Z_{0x},\psi(t)=0,t>t_{10}, \qquad (2.1.6)$$

სადაც

$$Z=(z^0,...,z^l)^T, \qquad Z_{0x}=Z_x(t_{00},t_{10},\tau_0,\sigma_0,\theta_0,p_{00},g_0(t_{00}),x_0(t_{10})),$$

$$f_x[t]=f_x(t,x_0(t),p_0(t-\tau_0),q_0(t-\sigma_0),u_0(t),u_0(t-\rho),v_0(t),v(t-\theta_0)),$$

ისეთი რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

2.1.1) პირობა საწყისი t_{00} მომენტისთვის

$$\pi Z_{0t_0}+[\pi Z_{0q}+(\psi_{m+1}(t_{00}),...,\psi_n(t_{00}))]\dot{g}_0(t_{00})\geq\psi(t_{00})f_0^-+\psi(t_{00}+\tau_0)f_{01}^-;$$

2.1.2) პირობა საბოლოო t_{10} მომენტისთვის

$$\pi Z_{0t_1}\leq-\psi(t_{10})f_{02}^-;$$

2.1.3) პირობა τ_0 -თვის

$$\pi Z_{0\tau}\leq\psi(t_{00}+\tau_0)f_{01}^-+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{p_1}[t]\dot{p}_0(t-\tau_0)dt;$$

2.1.4) პირობა σ_0 -თვის

$$\pi Z_{0\sigma}=\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{q_1}[t]\dot{q}_0(t-\sigma_0)dt;$$

2.1.5) პირობა θ_0 -თვის

$$\pi Z_{0\theta}=\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_w[t]\dot{v}_0(t-\theta_0)dt;$$

2.1.6) პირობა p_{00} -თვის

$$\{\pi Z_{0p_0}+(\psi_1(t_{00}),...,\psi_m(t_{00}))\}p_{00}=\max_{p_0\in P_0}\{\pi Z_{0p_0}+(\psi_1(t_{00}),...,\psi_m(t_{00}))\}p_0;$$

2.1.7) პირობა $\varphi_0(t)$ -თვის

$$\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}\psi(t+\tau_0)f_p[t+\tau_0]\varphi_0(t)dt=\max_{\varphi(t)\in\Phi_0}\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}\psi(t+\tau_0)f_p[t+\tau_0]\varphi(t)dt;$$

2.1.8) პირობა $g_0(t)$ -თვის

$$\pi Z_{0q}g_0(t_{00})+\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}\psi(t+\sigma_0)f_q[t+\sigma_0]g_0(t)dt=\max_{g(t)\in G_0}\{\pi Z_{0q}g(t_{00})+\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}\psi(t+\sigma_0)f_q[t+\sigma_0]g(t)dt\};$$

2.1.9) პირობა $u_0(t)$ -თვის

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{f_u[t]u_0(t)+f_\omega[t]u_0(t-\rho)\}dt=\max_{u(t)\in\Omega_0}[\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{f_u[t]u(t)+f_\omega[t]u(t-\rho)\}dt];$$

2.1.10) პირობა $v_0(t)$ -თვის

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{f_v[t]v_0(t)+f_w[t]v_0(t-\theta_0)\}dt=\max_{v(t)\in W_0}[\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{f_v[t]v(t)+f_w[t]v(t-\theta_0)\}dt].$$

თეორემა 2.1.1 შეესაბამება შემთხვევას, როცა t_{00}, τ_0 და t_{10} წერტილებში ვარიაცია ხდება მარცხნიდან. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ხდება (- - -) ვარიაცია.

თეორემა 2.1.2. ვთქვათ ϑ_0 ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $x_0(t)=(p_0(t),q_0(t))^T, t\in[\hat{\tau},t_{10}]$ მისი შესაბამისი ამონახსნი. მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,\pi_1,...,\pi_l)\neq 0, \pi_0\leq 0$ და ამონახსნი $\psi(t)=(\psi_1(t),...,\psi_n(t))$ განტოლებისა (2.1.5) საწყისი პირობით (2.1.6), რომ შესრულებულუა პირობები (2.1.4)-(2.1.10). გარდა ამისა

$$\pi Z_{0t_0}+[\pi Z_{0q}+(\psi_{m+1}(t_{00}),...,\psi_n(t_{00}))]\dot{g}_0(t_{00})\leq\psi(t_{00})f_0^+ +\psi(t_{00}+\tau_0)f_{01}^+;$$

$$\pi Z_{0t_1}\geq-\psi(t_{10})f_{02}^+;$$

$$\pi Z_{0\tau}\geq\psi(t_{00}+\tau_0)f_{01}^+ +\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{p_1}[t]\dot{p}_0(t-\tau_0)dt.$$

თეორემა 2.1.2 შეესაბამება შემთხვევას, როცა ადგილი აქვს (+ + +) ვარიაციას ე. ი. t_{00}, τ_0 და t_{10} მარჯვენა მხრიდან ვარიაციას.

თეორემა 2.1.3. ვთქვათ ϑ_0 ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $x_0(t)=(p_0(t),q_0(t))^T, t\in[\hat{\tau},t_{10}]$ მისი შესაბამისი ამონახსნი. მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,\pi_1,...,\pi_l)\neq 0, \pi_0\leq 0$ და ამონახსნი $\psi(t)=(\psi_1(t),...,\psi_n(t))$ განტოლებისა (2.1.5) საწყისი პირობით (2.1.6), რომ შესრულებულუა პირობები (2.1.4)-(2.1.10). გარდა ამისა

$$\pi Z_{0t_0}+[\pi Z_{0q}+(\psi_{m+1}(t_{00}),...,\psi_n(t_{00}))]\dot g_0(t_{00})\le\psi(t_{00})\,f_0^-+\psi(t_{00}+\tau_0)\,f_{01}^-;$$

$$\pi Z_{0t_1}\ge-\psi(t_{10})\,f_{02}^+;$$

$$\pi Z_{0\tau}\ge\psi(t_{00}+\tau_0)\,f_{01}^++\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{p_1}[t]\dot p_0(t-\tau_0)dt.$$

თეორემა 2.1.3 შეესაბამება შემთხვევას, როცა ადგილი აქვს (- + +) ვარიაციას.

თეორემა 2.1.4. ვთქვათ ϑ_0 ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $x_0(t)=(p_0(t),q_0(t))^T, t\in[\hat\tau,t_{10}]$ მისი შესაბამისი ამონახსნი. მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,\pi_1,...,\pi_l)\ne0,\pi_0\le0$ და ამონახსნი $\psi(t)=(\psi_1(t),...,\psi_n(t))$ განტოლებისა (2.1.5) საწყისი პირობით (2.1.6), რომ შესრულებულია პირობები (2.1.4)-(2.1.10). გარდა ამისა

$$\pi Z_{0t_0}+[\pi Z_{0q}+(\psi_{m+1}(t_{00}),...,\psi_n(t_{00}))]\dot g_0(t_{00})\ge\psi(t_{00})\,f_0^-+\psi(t_{00}+\tau_0)\,f_{01}^-;$$

$$\pi Z_{0t_1}\le-\psi(t_{10})\,f_{02}^-;$$

$$\pi Z_{0\tau}\ge\psi(t_{00}+\tau_0)\,f_{01}^++\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{p_1}[t]\dot p_0(t-\tau_0)dt.$$

თეორემა 2.1.5 შეესაბამება შემთხვევას, როცა ადგილი აქვს (- - +) ვარიაციას.

ანალოგიურ თეორემებს, შესაბამისი ცვლილებებით, ადგილი აქვს ვარიაციის სხვადასხვა კომბინაციებისთვის. ქვემოთ მოყვანილი თეორემა შეესაბამება შემთხვევას, როცა t_{00}, τ_0 და t_{10} წერტილებში ხდება ორმხრივი ვარიაცია.

თეორემა 2.1.5. ვთქვათ ϑ_0 ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $x_0(t)=(p_0(t),q_0(t))^T, t\in[\hat\tau,t_{10}]$ მისი შესაბამისი ამონახსნი. გარდა ამისა, ფუნქციები $u_0(t),u_0(t-\rho)$ უწყვეტია წერტილებში t_{00}, $t_{00}+\tau_0$, t_{10}. მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,\pi_1,...,\pi_l)\ne0,\pi_0\le0$ და ამონახსნი $\psi(t)=(\psi_1(t),...,\psi_n(t))$ განტოლებისა (2.1.5) საწყისი პირობით (2.1.6), რომ შესრულებულია პირობები (2.1.4)-(2.1.10). გარდა ამისა

$$\pi Z_{0t_0}+[\pi Z_{0q}+(\psi_{m+1}(t_{00}),...,\psi_n(t_{00}))]\dot g_0(t_{00})=\psi(t_{00})\,f_0+\psi(t_{00}+\tau_0)\,f_{01};$$

$$\pi Z_{0t_1}=-\psi(t_{10})\,f_{01};$$

$$\pi Z_{0\tau} = \psi(t_{00}+\tau_0) f_{01} + \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) f_{p_1}[t] \dot{p}_0(t-\tau_0)dt,$$

სადაც

$$f_0 = f(t_{00}, x_0(t_{00}), \varphi_0(t_{00}-\tau_0), g_0(t_{00}-\sigma_0), u_0(t_{00}), u_0(t_{00}-\rho), v_0(t_{00}), v_0(t_{00}-\theta_0)),$$

$$f_{01} = f(t_{00}+\tau_0, x_0(t_{00}+\tau_0), p_{00}, q_0(t_{00}+\tau_0-\sigma_0), u_0(t_{00}+\tau_0), u_0(t_{00}+\tau_0-\rho),$$

$$v_0(t_{00}+\tau_0), v_0(t_{00}+\tau_{00}-\theta_0)) - f(t_{00}+\tau_0, x_0(t_{00}+\tau_0), \varphi_0(t_{00}), q_0(t_{00}+\tau_0-\sigma_0), u_0(t_{00}+\tau_0),$$

$$u_0(t_{00}+\tau_0-\rho), v_0(t_{00}+\tau_0), v_0(t_{00}+\tau_{00}-\theta_0)),$$

$$f_{02} = f(t_{10}, x_0(t_{10}), x_0(t_{10}-\tau_0), g_0(t_{10}-\sigma_0), u_0(t_{10}), u_0(t_{10}-\rho), v_0(t_{10}), v_0(t_{10}-\theta_0)).$$

აქაც შეიძლება ჩამოყალიბებული იქნეს სხვადასხვა ვარიანტის თეორემები, რომლებიც შეესაბამებიან t_{00} ორმხრივ ვარიაციას და დანერჩენების ცალმხრივ ვარიაციას ან t_{00} ცალმხრივ ვარიაციას და დანარჩენების ორმხრივ ვარიაციას და ა. შ.

2.2. ოპტიმიზაციის ამოცანა დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით

ვთქვათ $x_0 = (p_0, q_0)^T \in (P_0\, Q_0)^T$ და $x_1 \in (P_0\, Q_0)^T$ ფიქსირებული წერტილებია; სკალარული ფუნქცია $f^0(t, x, p_1, q_1, u, \omega, v, w)$ აკმაყოფილებს ყველა იმ მოთხოვნებს რასაც აკმაყოფილებდა ფუნქცია $f(t, x, p_1, q_1, u, \omega, v, w)$.

ყოველ

$$\hat{\vartheta} = (t_0, t_1, \tau, \sigma, \theta, \varphi(t), g(t), u(t), v(t)) \in \hat{\Delta} = (s_{00}, s_{01}) \times (s_{10}, s_{11}) \times (\tau_1, \tau_2) \times (\sigma_1, \sigma_2) \times (\theta_1, \theta_2) \times$$

$$\times \Phi_0 \times G_0 \times \Omega_0 \times W_0$$

ელემენტს, შევუსაბამოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = (\dot{p}(t), \dot{q}(t))^T = f(t, x(t), p(t-\tau), q(t-\sigma), u(t), u(t-\rho), v(t), v(t-\theta)), t \in [t_0, t_1] \quad (2.2.1)$$

შერეული საწყისი პირობით

$$x(t) = (\varphi(t), g(t))^T,\ t \in [\hat{\tau}, t_0),\ x(t_0) = (p_0, g(t_0))^T = x_0 = (p_0, q_0)^T. \quad (2.2.2)$$

განსაზღვრება 2.2.1. ვთქვათ $\hat{\vartheta} \in \hat{\Delta}$ ფუნქციას $x(t) = x(t;\hat{\vartheta}), t \in [\hat{\tau}, t_1]$ ეწოდება (2.2.1) განტოლების ამონახსნი (2.2.2) საწყისი პირობით ან $\hat{\vartheta}$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $[\hat{\tau}, t_1]$ ინტერვალზე, თუ იგი აკმაყოფილებს (2.2.2) პირობას, ხოლო $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე აბსოლუტურად უწყვეტია და თ. ყ. $t \in [t_0, t_1]$ აკმაყოფილებს (2.2.1) განტოლებას.

განსაზღვრება 2.2.2. $\hat{\vartheta} \in \hat{\Delta}$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ შესაბამისი ამონახსნი $x(t) = x(t;\hat{\vartheta})$ აკმაყოფილებს პირობას

$$x(t_1) = x_1. \qquad (2.2.3)$$

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\hat{\Delta}_0$. განვიხილოთ ინტეგრალური ფუნქციონალი

$$J(\hat{\vartheta}) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), p(t-\tau), q(t-\sigma), u(t), u(t-\rho), v(t), v(t-\theta))dt.$$

განსაზღვრება 2.1.3. $\hat{\vartheta}_0 = (t_{00}, t_{10}, \tau_0, \sigma_0, \theta_0, \varphi_0(t), g_0(t), u_0(t), v_0(t)) \in \hat{\Delta}_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ ნებისმიერი $\hat{\vartheta} \in \hat{\Delta}_0$ ელემენტისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$J(\hat{\vartheta}_0) \le J(\hat{\vartheta}). \qquad (2.2.4)$$

(2.2.1)-(2.2.4) ეწოდება ოპტიმალური ამოცანა ფიქსირებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით. ქვემოთ (2.2.1)-(2.2.4) ამოცანა დაყვანილი იქნება (2.1.1)-(2.1.4) სახის ამოცანაზე, რაც საშუალებას მოგვცეს ვისარგებლოთ წინა პუნქტში მოყვანილი თეორემებით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$x^0(t) = \int_{t_0}^{t} f^0(\xi, x(\xi), p(\xi-\tau), q(\xi-\sigma), u(\xi), u(\xi-\rho), v(\xi), v(\xi-\theta))d\xi,$$

$$x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)^T, \; x_1 = (x_1^1, ..., x_1^n)^T,$$

$$\hat{x} = (x^0, x)^T = (\hat{p}, q)^T \in R^{1+n},\ \hat{p} = (x^0, p)^T;\ z^0(\hat{x}) = x^0; z^i(\hat{x}) = x^i - x_1^i, i = 1,...,n.$$

(2.2.1)-(2.2.4) ამოცანა R^{1+n} სივრცეში ეკვივალენტურია შემდეგი ამოცანის

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \hat{f}(t, x(t), p(t-\tau), q(t-\sigma), u(t), u(t-\rho), v(t), v(t-\theta)), t \in [t_0, t_1],$$

$$x(t) = (\varphi(t), g(t))^T,\ t \in [\hat{\tau}, t_0),\ x^0(t_0) = 0,\ p(t_0) = p_0,\ q(t_0) = q_0,$$

$$z^i(\hat{x}) = x^i(t_1) - x_1^i = 0, i = 1,...,n$$

$$z^0(\hat{x}(t_1)) = x^0(t_1) \to \min,$$

სადაც $\hat{f} = (f^0, f)^T$, და რომელიც არის (2.1.1)-(2.1.4) ამოცანის კერძო შემთხვევა. უკანასკნელი ამოცანისთვის გვექნება:

$$l = 1 + n, Z(\hat{x}) = (z^0(\hat{x}), z^1(\hat{x}), \ldots, z^n(\hat{x}))^T, \pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n), \hat{\psi} = (\psi_0, \psi),$$

$$\psi = (\psi_1, ..., \psi_n);$$

შეუღლებული განტოლება

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0(t) = 0, \\ \dot{\psi}(t) = -\hat{\psi}(t)\hat{f}_x[t] - \hat{\psi}(t+\tau_0)(\hat{f}_{p_1}[t+\tau_0]\ \Theta_{(n+1)\times k}) - \psi(t+\sigma_0)(\Theta_{(n+1)\times m}\ \hat{f}_{q_1}[t+\sigma_0]), t \in (t_{00}, t_{10}); \end{cases}$$

საწყისი პირობა

$$\hat{\psi}(t_{10}) = \pi Z_{0\hat{x}} = \pi \to \psi_0(t_{10}) = \pi_0, \psi(t_{10}) = (\pi_1, ..., \pi_n)$$

და აგრეთვე $\psi(t) = 0, t > t_{10}$. თუ $\pi \neq 0$, მაშინ $\psi(t) \neq 0$. შემდეგ,

$$Z_{0t_0} = 0,\ Z_{0t_1} = 0, Z_{0\tau} = 0, Z_{0\sigma} = 0, Z_{0\theta} = 0, Z_{0q} = 0, \dot{g}_0(t_{00}) = 0, \delta g(t_{00}) = 0.$$

ზემომიღებული გამოსახულებების საფუძველზე, (2.2.1)-(2.2.4) ამოცანისთვის, ადგილი აქვს თეორემა 2.1.1-2.1.5 ანალოგებს. საილუსტრაციოდ ჩვენ ჩამოვაყალიბეთ თეორემა 2.1.5-ის ანალოგს.

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ $\hat{\vartheta}_0$ ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $x_0(t) = (p_0(t), q_0(t))^T, t \in [\hat{\tau}, t_{10}]$ მისი შესაბამისი ამონახსნი. გარდა ამისა, ფუნქციები $u_0(t), u_0(t-\rho)$ უწყვეტია წერტილებში t_{00}, $t_{00} + \tau_0$, t_{10}. მაშინ არსებობს

$$\dot{\psi}(t)=-\hat{\psi}(t)\hat{f}_x[t]-\hat{\psi}(t+\tau_0)(\hat{f}_{p_1}[t+\tau_0]\ \Theta_{(n+1)\times k})-\hat{\psi}(t+\sigma_0)(\Theta_{(n+1)\times m}\ \hat{f}_{q_1}[t+\sigma_0]),\ t\in(t_{00},t_{10})$$

განტოლების ისეთი არანულოვანი ამონახსნი

$$\hat{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t)),t\in(t_{00},t_{10}),\psi_0(t)\equiv const\le 0,\hat{\psi}(t)=0,t>t_{10}$$

რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები

$$\hat{\psi}(t_{00})\hat{f}_0+\hat{\psi}(t_{00}+\tau_0)\hat{f}_{01}=0,\ \hat{\psi}(t_{10})\hat{f}_{02}=0;$$

$$\hat{\psi}(t_{00}+\tau_0)\hat{f}_{01}+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\hat{\psi}(t)\,\hat{f}_{p_1}[t]\dot{p}_0(t-\tau_0)dt=0,\ \int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{q_1}[t]\dot{q}_0(t-\sigma_0)dt=0,$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\hat{\psi}(t)\hat{f}_w[t]\dot{v}_0(t-\theta_0)dt=0;$$

$$\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}\hat{\psi}(t+\tau_0)\hat{f}_{p_1}[t+\tau_0]\varphi_0(t)dt=\max_{\varphi(t)\in\Phi_0}\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}\hat{\psi}(t+\tau_0)\hat{f}_{p_1}[t+\tau_0]\varphi(t)dt,$$

$$\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}\hat{\psi}(t+\sigma_0)\hat{f}_{q_1}[t+\sigma_0]g_0(t)dt=\max_{g(t)\in\hat{G}_0}\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}\hat{\psi}(t+\sigma_0)\hat{f}_{q_1}[t+\sigma_0]g(t)dt,$$

სადაც

$$\hat{G}_0=\{g(t)\in G:\delta g(t_{00})=0\};$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\hat{\psi}(t)\{\hat{f}_u[t]u_0(t)+\hat{f}_\omega[t]u_0(t-\rho)\}dt=\max_{u(t)\in\Omega_0}[\int_{t_{00}}^{t_{10}}\hat{\psi}(t)\{\hat{f}_u[t]u(t)+\hat{f}_\omega[t]u(t-\rho)\}dt],$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\hat{\psi}(t)\{\hat{f}_v[t]v_0(t)+\hat{f}_w[t]v_0(t-\theta_0)\}dt=\max_{v(t)\in G}[\int_{t_{00}}^{t_{10}}\hat{\psi}(t)\{\hat{f}_v[t]v(t)+\hat{f}_w[t]v(t-\theta_0)\}dt].$$

სწრაფქმედების ამოცანა. ვთქვათ

$$f^0(t,x,p,q,u,\omega,v,w)\equiv 1,$$

მაშინ

$$J(\hat{\vartheta}) = t_1 - t_0,$$

ე. ი. მიიღება დროის მინიმიზაციის ამოცანა. ახლა მოვიყვანოთ ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები სწრაფქმედების ამოცანისთვის.

თეორემა 2.2.2. ვთქვათ $\hat{\vartheta}_0$ ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $x_0(t) = (p_0(t), q_0(t))^T, t \in [\hat{\tau}, t_{10}]$ მისი შესაბამისი ამონახსნი. გარდა ამისა, ფუნქციები $u_0(t), u_0(t-\rho)$ უწყვეტია წერტილებში t_{00}, $t_{00}+\tau_0$, t_{10}. მაშინ არსებობს

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t) f_x[t] - \psi(t+\tau_0)(f_{p_1}[t+\tau_0]\ \Theta_{n\times k}) - \psi(t+\sigma_0)(\Theta_{n\times m}\ f_{q_1}[t+\sigma_0]),\ t \in (t_{00}, t_{10})$$

განტოლების ისეთი არანულოვანი ამონახსნი

$$\psi(t)), t \in (t_{00}, t_{10}), \psi(t) = 0, t > t_{10}$$

რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები

$$\psi(t_{00}) f_0 + \psi(t_{00}+\tau_0) f_{01} = 0,\ \psi(t_{10}) f_{02} \geq 0;$$

$$\psi(t_{00}+\tau_0) f_{01} + \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) f_{p_1}[t] \dot{p}_0(t-\tau_0) dt = 0,$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) f_{q_1}[t] \dot{q}_0(t-\sigma_0) dt = 0,$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) f_w[t] \dot{v}_0(t-\theta_0) dt = 0;$$

$$\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} \psi(t+\tau_0) f_{p_1}[t+\tau_0] \varphi_0(t) dt = \max_{\varphi(t)\in\Phi} \int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} \psi(t+\tau_0) f_p[t+\tau_0] \varphi(t) dt,$$

$$\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} \psi(t+\sigma_0) f_q[t+\sigma_0] g_0(t) dt = \max_{g(t)\in\hat{G}_0} \int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} \psi(t+\sigma_0) f_{q_1}[t+\sigma_0] g(t) dt;$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) \{f_u[t] u_0(t) + f_\omega[t] u_0(t-\rho)\} dt = \max_{u(t)\in\Omega_0} [\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) \{f_u[t] u(t) + f_\omega[t] u(t-\rho)\} dt],$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) \{f_v[t] v_0(t) + f_w[t] v_0(t-\theta_0)\} dt = \max_{v(t)\in W_0} [\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) \{f_v[t] v(t) + f_w[t] v(t-\theta_0)\} dt].$$

წრფივი ამოცანა. ვთქვათ

$$f(t,x,p,q,u,\omega,v,w)=A_1(t)x+B_1(t)p+C_1(t)q+D_1(t)u+D_2(t)\omega+E_1(t)v+E_2(t)w+f_1(t).$$

თეორემა 2.2.3. ვთქვათ $\hat{\vartheta}_0$ ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $x_0(t)=(p_0(t),q_0(t))^T, t\in[\hat{\tau},t_{10}]$ მისი შესაბამისი ამონახსნი. გარდა ამისა, ფუნქციები $u_0(t),u_0(t-\rho)$ უწყვეტია წერტილებში t_{00}, $t_{00}+\tau_0$, t_{10}. მაშინ არსებობს

$$\dot{\psi}(t)=-\psi(t)A_1(t)-\psi(t+\tau_0)(B_1(t)\ \Theta_{n\times k})-\psi(t+\sigma_0)(\Theta_{n\times m}\ C_1(t)),t\in(t_{00},t_{10})$$

განტოლების ისეთი არანულოვანი ამონახსნი

$$\psi(t)),t\in(t_{00},t_{10}),\psi(t)=0,t>t_{10}$$

რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები

$$\psi(t_{00})f_0+\psi(t_{00}+\tau_0)B_1(t_{00})(p_0-\varphi_0(t_{00}))=0,\ \psi(t_{10})f_{02}\geq 0;$$

$$\psi(t_{00}+\tau_0)B_1(t_{00}+\tau_0)\big(p_0-\phi_0(t_{00})\big)+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\,B_1(t)\dot{p}_0(t-\tau_0)dt=0,$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)C_1(t)\dot{q}_0(t-\sigma_0)dt=0,$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)E_2(t)\dot{v}_0(t-\theta_0)dt=0;$$

$$\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}\psi(t+\tau_0)B_1(t+\tau_0)\varphi_0(t)dt=\max_{\varphi(t)\in\Phi_0}\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}\psi(t+\tau_0)B_1(t+\tau_0)\varphi(t)dt,$$

$$\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}\psi(t+\sigma_0)C_1(t+\sigma_0)g_0(t)dt=\max_{g(t)\in\hat{G}_0}\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}\psi(t+\sigma_0)C_1(t+\sigma_0)g(t)dt;$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{D_1(t)u_0(t)+D_2(t)u_0(t-\rho)\}dt=\max_{u(t)\in\Omega_0}[\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{D_1(t)u_0(t)+D_2(t)u_0(t-\rho)\}dt],$$

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{E_1(t)v_0(t)+E_2(t)v_0(t-\theta_0)\}dt=\max_{v(t)\in G_0}[\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{E_1(t)v_0(t)+E_2(t)v_0(t-\theta_0)\}dt].$$

2.3. საბაზრო ურთიერთობის ოპტიმიზაციის ამოცანა

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$x = (x^1, x^2, x^3, x^4)^T = (p, q^1, q^2, q^3)^T = (p,q)^T$, $p \in R$, $q = (q^1, q^2, q^3)^T \in R^3$, $q_1 = (q_1^1, q_1^2, q_1^3)^T$.

ამ აღნიშვნებში საბაზრო ურთიერთობის განტოლება ასე გადაიწერება

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = ap(t) + bq^1(t), \\ \dot{q}^1(t) = cp(t) + dq^1(t), \\ \dot{q}^2(t) = D_1(t, u(t-\rho)) - S_1(t, p(t-\tau), q^1(t-\sigma), u(t)), \\ \dot{q}^3(t) = D_2(t, v(t-\theta)) - S_2(t, p(t-\tau), q^1(t-\sigma), v(t)). \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

თეორემის ჩამოყალიბებისთვის ჩვენ დაგვჭირდება ოთხგანზომილებიანი

$$f(t, x, p_1, q_1, u, \omega, u, w) = (f^1(\cdot), f^2(\cdot), f^3(\cdot), f^4(\cdot))^T$$

ვექტორ- ფუნქციის კერძო წარმოებულების გამოთვლა. ამ შემთხვევაში ამ ფუნქციებს აქვთ შემდეგი სახე

$$f^1(t, x, p_1, q_1, u, \omega, u, w) = ap + bq^1, \ f^2(t, x, p_1, q_1, u, \omega, u, w) = cp + dq^1,$$

$$f^3(t, x, p_1, q_1, u, \omega, u, w) = D_1(t, \omega) - S_1(t, p_1, q_1^1, u),$$

$$f^4(t, x, p_1, q_1, u, \omega, u, w) = D_2(t, w) - S_2(t, p_1, q_1^1, v).$$

ვიგულისხმოთ, რომ ფუნქცია $f(t, x, p_1, q_1, u, \omega, v, w)$ უწყვეტია სიმრავლეზე

$$[s_{00}, s_{11}] \times R^4 \times R \times R^3 \times R \times R \times R \times R$$

და უწყვეტად წარმოებადია $x, p_1, q_1, u, \omega, u, w$ ცვლადების მიმართ. გარდა ამისა

$$|f(t, x, p_1, q_1, u, \omega, u, w)| + |f_x(\cdot)| + |f_{p_1}| + |f_{q_1}|$$

შემოსაზღვრულია . ვთქვათ, $t_0 \in (s_{00}, s_{10}), t_1 \in (s_{10}, s_{11})$ ფიქსირებული მომენტებია; $\varphi(t) \in [0, \varphi^*]$, $t \in [\bar{\tau}, t_0], \bar{t} = t_{00} - \max\{\tau_2, \sigma_2\}, p_0^1 > 0$ არის ფიქსირებული სკალარული

საწყისი ფუნქცია და საწყისი მნიშვნელობა; $g(t)=(g^1(t),g^2(t),g^3(t))^T, t\in[\bar{\tau},t_0]$ არის ფიქსირებული საწყისი ფუნქცია $g^1(t)\in[0,g^{1*}], g^2(t)\equiv x_0^3, g^3(t)=x_0^4$ (იხ. შესავალი).

$\Omega^*=\{u(t)\in[0,u^*]: t\in[t_0-\rho,t_1]\}$, სადაც $u(t)$ არის უბან-უბან უწყვეტი მართვის ფუნქცია; $W^*=\{v(t)\in[0,v^*]: t\in[t_0-\theta_2,t_1]\}$, სადაც $u(t)$ არის უწყვეტად წარმოებადი მართვის ფუნქცია.

ყოველ $\overline{\vartheta}=(\tau,\sigma,\theta,u(t),v(t))\in(\tau_1,\tau_2)\times(\sigma_1,\sigma_2)\times(\theta_1,\theta_2)\times\Omega^*\times W^*$ ელემენტს R^4 სივრცეში შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება (2.3.1) შერეული საწყისი პირობით

$$p(t)=\varphi(t),\ t\in[\bar{\tau},t_0),\ p(t_0)=p_0^1, q(t)=g(t), t\in[\bar{\tau},t_0]. \qquad (2.3.2)$$

განტოლების მარჯვენა მხარეზე დადებული პირობები უზრუნველყოფენ ამონახსნის არსებობას და ერთადერთობას მთელს ინტერვალზე, $\overline{\vartheta}=(\tau,\sigma,\theta,u(t),v(t))$ ელემენტის შესაბამის ამონახსნი აღვნიშნავთ $\bar{x}(t)=x(t;\overline{\vartheta})$. რადგანაც მარჯვენა ბოლო თავისუფალია, ამიტომ ყველა ელემენტი $\overline{\vartheta}=(\tau,\sigma,\theta,u(t),v(t))$ დასაშვებია. $\overline{\vartheta}_0=(\tau_0,\sigma_0,\theta_0,u_0(t),v_0(t))$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თოუ იგი ფუნქციონალს

$$[q^2(t_1)]^2+[q^3(t_1)]^2\to\min \qquad (2.3.3)$$

ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას. (2.3.1)-(2.3.3) ეწოდება საბაზრო ურთიერთობის ოპტიმიზაციის ამოცანა. ქვემოთმოყვანილი თეორემა არის თეორემა 2.1.5-ის შედეგი.

თეორემა 2.3.1. ვთქვათ, $\overline{\vartheta}_0=(\tau_0,\sigma_0,\theta_0,u_0(t),v_0(t))$ ოპტიმალური ელემენტია, ხოლო $\bar{x}_0(t)=(p_0(t),q_0(t))^T$, სადაც $q_0(t)=(q_0^1(t),q_0^2(t),q_0^3(t))^T$. გარდა ამისა, ფუნქცია $u_0(t)$ უწყვეტია წერტილში $t_0+\tau_0$. მაშინ არსებობს

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1(t)=-a\psi_1(t)-b\psi_2(t),\\ \dot{\psi}_2(t)=-c\psi_1(t)-d\psi_2(t),\\ \dot{\psi}_3(t)=\psi_3(t+\tau_0)S^0_{1p_1}[t+\tau_0]+\psi_4(t+\tau_0)S^0_{2p_1}[t+\tau_0],\\ \dot{\psi}_4(t)=\psi_3(t+\sigma_0)S^0_{1q_1^1}[t+\sigma_0]+\psi_4(t+\sigma_0)S^0_{2q_1^1}[t+\tau_0]\end{cases}$$

განტოლების ამონახსნი $\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t),\psi_4(t))$, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას

$$\psi_1(t_1)=0,\ \psi_2(t_1)=0,\ \psi_3(t_1)=-q_0^2(t_1), \psi_4(t_1)=-q_0^3(t_1),$$

სადაც

$S_{1p_1}^0[t]=S_{1p_1}(t,p_0(t-\tau_0),q_0^1(t-\sigma_0),u_0(t-\rho)), S_{2p_1}^0[t]=S_{2p_1}(t,p_0(t-\tau_0),q_0^1(t-\sigma_0),v_0(t-\theta_0))$

და ამასთან შესრულებულია:

2.3.1) τ_0 ოპტიმალურობის პირობა

$$\psi_3(t)[-S_1(t_0+\tau_0,p_0^1,g^1(t_0+\tau_0-\sigma_0),u_0(t_0+\tau_0-\rho))+S_1(t_0+\tau_0,\varphi(t_0),g^1(t_0+\tau_0-\sigma_0),u_0(t_0+\tau_0-\rho))]+$$

$$+\psi_3(t)[-S_2(t_0+\tau_0,p_0^1,g^1(t_0+\tau_0-\sigma_0),v_0(t_0+\tau_0-\theta_0))+S_2(t_0+\tau_0,\varphi(t_0),g^1(t_0+\tau_0-\sigma_0),v_0(t_0+\tau_0-\theta_0))]+$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\psi_3(t)S_{1p_1}^0[t]+\psi_4(t)S_{2p_1}^0[t]\right\}\dot{p}_0(t-\tau_0)dt=0;$$

2.3.2) σ_0 ოპტიმალურობის პირობა

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\psi_3(t)S_{1q_1^1}^0[t]+\psi_4(t)S_{2q_1^1}^0[t]\right\}\dot{q}_0^1(t-\tau_0)dt=0;$$

2.3.3) θ_0 ოპტიმალურობის პირობა

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi_4(t)S_{2w}^0[t]\dot{v}_0(t-\theta_0)dt=0;$$

2.3.4) $u_0(t)$ ოპტიმალურობის პირობა

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi_3(t)\left\{-S_{1u}^0[t]u_0(t)+D_{1\omega}(t,u_0(t-\rho))u_0(t-\rho)\right\}dt=$$

$$=\max_{u(t)\in\Omega^*}\int_{t_0}^{t_1}\psi_3(t)\left\{-S_{1u}^0[t]u(t)+D_{1\omega}(t,u(t-\rho))u(t-\rho)\right\}dt;$$

2.3.5) $v_0(t)$ ოპტიმალურობის პირობა

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi_3(t)\left\{-S_{21v}^0[t]v_0(t)+D_{2w}(t,v_0(t-\theta_0))v_0(t-\theta_0)\right\}dt=$$

$$= \max_{u(t)\in W^*} \int_{t_0}^{t_1} \psi_3(t)\left\{-S_{2v}^0[t]v(t) + D_{2w}(t, v_0(t-\theta_0))v(t-\theta_0)\right\}dt.$$

2.4. თეორემა 2.1.1 დამტკიცება

2.4.1. ასახვის კრიტიკული წერტილი.

განვიხილოთ ამოზნექილი სიმრავლე

$$\Delta^- = (s_{00}, t_{00}] \times (s_{10}, t_{10}] \times (\tau_1, \tau_0] \times (\sigma_1, \sigma_2) \times (\theta_1, \theta_2) \times P_0 \times \Phi_0 \times G_0 \times \Omega_0 \times W_0.$$

Δ^- -ში არსებული ყველა დასაშვები ელემენტების ერთობლიობა აღვნიშნოთ Δ_0^- , ხოლო $\hat{\Delta}$ აღვნიშნოთ $\vartheta \in \Delta^-$ წერტილთა სიმრავლე, რომლებსაც შეესაბამება ამონახსნი $x(t;\vartheta)$, განსაზღრული $[\hat{\tau}, t_1]$. ცხადია $\vartheta_0 \in \hat{\Delta}$ და $\Delta_0^- \subset \hat{\Delta}$. შემოვიღოთ ასახვა

$$H : \hat{\Delta} \to R^n \qquad (2.4.1)$$

შემდეგი წესით $H(\vartheta) = x(t_1;\vartheta)$. ლემა 1.2.2 საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ სიმრავლე $\hat{\Delta}$ არის ღია, ხოლო ასახვა (2.4.1) -უწყვეტი. გარდა ამისა, არსებობს ისეთი $\hat{\varepsilon} > 0$, რომ ϑ_0 წერტილის ამოზნექილი მიდამო

$$B(\vartheta_0;\hat{\varepsilon}) = (t_{00} - \hat{\varepsilon}, t_{00}] \times (t_{10} - \hat{\varepsilon}, t_{10}] \times (\tau_0 - \hat{\varepsilon}, \tau_0] \times (\sigma_0 - \hat{\delta}, \sigma_0 + \hat{\delta}) \times (\theta_0 - \hat{\delta}, \theta_0 + \hat{\delta}) \times$$

$$\times V(p_{00};\hat{\varepsilon}) \times V(\varphi_0;\hat{\varepsilon}) \times V(g_0;\hat{\varepsilon}) \times V(u_0;\hat{\varepsilon}) \times V(v_0;\hat{\varepsilon}),$$

შედის $\hat{\Delta}$.

აქ

$$V(p_{00};\hat{\varepsilon}) = \{p_0 \in P_0 : |p_0 - p_{00}| < \hat{\varepsilon}\};\ V(\varphi_0;\hat{\varepsilon}) = \{\varphi \in \Phi_0 : \|\varphi - \varphi_0\|_1 < \hat{\varepsilon}\};$$

$$V(g_0;\hat{\varepsilon}) = \{g \in G_0 : \|g - g_0\|_1 < \hat{\varepsilon}\};\ V(u_0;\hat{\varepsilon}) = \{u \in \Omega_0 : \|u - u_0\| < \hat{\varepsilon}\};$$

$$V(v_0;\hat{\varepsilon}) = \{v \in W_0 : \| v - v_0 \|_1 < \hat{\varepsilon}\}.$$

$\Pi = R_+ \times \hat{\Delta}$ სიმრავლის ელემენტი აღვნიშნოთ $\varsigma = (\xi, \vartheta)$, აქ $R_+ = [0,\infty)$. Π სიმრავლეზე შემოვიღოთ ასახვა

$$P : \Pi \to R^{1+l} \tag{2.4.2}$$

შემდეგი წესით

$$P(\varsigma) = Z(\varsigma) + (\ \xi,\ 0,...,\ 0\ )^T \in R^{1+l},$$

სადაც

$$Z(\varsigma) = (\ z^0(\varsigma),\ z^1(\varsigma)\ ,...,\ \ z^l(\varsigma)\ )^T, \quad z^i(\varsigma) = z^i(t_0, t_1, \tau, \sigma, \theta, p_0, g(t_0), H(\vartheta)), i = 0\ ,...,\ l.$$

განსაზღვრება 2.4.1. ვთქვათ $\hat{\varsigma} \in \Pi$. ვიტყვით რომ $P(\hat{\varsigma}) \in R^{1+l}$ წერტილი ეკუთვნის

$$P(\Pi) = \{\ P(\varsigma) :\ \varsigma \in \Pi\ \}$$

სიმრავლის საზღვარს, თუ R^{1+l} სივრცეში არ არსებობს $P(\hat{\varsigma})$ წერტილის ისეთი მიდამო რომელიც არის $P(\Pi)$ სიმრავლის ქვესიმრავლე.

$P(\Pi)$ სიმრავლის საზღვარი აღვნიშნოთ $\partial P(\Pi)$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება 2.4.2 ([34],[57]**).** $\hat{\varsigma} \in \Pi$ წერტილს ეწოდება (2.4.2) ასახვის კრიტიკული წერტილი, თუ

$$P(\hat{\varsigma}) \in \partial P(\Pi).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\varsigma_0 = (0, \vartheta_0)$, სადაც $\vartheta_0 = (t_{00}, t_{10}, \tau_0, \sigma_0, \theta_0, p_{00}, g_0(t), u_0(t), v_0(t))$

არის (2.1.1)-(2.1.4) ამოცანის ოპტიმალური ელემენტი.

ლემა 2.4.1 . $\varsigma_0 \in \Pi$ არის (2.4.2) ასახვის კრიტიკული წერტილი.

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$z^0(\varsigma_0) \le q^0(\varsigma) + \xi,\ z^i(\varsigma) = 0,\ i = 1,...,\ l,\ \forall \varsigma \in \Pi_0 = R_+ \times \Delta_0^- \subset \Pi. \qquad (2.4.3)$$

R^{1+l} სივრცეში შემოვიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. პირველი ღერძი ანუ ერთგანზომილებიანი სივრცე (წრფე) აღვნიშნოთ ζ^0, მეორე ღერძი- ζ^1 და ა. შ. R^{1+l} სივრცის წერტილი $(\lambda^0, 0,..., 0)^T \in \zeta^0$, ხოლო წერტილი $(0, \lambda^1,..., \lambda^l)^T \in R^{1+l}$

არ ეკუთვინ ζ^0 ღერძს. (2.4.3)- დან გამომდინარებს, რომ $\forall \varsigma \in \Pi_0$

$$P(\varsigma) = (z^0(\varsigma), 0,..., 0)^T \ + (\xi,\ 0\ ,...,\ 0\ )^T \in p^0,$$

ხოლო წერტილი $P(\varsigma_0)$ პირველ ღერძზე იქნება $P(\Pi_0)$ სიმრავლის ყველაზე ქვედა წერტილი, წინააღმდეგ შემთხვევაში ϑ_0 არ იქნებოდა ოპტიმალური ელემენტი. ამრიგად, $P(\varsigma_0)$ წერტილი ერთგანზომილებიანი ζ^0 სივრცის მიმართ იქნება $P(\Pi_0)$ წრფივი სიმრავლის საზღვრის წერტილი. ახლა ვაჩენოთ, რომ წერტილი $P(\varsigma_0)$ აგრეთვე არის $P(\Pi) \subset R^{1+l}$ სიმრავლის საზღვრის წერტილიც. დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ R^{1+l} სივრცეში არსებობს $P(\varsigma_0)$ წერტილის ისეთი $V_{P(\varsigma_0)}$ მიდამო, რომ

$$V_{P(\varsigma_0)} \subset P(\Pi).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თანაკვეთა

$$V_{P(\varsigma_0)} \bigcap P(\Pi_0)$$

არის $P(\varsigma_0)$ წერტილის სრული მიდამო ζ^0 სივრცის მიმართ ე. ი. ეს მიდამო შეიცავს $P(\varsigma_0)$ როგორც შიდა წერტილს. ამრიგად, $P(\varsigma_0)$ არ არის $P(\Pi_0)$ სიმრავლის საზღვრის წერტილი, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

2.4.2. $P(\varsigma)$ **ასახვის დიფერენციალი.**

საკმარისად მცირე $|\delta\varsigma|$-თვის, სადაც

$$\delta\varsigma = \varsigma - \varsigma_0 = (\delta\xi, \delta\vartheta),\ \delta\xi \ge 0,\ \delta\vartheta = (\delta t_0, \delta t_1, \delta\tau, \delta\sigma, \delta\theta, \delta p_0, \delta g(t), \delta u(t), \delta v(t)),$$

$$|\delta\varsigma| = |\delta\xi| + |\delta\vartheta| = |\delta\xi| + |\delta t_1| + |\delta\mu|$$

ვიპოვოთ (2.4.2) ასახვის დიფერენციალი. განვიხილოთ სხვაობა

$$P(\varsigma_0+\delta\varsigma)-P(\varsigma_0)=Z(\vartheta_0+\delta\varsigma)-Z(\vartheta_0)+(\ \delta\xi,\ 0,...,\ 0\ )^T, \tag{2.4.4}$$

$$\delta\varsigma=(\delta\xi,\delta\vartheta)\in[0,\hat{\varepsilon}]\times(B(\vartheta_0;\hat{\varepsilon})-\vartheta_0).$$

ვიპოვოთ

$$Z[\vartheta_0+\delta\vartheta]-Z[\vartheta_0]:=$$

$$:=Z(t_{00}+\delta t_0,t_{10}+\delta t_1,\tau_0+\delta\tau,\sigma_0+\delta\sigma,\theta_0+\delta\theta,p_{00}+\delta p_0,g_0(t_0)+\delta g(t_0),x(t_{10}+\delta t_1))-$$

$$-Z(t_{00},t_{10},\tau_0,\sigma_0,\theta_0,p_{00},g_0(t_{00}),x_0(t_{10})),$$

სხვაობის მთავარი ნაწილი, სადაც

$$x(t)=x(t;\vartheta_0+\delta\vartheta),\ x_0(t)=x(t;\mu_0).$$

აქ და მომავალში, სადაც საჭირო იქნება ყველგან $\delta\mu$ ნაცვლად ნახმარი იქნება $\delta\vartheta$, ეს შესაძლებელია რადგანაც

$$\delta\vartheta=(\delta t_0,\delta t_1,\delta\tau,\delta\sigma,\delta\theta,\delta p_0,\delta\varphi(t),\delta g(t),\delta u(t),\delta v(t))$$

შეიცავს $\delta\mu$ ყველა კომპონენტს. აქედან გამომდინარე, ჩვენ ვიგულისხმებთ რომ

$$\delta x^-(t)=\delta x^-(t;\delta\vartheta)=\delta x^-(t;\delta\mu),\ o(\delta\vartheta)=o(\delta\mu).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$Z[\delta\vartheta;s]=Z(t_{00}+s\delta t_0,t_{10}+s\delta t_1,\tau_0+s\delta\tau,\sigma_0+s\delta\sigma,\theta_0+s\delta\theta,p_{00}+s\delta p_0,$$

$$,g_0(t_{00})+s(g_0(t_0)+\delta g(t_0)-g_0(t_{00})),x_0(t_{00})+s(x(t_{10}+\delta t_1)-x_0(t_{10}))).$$

ცხადია, რომ

$$Z[\vartheta_0+\delta\vartheta]-Z[\vartheta_0]=\int_0^1\frac{d}{ds}Z[\delta\vartheta;s]ds=$$

$$=\int_0^1 \{Z_{t_0}[\delta\vartheta;s]\delta t_0 + Z_{t_0}[\delta\vartheta;s]\delta t_1 + Z_\tau[\delta\vartheta;s]\delta\tau + Z_\sigma[\delta\vartheta;s]\delta\sigma + Z_\theta[\delta\vartheta;s]\delta\theta + Z_p[\delta\vartheta;s]\delta p_0 +$$

$$+Z_q[\delta\vartheta;s](g_0(t_0)+\delta g(t_0)-g_0(t_{00}))+Z_x[\delta\vartheta;s](x(t_{10}+\delta t_1)-x_0(t_{10}))\}ds\,.$$

შემდეგ,

$$g_0(t_0)-g_0(t_{00})=\int_{t_{00}}^{t_0}\dot g_0(t)dt=\dot g_0(t_{00})\delta t_0+o(\delta\vartheta),$$

$$x(t_{10}+\delta t_1)-x_0(t_{10})=x_0(t_{10}+\delta t_1)-x_0(t_{10})+x(t_{10}+\delta t_1)-x_0(t_{10}+\delta t_1)=$$

$$=\int_{t_{10}}^{t_{10}+\delta t_1}\dot x_0(t)dt+\delta x^-(t_{10}+\delta t_1)+o(\delta\vartheta)=f_{02}^-\delta t_1+o(\delta\vartheta)+\delta x^-(t_{10})+\int_{t_{10}}^{t_{10}+\delta t_{10}}\dot{\delta x}^-(t)dt=$$

$$=f_{02}^-\delta t_1+\delta x^-(t_{10})+o(\delta\vartheta)$$

(იხ. (1.1.5), (1.1.7)), სადაც

$$f_{02}^-=f(t_{10},x_0(t_{01}),x_0(t_{00}-\tau_0),g_0(t_{10}-\sigma_0),u_0(t_{10}-),u_0(t_{10}-\rho-),v_0(t_{10}),v_0(t_{10}-\theta_0)).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ როცა $\delta\vartheta\to 0$ მაშინ

$$Z_{t_0}[\delta\vartheta;s]-Z_{0t_0}\to 0,\ Z_{t_1}[\delta\vartheta;s]-Z_{0t_1}\to 0,\ Z_\tau[\delta\vartheta;s]-Z_{0\tau}\to 0,\ Z_\sigma[\delta\vartheta;s]-Z_{0\sigma}\to 0,$$

$$Z_{p_0}[\delta\vartheta;s]-Z_{0p_0}\to 0, Z_{q_0}[\delta\vartheta;s]-Z_{0q_0}\to 0, Z_x[\delta\vartheta;s]-Z_{0x}\to 0.$$

ზემომიღებული თანაფარდობების საფუძველზე გვექნება

$$Z[\vartheta_0+\delta\vartheta]-Z[\vartheta_0]=(Z_{0t_0}+Z_{0q}\dot g_0(t_{00}))\delta t_0+(Z_{0t_1}+Z_{0x}f_{02}^-)\delta t_1+Z_{0\tau}\delta\tau+Z_{0\sigma}\delta\sigma+Z_{0\theta}\delta\theta+$$

$$+Z_{0p}\delta p_0+Z_{0q}\delta g(t_{00})+Z_{0x}\delta x^-(t_{10})+o(\delta\vartheta).$$

ამ ფორმულაში შევიტანოთ $\delta x^-(t_{10})$ (იხ. თეორემა 1.1.1). შესაკრებების დაჯგუფების შედეგად მივიღებთ

$$Z[\vartheta_0+\delta\vartheta]-Z[\vartheta_0]=dZ_{\vartheta_0}(\delta\vartheta)+o(\delta\vartheta),$$

სადაც

$$dZ_{\vartheta_0}(\delta\vartheta)=\{Z_{0t_0}+Z_{0q}\dot g_0(t_{00})+Z_{0x}Y(t_{00};t_{10})[(\Theta_{m\times 1},\dot g_0(t_{00}))^T-f_0^-]-Z_{0x}Y(t_{00}+\tau_0;t_{10})f_{01}^-\}\delta t_0+$$

$$+\{Z_{0t_1}+Z_{0x}f_{02}^{-}\}\delta t_1+\{Z_{0\tau}-Z_{0x}Y(t_{00}+\tau_0;t_{10})f_{01}^{-}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}Z_{0x}Y(\xi;t_{10})f_p[\xi]\dot{p}_0(\xi-\tau_0)d\xi\}\delta\tau+$$

$$\{Z_{0\sigma}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}Z_{0x}Y(\xi;t_{10})f_q[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi\}\delta\sigma+\{Z_{0\theta}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}Z_{0x}Y(\xi;t_{10})f_w[\xi]\dot{v}_0(\xi-\theta_0)d\xi\}\delta\theta+$$

$$+Z_{0p_0}\delta p_0+Z_{0x}Y(t_{00};t_{10})(\delta p_0,\Theta_{(m+1)\times 1})^T+\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}Z_{0x}Y(\xi+\tau_0;t_{10})f_p[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+Z_{0q}\delta g(t_{00})+Z_{0x}(\Theta_{m\times 1},\delta g(t_{00}))^T+\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}Z_{0x}Y(\xi+\sigma_0;t_{10})f_q[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{10}}Z_{0x}Y(\xi;t_{10})\{f_u[\xi]\delta u(\xi)+f_\omega[\xi]\delta u(\xi-\rho)\}d\xi+\int_{t_{00}}^{t_{10}}Z_{0x}Y(\xi;t_{10})\{f_v[\xi]\delta v(\xi)+f_w[\xi]\delta v(\xi-\theta_0)\}d\xi.$$

ამრიგად, (2.4.4)-თვის მივიღებთ

$$P(\varsigma_0+\delta\varsigma)-P(\varsigma_0)=dP_{\xi_0}(\delta\varsigma)+o(\delta\varsigma),\delta\varsigma\in([0,\hat{\varepsilon}]\times B(\varsigma_0;\hat{\varepsilon}))-\varsigma_0,$$

სადაც

$$dP_{\varsigma_0}(\delta\varsigma)=dZ_{\vartheta_0}(\delta\vartheta)+(\delta\xi,0,...,0)^T.$$

$dP_{\varsigma_0}(\delta\varsigma)$ ეწოდება (2.4.4) ასახვის დიფერენციალი.

2.4.3. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების გამოყვანა.

ς_0 კრიტიკული წერტილისთვის არსებობს არანულოვანი ვექტორი π, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\pi dP_{\xi_0}(\delta\varsigma)\le 0,\ \forall\delta\varsigma\in([0,\hat{\varepsilon}]\times B(\varsigma_0;\hat{\varepsilon}))-\varsigma_0 \qquad (2.4.5)$$

(იხ.[34],[37]) (2.4.5)-ში შევიტანოთ ასახვის დიფერენციალის გამოსახულება, მივიღებთ

$$\pi dZ_{\vartheta_0}(\delta\vartheta)=\{\pi Z_{0t_0}+\pi Z_{0q}\dot{g}_0(t_{00})+\pi Z_{0x}Y(t_{00};t_{10})[(\Theta_{m\times 1},\dot{g}_0(t_{00}))^T-f_0^{-}]-\pi Z_{0x}Y(t_{00}+\tau_0;t_{10})f_{01}^{-}\}\delta t_0+$$

$$+\{\pi Z_{0t_1}+\pi Z_{0x}f_{02}^{-}\}\delta t_1+\{\pi Z_{0\tau}-\pi Z_{0x}Y(t_{00}+\tau_0;t_{10})f_{01}^{-}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}\pi Z_{0x}Y(\xi;t_{10})f_p[\xi]\dot{p}_0(\xi-\tau_0)d\xi\}\delta\tau+$$

$$\{\pi Z_{0\sigma}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}\pi Z_{0x}Y(\xi;t_{10})f_q[\xi]\dot{q}_0(\xi-\sigma_0)d\xi\}\delta\sigma+\{\pi Z_{0\theta}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}\pi Z_{0x}Y(\xi;t_{10})f_w[\xi]\dot{v}_0(\xi-\theta_0)d\xi\}\delta\theta+$$

$$+\pi Z_{0p_0}\delta p_0+\pi Z_{0x}Y(t_{00};t_{10})(\delta p_0,\Theta_{(m+1)\times 1})^T+\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}\pi Z_{0x}Y(\xi+\tau_0;t_{10})f_p[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\pi Z_{0q}\delta g(t_{00})+\pi Z_{0x}(\Theta_{m\times 1},\delta g(t_{00}))^T+\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}\pi Z_{0x}Y(\xi+\sigma_0;t_{10})f_q[\xi+\sigma_0]\delta g(\xi)d\xi+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\pi Z_{0x}Y(\xi;t_{10})\{f_u[\xi]\delta u(\xi)+f_\omega[\xi]\delta u(\xi-\rho)\}d\xi+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\pi Z_{0x}Y(\xi;t_{10})\{f_v[\xi]\delta v(\xi)+f_w[\xi]\delta v(\xi-\theta_0)\}d\xi+\pi(\delta\xi,0,\ldots,0)^T\le 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\psi(t)=Z_{0x}Y(t;t_{10}),$$

იგი არის (2.1.5) შეუღლებული განტოლების ამონახსნი. ამ აღნიშვნის გათვალისწინებით გვექნება

$$\{\pi Z_{0t_0}+[\pi Z_{0q}+(\psi_{m+1}(t_{00}),\ldots,\psi_n(t_{00}))]\dot{g}_0(t_{00})-\psi(t_{00})f_0^- -\psi(t_{00}+\tau_0)f_{01}^-\}\delta t_0+$$

$$+\{\pi Z_{0t_1}+\psi(t_{10})f_{02}^-\}\delta t_1+\{\pi Z_{0\tau}-\psi(t_{00}+\tau_0)f_{01}^- -\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{p_1}[t]\dot{p}_0(t-\tau_0)dt\}\delta\tau+$$

$$+\{\pi Z_{0\sigma}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{q_1}[t]\dot{q}_0(t-\sigma_0)dt\}\delta\sigma+\{\pi Z_{0\theta}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_w[t]\dot{v}_0(t-\theta_0)dt\}\delta\theta+$$

$$\{\pi Z_{0p_0}+(\psi_1(t_{00}),\ldots,\psi_m(t_{00}))\}\delta p_0+\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}}\psi(t+\tau_0)f_{p_1}[t+\tau_0]\delta\varphi(t)dt$$

$$+\pi Z_{0q}\delta g(t_{00})+\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}}\psi(t+\sigma_0)f_{q_1}[t+\sigma_0]\delta g(t)dt+$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{f_u[\xi]\delta u(t)+f_\omega[t]\delta u(t-\rho)\}dt+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{f_v[t]\delta v(t)+f_w[t]\delta v(t-\theta_0)\}dt\le 0.$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)\{f_v[t]\delta v(t)+f_w[t]\delta v(t-\theta_0)\}dt+\pi_0\delta\xi\le 0, \qquad (2.4.6)$$

$$\forall\delta\varsigma\in([0,\hat{\varepsilon}]\times B(\varsigma_0;\hat{\varepsilon}))-\varsigma_0.$$

ცხადია, (2.4.6) უტოლობა შენარჩუნდება თუ $\delta\varsigma$ გავამრავლებთ ნებისმიერ დადებით რიცხვზე. ამრიგად, უტოლობა სამართლიანი იქნება

$$\forall\delta\varsigma\in Cone\{([0,\hat{\varepsilon}]\times B(\varsigma_0;\hat{\varepsilon}))-\varsigma_0\}, \qquad (2.4.7)$$

სადაც $Cone\{\Psi\}$ სიმბოლო აღნიშნავს Ψ სიმრავლეზე მოჭიმულ კონუსს. (2.4.7) გამოსახულება ეკვივალენტურია შემდეგი გამოსახულებების:

$$\delta\xi\in Cone\{[0,\hat{\varepsilon}]\}=R_+,\ \delta t_0\in Cone\{(s_{00}-t_{00},0]\}=R_-=(-\infty,0],$$

$$\delta\tau_0\in Cone\{(\tau_1-\tau_0,0]\}=R_-=(-\infty,0],\ \delta\sigma_0\in Cone\{(-\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}]\}=R,\ \delta\theta_0\in Cone\{(-\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}]\}=R,$$

$$\delta p_0\in Cone\{V(p_{00};\hat{\varepsilon})-p_{00}\},\ \delta\varphi\in Cone\{V(\varphi_0;\hat{\varepsilon})-\varphi_0\},\ \delta g\in Cone\{V(g_0;\hat{\varepsilon})-g_0\},$$

$$\delta u\in Cone\{V(u_0;\hat{\varepsilon})-u_0\},\ \delta v\in Cone\{V(v_0;\hat{\varepsilon})-v_0\}.$$

ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას,

$$Cone\{V(p_{00};\hat{\varepsilon})-p_{00}\}\supset P_0-p_{00}. \qquad (2.4.8)$$

მართლაც, ვთქვათ $p_0\in P_0$ ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია. ყოველი $\lambda\in[0,1]$ წერტილი $p(\lambda)=p_{00}+\lambda(p_0-p_{00})\in P_0$ რადგანაც P_0 სიმრავლე ამოზნექილია. საკმარისად მცირე λ თვის გვექნება

$$p(\lambda)\in V(p_{00};\hat{\varepsilon}).$$

ამრიგად,

$$p(\lambda)-p_{00}=\lambda(p_0-p_{00})\in V(p_{00};\hat{\varepsilon})-p_{00.},$$

ე. ი.

$$\lambda(p_0-p_{00})\in Cone\{V(p_{00};\hat{\varepsilon})-p_{00}\}\Rightarrow p_0-p_{00}\in Cone\{V(p_{00};\hat{\varepsilon})-p_{00}\}.$$

აქედან გამომდინარეობს (2.4.8) ჩართვა. ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი ჩართვების სამართლიანობა

$$Cone\{V(\varphi_0;\hat{\varepsilon})-\varphi_0\}\supset\Phi_0-\varphi_0,\ Cone\{V(g_0;\hat{\varepsilon})-g_0\}\supset G_0-g_0,$$

$$Cone\{V(u_0;\hat{\varepsilon})-u_0\}\supset\Omega_0-u_0,\ Cone\{V(v_0;\hat{\varepsilon})-v_0\}\supset W_0-v_0.$$

1) ვთქვათ, $\delta\xi\in R_+,\delta t_0=\delta t_1=\delta\tau=\delta\sigma=\delta\theta=0,\delta p_0=0,\delta\varphi=0,\delta g=0,\delta u=0,\delta v=0.$

(2.4.6) მივიღებთ $\pi_0\delta\xi\le 0\Rightarrow\pi_0\le 0.$

2) $\delta t_0\in R_-,\delta\xi=\delta t_1=\delta\tau=\delta\sigma=\delta\theta=0,\delta p_0=0,\delta\varphi=0,\delta g=0,\delta u=0,\delta v=0.$ (2.4.6)-დან მივიღებთ

$$\{\pi Z_{0t_0}+[\pi Z_{0q}+(\psi_{m+1}(t_{00}),...,\psi_n(t_{00}))]\dot{g}_0(t_{00})-\psi(t_{00})f_0^- -\psi(t_{00}+\tau_0)f_{01}^-\}\delta t_0\le 0.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\pi Z_{0t_0}+[\pi Z_{0q}+(\psi_{m+1}(t_{00}),...,\psi_n(t_{00}))]\dot{g}_0(t_{00})-\psi(t_{00})f_0^- -\psi(t_{00}+\tau_0)f_{01}^-\ge 0.$$

3) $\delta\tau\in R_-,\delta\xi=\delta t_0=\delta t_1=\delta\tau=\delta\sigma=\delta\theta=0,\delta p_0=0,\delta\varphi=0,\delta g=0,\delta u=0,\delta v=0.$

(2.4.6)-დან მივიღებთ

$$\{\pi Z_{0\tau}-\psi(t_{00}+\tau_0)f_{01}^- -\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{p_1}[t]\dot{p}_0(t-\tau_0)dt\}\delta\tau\le 0,$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\pi Z_{0\tau}-\psi(t_{00}+\tau_0)f_{01}^- -\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{p_1}[t]\dot{p}_0(t-\tau_0)dt\ge 0.$$

4) $\delta\sigma\in R,\delta\xi=\delta t_0=\delta t_1=\delta\tau=\delta\theta=0,\delta p_0=0,\delta\varphi=0,\delta g=0,\delta u=0,\delta v=0.$ (2.4.6)-დან მივიღებთ

$$\{\pi Z_{0\sigma}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{q_1}[t]\dot{q}_0(t-\sigma_0)dt\}\delta\sigma\le 0,$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\pi Z_{0\sigma}-\int_{t_{00}}^{t_{10}}\psi(t)f_{q_1}[t]\dot{q}_0(t-\sigma_0)dt=0.$$

5) $\delta\theta \in R, \delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = \delta\tau = \delta\sigma = 0, \delta p_0 = 0, \delta\varphi = 0, \delta g = 0, \delta u = 0, \delta v = 0.$ (2.4.6)-დან

მივიღებთ

$$\{\pi Z_{0\theta} - \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) f_w[t] \dot{v}_0(t-\theta_0)dt\}\delta\theta \le 0.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\pi Z_{0\theta} - \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t) f_w[t] \dot{v}_0(t-\theta_0)dt = 0.$$

6) $\delta p_0 \in P_0 - p_{00}, \delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = \delta\tau = \delta\sigma = 0, \delta\varphi = 0, \delta g = 0, \delta u = 0, \delta v = 0.$ (2.4.6)-დან

მივიღებთ

$$\{\pi Z_{0p_0} + (\psi_1(t_{00}),...,\psi_m(t_{00}))\}\delta p_0 \le 0.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\{\pi Z_{0p_0} + (\psi_1(t_{00}),...,\psi_m(t_{00}))\}p_0 \le \{\pi Z_{0p_0} + (\psi_1(t_{00}),...,\psi_m(t_{00}))\}p_{00},\ \forall p_0 \in P_0.$$

7) $\delta\varphi \in \Phi_0 - \varphi_0, \delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = \delta\tau = \delta\sigma = \delta\theta = 0, \delta g = 0, \delta u = 0, \delta v = 0.$ (2.4.6)-დან მივიღებთ

$$\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} \psi(t+\tau_0) f_{p_1}[t+\tau_0]\delta\varphi(t)dt \le 0.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} \psi(t+\tau_0) f_{p_1}[t+\tau_0]\varphi(t)dt \le \int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} \psi(t+\tau_0) f_{p_1}[t+\tau_0]\varphi_0(t)dt, \forall\varphi(t) \in \Phi_0.$$

8) $\delta g \in G_0 - g_0, \delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = \delta\tau = \delta\sigma = \delta\theta = 0, \delta\varphi = 0, \delta u = 0, \delta v = 0.$ (2.4.6)-დან მივიღებთ

$$\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} \psi(t+\sigma_0) f_{q_1}[t+\sigma_0]\delta g(t)dt \le 0.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} \psi(t+\sigma_0) f_{q_1}[t+\sigma_0] g(t)dt \le \int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} \psi(t+\sigma_0) f_{q_1}[t+\sigma_0] g_0(t)dt, \forall g(t) \in G_0.$$

9) $\delta u \in \Omega_0 - u_0, \delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = \delta\tau = \delta\sigma = \delta\theta = 0, \delta\varphi = 0, \delta g = 0, \delta v = 0.$ (2.4.6)-დან მივიღებთ

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t)\{ f_u[\xi]\delta u(t) + f_\omega[t]\delta u(t-\rho)\}dt \le 0.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t)\{ f_u[\xi]u(t) + f_\omega[t]u(t-\rho)\}dt \le \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t)\{ f_u[\xi]u_0(t) + f_\omega[t]u_0(t-\rho)\}dt, \forall u(t) \in \Omega_0.$$

10) $\delta v \in W_0 - v_0, \delta\xi = \delta t_0 = \delta t_1 = \delta\tau = \delta\sigma = \delta\theta = 0, \delta\varphi = 0, \delta g = 0, \delta u = 0.$ (2.4.6)-დან მივიღებთ

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t)\{ f_v[t]\delta v(t) + f_w[t]\delta v(t-\theta_0)\}dt \le 0.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t)\{ f_v[t]v(t) + f_w[t]v(t-\theta_0)\}dt \le \int_{t_{00}}^{t_{10}} \psi(t)\{ f_v[t]v_0(t) + f_w[t]v_0(t-\theta_0)\}dt, \forall v(t) \in W_0.$$

თეორემა 2.1.1 დამტკიცებულია.

ბოლოს აღვნიშნავთ, რომ დანარჩენი თეორემები 2.1.2-2.1.5, შესაბამისი ცვლი-ლებებით, მტკიცდება ანალოგიური სქემით.

დასკვნა

არაწრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის შერეული საწყისი პირობით და ორი ტიპის მართვით დამტკიცებულია ამონახსნის წარმოდგენის ლოკალური ფორმულები. დადგენილია: ამონახსნის პირველი ვარიაციის ანალიზური სახე; ამონახსნის ნაზდის რიგი საწყისი მონაცემების შეშფოთების მიმართ; სახე წრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისა ვარიაციებში. მიღებული შედეგები დაკონკრეტებულია წრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის. ფორმულებში გამოვლენილია საწყისი მონაცემების შეშფოთებისა და შერეული საწყისი პირობის ეფექტები. ანალიზურად, აგებულია შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი.

ოპტიმიზაციის ამოცანისთის შერეული საწყისი პირობით, ზოგადი სასაზღვრო პირობებითა და ფუნქციონალით დამტკიცებულია საწყისი და საბოლოო მომენტების, დაგვიანების პარამეტრების, საწყისი ვექტორის, საწყისი და მართვის ფუნქციების ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები. მიღებული შედეგები დაკონკრეტებულია ოპტიმალური ამოცანისთვის დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით, სწრაფქმედების და წრფივი ამოცანებისთვის. საბაზრო ურთიერთობის მოდელის შესაბამისი ოპტიმალური ამოცანისთვის მიღებულია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები.

ლიტერატურა

1. Alkhazishvili L. The linearized maximum principle for optimal problems with variable delays and continuous initial condition. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **29,** (2003), 153-155.

2. Alkhazishvili L. and **Iordanishvili M.** Local variation formulas for solution of delay controlled differential equation with mixed initial condition. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, Volume 51, 2010, 17-41.

3. Alkhazishvili L., **Iordanishvili M**. The variation formulas of solution for the linear controlled differential equation considering the mixed initial condition and perturbation of delays. *Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., Rep.,* **46,** 2020, 3-6.

4. Alkhazishvili L., **Iordanishvili M.,** Tadumadze T. A delay optimization problem for the linear control system with the mixed initial condition. *Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., Rep.,* **47,** 2021, 3-11.

5. Alkhazishvili L. and **Iordanishvili M.** The local formula of representation of a solution for a functional differential equation with the mixed initial condition considering perturbations of delays containing in the phase coordinates and in controls. *Georgian Math. J.* 2022; 29(1): 1–12.

6. Arutyunov A. V., Mardanov M. D. On the theory of the maximum principle in problems with delays. *Differ. Equ.,* 25:12 (1989), 1443–1452.

7. Ashordia M. The General Boundary Value Problems for Linear Systems of Generalized Ordinary Differential Equations, Linear Impulsive Differential and Ordinary Differential Systems. Numerical Solvability. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* 81 (2020), 1-184.

8. Baker C.T.H., *Retarded differential equations. Journal of Computtational and Applied Mathematics,* 125(1-2)(2000),309-335.

9. Banks H. T. Necessary conditions for control problems with variable time lags. *SIAM J. Control Optim.*, **6** (1968),9-47.

10. Beklaryan L. A. Variational problem with retarded argument and its relation to a semi-group of self-mapping of a closed interval. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **271**(5) (1983),1034-1040.

11. Bellman R. and Cooke K. Differential difference equations. *Academic Press, New York*, 1963.

12. Boccia A., Vinter R.B. The maximum principle for optimal control problems with time delays. *IFAC-PapersOnLine* **49-18** (2016), 951–955.

13. Driver R., Ordinary and delay equations. *Springer,* 1977.

14. Dvalishvili P. and Ramishvili I. A theorem on the continuity of the minimum of an integral functional for one class of optimal problems with distributed delay in controls. *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*, **163** (2013), 29-38.

15. Dvalishvili Ph., Alkhazishvili L., **Iordanishvili M.** On the well-possedness of the Cauchy problem for nonlinear functional differential equations with concentred and distributed variable delays. *Simin. I. Vekua Inst. Appl. Math., Rep.,* **43**, 2017, 30- 33.

16. Dvalishvili Ph., **Iordanishvili M.,** Optimization of the delay parameter for one class of controlled dynamical system. *International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations QUALITDE – 2019*, December 7– 9, 2019, Tbilisi, Georgia, Abstracts, 60-63.

17. Dvalishvili Ph., Tadumadze T. Optimization of one marketing relation model with delay. *Journal of Modern Technology and Engineering*, 4 (1)(2019), 5-10.

18. El'sgolts L. E. and Norkin S. B. Introduction to the theory of differential equations with deviated argument. *Nauka, Moscow*, 1971.

19. Gabasov R., Kirillova F. The qualitative theory of optimal processes. *"Nauka", Moscow*, 1971.

20. Gamkrelidze R. V. Principles of optimal control theory. *Volume 7 of Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering*, 1978.

21. Gorgodze N. Necessary conditions of optimality in neutral type optimal problems with non-fixed initial moment. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **19** (2000), 150-153.

22. Göllmann L., Maurer H. Theory and applications of optimal control problems with multiple time-delays. *Journal of Industrial & Management*, **10**(2) (2014), 413-441.

23. Halanay A. Differential equations: stability, oscillations, time Lags. *Academic Press, New York and London*, 1966.

24. Halanay A. Optimal controls for systems with time–lag. *SIAM J. Control Optim.*, **6**(1968), 215-234.

25. Hale J. Theory of functional differential equations. *Springer-Verlag New York, Heidelberg Berlin*, 1977.

26. **Iordanishvili M.** Necessary conditions of optimality for optimal problems with general variable delays and the mixed initial condition. *International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations QUALITDE – 2011*, November 4–6, 2011, Tbilisi, Georgia, Abstracts, p. 26.

27. **Iordanishvili M.** Necessary optimality conditions of delays parameters for one class of controlled functional differential equation with the discontinuous initial condition. *Simin. I. Vekua Inst. Appl. Math., Rep.,* **44,** 2018, 45-49.

28. **Iordanishvili M.** Local variation formulas of solutions for the nonlinear controlled differential equation with the discontinuous initial condition and with delay in the phase coordinates and controls. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute* , **173** (2019), 47-53.

29. **Iordanishvili M.,** Shavadze T. and Tadumadze T. Delay optimization problem for one class of Functional differential equation. *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* Volume **379**, 2020, 177-186.

30. **Iordanishvili M.,** Shavadze T. and Tadumadze T. Delay optimization problem for one class of controlled differential equation. *Functional Differential Equations,* Volume 26, No 3-4, 2020, 185-191.

31. **Iordanishvili M.,** Shavadze, Tadumadze T. Necessary optimality conditions of delay parameters for the nonlinear optimization problem with the mixed initial condition. *Communications in Optimization Theory* 2023 (2023) 2, 1-8.

32. Kharatishvili G. The maximum principle in the theory of optimal processes with delay. *Dokl. Akad.Nauk SSSR*, **136** (1)(1961) , 39-42.

33. Kharatishvili G., Nanetashvili N., Nizharadze T. Dynamic control mathematical model of demand and satisfactions and problem of optimal satisfaction of demand. *Proceedings of the international scientific conference "Problems of Control and Power Engineering*", 8 (2004), 44-48.

34. Kharatishvili, G. L., Tadumadze, T. A. Formulas for the variation of a solution and optimal control problems for differential equations with retarded arguments. *J. Math. Sci. (N. Y.),* **140** (1) (2007), 1-175.

35. Kharatishvili G. L., Tadumadze T. A. Variation formulas for solution of a nonlinear differential equation with time delay and mixed initial condition. *J. Math. Sci. (N.Y.),* v. 148, no. 3, 2008, 302- 330.

36. Kharatishvili G., Tadumadze T. Optimal control problems with delays and mixed initial condition. *J. Math. Sci. (N.Y),* vol. 160, No. 2, 2009, 221-245.

37. Kiguradze I. and Puza B. On boundary value problems for systems of linear functional differential equations, *Chechosl. Math. J.* , **47**(122)(1997), 341-373.

38. Kolmanovski V. and Myshkis A., Applied Theory of Functional Differential Equations. *Springer Science+Business Media Dordrecht*, 1992.

39. Kolmanovski V. and Myshkis A., Introduction to the theory and applications of functional differential equations. *Kluwer Academic Publishers, 1999*.

40. Koplatadze R., On oscillatory properties of solutions of functional differential equations, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **3** (1994), 2-179.

41. Machaidze Z. A., On the problem on the uniqueness of optimal control in systems with delays. *Bull. Georg. Nati. Acad. Sci.,* **78** (2)(1975),285-288.

42. Mansimov K., Melikov T. and Tadumadze T. Variation formulas of solution for a controlled delay functional-differential equation taking into account delays perturbations and the mixed initial condition. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.* 58 (2013), 139–146.

43. Manitius A., Optimal control of hereditary systems in control theory and topics in functional analysis. *Intern. Atom. Energy Ag. Vienna*, 1976, 43-178.

44. Marchuk, G. I. Mathematical modelling of immune response in infectious diseases. MIA Vol. 395, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 1997.

45. Mardanov M. J., Mansimov K. B., Melikov T. K. Investigation of singular controls and the second order necessary optimality conditions in systems with delay. *"Elm", Baku*, 2013 .

46. Markozashvili N. I., Necessary optimality conditions for prehistory control systems. In: *Certain Problems of Mathematical Theory of Optimal Control*, *Tbilis. Univ. Press*, *Tbilisi* , 1975, 151-180.

47. Myshkis A. D., linear differential equations with retarded argument , *Nauka, Moscow*, 1972.

48. Mordukhovich B. Sh. Variation analysis and generalized differentiation II, applications. *Springer*, 2006.

49. Neustadt L. W. Optimization: A theory of necessary conditions. *Princeton Univ. Press, Princeton, New York*, 1976.

50. Ogustoreli N. M. Time-delay control systems. *Academic Press, New-York-London*, 1966.

51. Shavadze T., Necessary conditions of optimality for the optimal control problem with several delays and the discontinuous initial. *Bulletin of TICMI*, **22**(2) (2018), 143-147.

52. Shavadze T., Variation formulas of solutions for controlled functional differential equations with the continuous initial condition with regard for perturbations of the initial moment and several delays. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **74** (2018), 125-140.

53. Tadumadze T. A. Local representations for the variation of solutions of delay differential equation. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **21**(2000), 138-141.

54. Tadumadze T. and Alkhazishvili L., Formulas of variation of solution for non-linear controlled delay differential equation with continuous initial condition. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **31** (2004), 83-97.

55. Tadumadze T. On the optimality of initial element for delay functional differential equations with the mixed initial condition. *Proc. I. Vekua Inst. of Appl. Math.*, **61-62** (2011-2012), 65- 71.

56. Tadumadze T. Variation formulas for solution of delay differential equations with mixed initial condition and delay perturbation. *Nonlinear Oscillations,* V. 17, No. 4 (2014), 503-532.

57. Tadumadze T. Variation formulas of solutions for functional differential equations with several constant delays and their applications in optimal control problems. *Mem . Differ. Equ. Math . Phys.,* **70** (2017), 7-97.

58. Tadumadze T., Shavadze T. Variation formulas of solution for the controlled functional differential equations considering delay parameters perturbations and optimal control problems. *Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., Rep.* **45** (2019), 39-57.

59. T. Tadumadze, **M. Iordanishvili.** On the optimization problem for one class of controlled functional differential equation with the mixed initial condition. *International Workshop QUALITDE – 2022*, December 17 – 19, 2022, Tbilisi, Georgia, 218-221.

60. Warga J. Optimal control of differential and functional equations. *Nauka, Moscow,* 1977.

სადისერტაციო თემასთან დაკავშირებით გამოქვეყნებული ნაშრომებია:

1. Alkhazishvili L. and **Iordanishvili M.** The local formula of representation of a solution for a functional differential equation with the mixed initial condition considering perturbations of delays containing in the phase coordinates and in controls. *Georgian Math. J.* 2022; 29(1): 1–12.
2. **Iordanishvili M.,** Shavadze T. and Tadumadze T. Delay optimization problem for one class of controlled differential equation. *Functional Differential Equations,* Volume 26, No 3-4, 2020, 185-191.
3. **Iordanishvili M.** Local variation formulas of solutions for the nonlinear controlled differential equation with the discontinuous initial condition and with delay in the phase coordinates and controls. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute* , **173** (2019), 47-53.