ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

დოქტორანტურის საგანმანათლებლო პროგრამა „მათემატიკა„

ლაშა ზარამიძე

„ზოგიერთი ფუნქციათა კლასისათვის ფურიეს მწკრივების კრებადობა და შეჯამებადობა„

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: უშანგი გოგინავა
ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი.

თბილისი
2023 წელი

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University
Faculty of Exact and Natural Sciences

Doctoral Program: Mathematics

Lasha Baramidze

„Convergence and Summability of Fourier Series of Some Functional Classes„

The thesis work is performed to obtain a PhD academic degree in Mathematics

Scientific Supervisor: Ushangi Goginava
Doctor of Phys. Math

Tbilisi
2023 Year

აბსტრაქტი

პრობლემატიკა, რომლის დამუშავებასაც ისახავს მიზნად მოცემული დისერტაცია, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მათემატიკურ ანალიზში. კლასიკური ორთონორმირებული სისტემების მიმართ ინტეგრებადი ფუნქციის ფურიეს მწკრივის სხვადასხვა საშუალოებით შეჯამებადობის საკითხს დიდი ისტორია გააჩნია. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები არსებითად განსაზღვრავდნენ და ახლაც განსაზღვრავენ ფუნქციათა თეორიაში და ჰარმონიულ ანალიზში მთელი რიგი მიმართულებების პრობლემატიკას. დამტკიცებულია არაერთი შესანიშნავი შედეგი კვლევის ისეთ ახალ მიმართულებებში, როგორებიცაა ვეივლეტ ანალიზი, გაბორის თეორია, დროით-სიხშირული ანალიზი, ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა, აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზი და ა.შ. ამის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიზეზია ის, რომ ეს სამეცნიერო წინსვლა მნიშვნელოვანია არა მხოლოდ ამ თეორიების განსავითარებლად, არამედ მათი გამოყენების მხრივ მათემატიკაში, პროგრამირებასა და სხვადასხვა სფეროებში. (მაგალითად, სიგნალის გადაცემის თეორია, მულტიპლექსირება, ფილტრაცია, სურათის გაუმჯობესება, კოდირების თეორია, ციფრული სიგნალის დამუშავება და ნიმუშების ამოცნობა და ა.შ.). ფურიეს მწკრივების კლასიკური თეორიიის გამოყენებით ფუნქციის იშლება უწყვეტ სინუსოიდურ ტალღებად. კლასიკური თეორიისგან განსხვავებით, ვილენკინის (უოლშის) ფუნქციები წარმოადგენენს "მართკუთხა ტალღებს". ასეთი ტალღები უკვე ხშირად გამოიყენება ფიზიკაში, ბიოლოგიაში, მედიცინაში, სიგნალთა გადაცემის თეორიაში, ფილტრაციის, გამოსახულების გაუმჯობესების და ციფრული სიგნალების დამუშავებისთვის. ამ მიმართულებების განვითარებისთვის მნიშვნელოვანი გახდა ახალი ორთონორმირებული სისტემების განხილვა, რომელთა შორის ერთ-ერთი აქტუალურია უოლშის სისტემა. ეს ფუნქციები ღებულობენ მხოლოდ ორ მნიშვნელობას, რაც აადვილებს თეორიული შედეგების კომპიუტერულ ალგორითმიზაციას და მათ პრაქტიკაში გამოყენებებს. ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების თეორია წარმოადგენს აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზისერთ-ერთ მნიშვნელოვან მიმართულებას. ამ თეორიის განვითარებაზე ძლიერი გავლენა მოახდინა ტრიგონომეტრიული მწკრივების კლასიკურმა თეორიამ, სადაც შეისწავლება ორთონორმირებული სისტემები, რომელთა თვისებები ძირითადად განპირობებულია ტოპოლოგიური ჯგუფის სტრუქტურით. უოლშის სისტემა არის მნიშვნელოვანი მოდელი, რომელზეც შეიძლება აბსტრაქტული ანალიზის მრავალი ფუნდამენტალური დებულების ილუსტრირება. აღნიშნულ თეზისში ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების

განზოგადოებული ლოგარითმული საშუალოებისათვის ჩვენ დავახასიათეთ კრებადობის სიმრავლე და ასევე დავადგინეთ პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს ორმაგი ფურიეს მწკრივების ლოგარითმული საშუალოების ზომით კრებადობას. აღნიშნულ თეზისში შემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფებისთვის ჩვენ განვიხილეთ ორგანზომილებიანი ფურიეს მწკრივების მართკუთხოვანი კერძო ჯამების თანაბრად კრებადობის პრობლება კერძო სასრული ოსილაციის ფუნქციებისთვის. ასევე ჩვენ შევისწავლეთ წერტილოვანი კრებადობის საკითხები.

Abstract

The classical Fourier Analysis has been developed in an almost unbelieved way from the first fundamental discoveries by name Fourier. Especially a number of wonderful results have been proved and new directions of such research has been developed e.g. concerning Wavelets Theory, Gabor theory, Time-Frequency Analysis, Fast Fourier Transform, Abstract Harmonic Analysis, etc. One important reason for this is that this development is not only important for improving the "State of the art but also for its importance in other areas of mathematics and also for several applications (e.g. theory of signal transmission, multiplexing, filtering, image enhancement, coding theory, digital signal processing and pattern recogni-tion). The classical theory of Fourier series deals with decomposition of a function into sinusoidal waves. Unlike these continuous waves the Vilenkin (Walsh) functions are rectangular waves. The development of the theory of Vilenkin-Fourier series has been strongly influenced by the classical theory of trigonometric series. Because of this it is inevitable to compare results of Vilenkin series to those on trigonometric series. There are many similarities between these theories, but there exist differences also. Much of these can be explained by modern abstract harmonic analysis, which studies orthonormal systems from the point of view of the structure of a topological group. In the thesis we characterize the set of convergence of the general logarithmic means of trigonometric Fourier series and also we establish condition which guarantees convergence in measure of logarithmic means of the two-dimensional Fourier series. Also in the thesis we study the problem of uniform convergence for the rectangular partial sums of double Fourier series on a bounded Vilenkin group of functions of partial bounded oscillation and pointwise convergence.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

დისერტაციის პირველ თავში განხილულია განზოგადოებული ლოგარითმული საშუალოები რომლებიც შემოღებული იქნა ტყებუჩავას მიერ. განხილულია ამ საშუალოების კრებადობის საკითხები ერთგანზომილებიან და ორგანზომილებიან შემთხვევაში. ერთი ცვლადის ფუნქციებისათვის შესწავლილია ტყებუჩავას საშუალოების თითქმის ყველგან კრებადობის საკითხი და უფრო მეტიც დახასიათებულია ის წერტილები სადაც ამ კრებადობას აქვს ადგილი და ეს წერტილები არის ლებეგის წერტილები. ორგანზომილებიანი შემთხვევისათვის შესწავლილია ზომით კრებადობის საკითხი და დადგენილია, რომ ტყებუჩავას პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი გარკვეული საშუალოების ზომით შეჯამებადობისათვის.

მეორე თავში განხილულია ვილენკინის სისტემა. ერთ განზომილებიან შემთხვევაში ჟორდანმა 1881 წელს განსაზღვრა სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასი. ინტეგრებადი და დასრული ვარიაციის ფუნქციებისთვის მიიღო წერტილოვანი კრებადობა.

ორგანზომილებიან შემთხვევაში სასრული ვარიაციის BV ფუნქციათა კლასი შემოღებული იყო ჰარდის 1906 მიერ და მანაც მიიღო ანალოგიური შედეგი.

გოგინავამ განსაზღვრა კერძო სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასი და დაამტკიცა თეორემა, რომელიც წარმოადგენს ჰარდის თეორემის განზოგადებას.

ჩვენ განვსაზღვრეთ ჰარდისა და გოგინავას მიერ შემოღებული კლასების ანალოგი ვილენკინის სისტემისთვის და დავამტკიცეთ იმავე თეორემების სამართლიანობა და ასევე შევისწავლეთ წერტილოვანი კრებადობის საკითხები.

აღნიშნული შედეგების მისაღებად იქნა გამოყენებული ფუნქციათა თეორიისა და ფუნქციონალური ანალიზის მეთოდები.

აღნიშნული დისერტაციის ფარგლებში წარვადგინე ეს შრომები საერთაშორისო კომფერენციებზე და ასევე ვსწავლობდი ერთი წელი საზღვარგარეთ.

კერძოდ, 2019 წლის 29 ივლისიდან 2 აგვისტოს ჩათვლით, ქალაქ ავეიროში (პორტუგალია), ჩატარდა მე-12 საერთაშორისო კონგრესი ISAAC2019. მიწვეული

ვიყავი აღნიშნულ კონგრესზე მონაწილეობის მისაღებად, სადაც სექციაზე Theory and Applications of Boundary-domain Integral and Pseudodiferential Operators გავაკეთე მოხსენება Uniform Convergence of double Vilenkin-Fourier series . მასზე დასწრება და სხვა მონაწილე მეცნიერებთან კონსულტაცია დამეხმარა ჩემს მიმდინარე კვლევაში წარმოქმნილი პრობლემების გადაჭრაში. ეს კვლევა იყო ჩემი სადისერტაციო ნაშრომის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ნაწილი და მისი გადაჭრა ძალიან მნიშვნელოვანი იყო ჩემთვის.

2019 წლის ოქტომბრიდან 2020 წლის სექტემბრის ბოლომდე ვსწავლობდი გერმანიაში, გოტინგენის გეორგ-ავგუსტის სახელობის უნივერსიტეტის მათემატიკის ინსტიტუტში. შემოდგომის სემესტრში დავესწარი სხვადასხვა კურსებს, კერძოდ, კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ანალიზი I, ლექციათა კურსი RTG 2491 "ფურიეს ანალიზი და სპექტრალური თეორია", "Oberseminar" - კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ანალიზზე. ამ სემინარზე გავაკეთე მოხსენება თემაზე ტალღის ფრონტი და ნამრავლი. გაზაფხულის სემესტრიდან ვესწრებოდი ზემოთ აღნიშნული კურსების გაგრძელებებს და ასევე ჰარმონიული ანალიზის საფუძვლების სემინარს. ამ სემინარზე გავაკეთე პრეზენტაცია კალდერონ-ზიგმუნდის თეორიის შესახებ. 2020 წლის 10-14 თებერვალს მონაწილეობა მიივიღე პოცდამის უნივერსიტეტში (გერმანია) გამართულ საერთაშორისო კონფერენციაში "მიკროლოკალური და გლობალური ანალიზი, ურთიერთქმედება გეომეტრიასთან".

თავი 1: ტრიგონომეტრიული ფურიეს მწკრივების ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი ტყებუჩავას საშუალოების შეჯამებადობა.

1.1. ტრიგონომეტრიული ფურიეს მწკრივების ერთგანზომილებიანი ტყებუჩავას საშუალოების თითქმის ყველგან კრებადობა

1.1.1. განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე თეორემები

ვთქვათ, $T=[-\pi,\pi]$ აღნიშნავს ინტერვალს ერთგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში R. $a\lesssim b$ აღნიშნავდეს ყოველთვის, რომ $a\le cb$. სადაც C არის აბსოლუტური კონსტანტა.

$L_p(T)$-ით ავღნიშნოთ ყველა ზომად f ფუნქციათა კლასი, რომლებიც არიან 2π პერიოდული და აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:

$$\|f\|_p:=\left(\int_{\mathbb{T}}|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty, 1\le p<\infty., \text{სადაც} \quad T:=[-\pi,\pi].$$

ვთქვათ, $f\in L_1(T)$. f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის მოიცემა შემდეგნაირად

$$S[f]:=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)e^{inx},$$

სადაც

$$\hat{f}(n):=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(x)e^{-inx}dx$$

არის f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი.

ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამს აქვს შემდეგი სახე:

$$S_N(f,x):=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}.$$

ინტეგრებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის n -ური რისის ლოგარითმული საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{l_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{S_k(f)}{k+1}, l_n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1},$$

სადაც $S_k(f)$ არის f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამი. ლოგარითმული საშუალოები ტრიგონომეტრიული სისტემისათვის შესწავლილი იქნა ბევრი ავტორის მიერ. მაგალითისთვის ის განხილულია შემდეგ შრომებში [15],[17]. აღნიშნული საშუალოები უოლშისა და ვილენკინის სისტემის მიმართ განხილული იყო შიმონისა და გატის მიერ [14],[2]. დადგენილია, რომ რისის ლოგარითმულ საშუალოებს აქვს კარგი თვისებები კრებადობის თვალსაზრისით. ეს საშუალოები კრებადია ინტეგრალური აზრით, უწყვეტ ფუნქციათა სივრცის ნორმით და თითქმის ყველგან.

ვთქვათ $\{q_k : k\geq 0\}$ არის არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობა. ინტეგრებადი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის ნორლუნდის საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n}q_k\,S_{n-k}(f).$$

სადაც

$$Q_n=\sum_{k=0}^{n}q_k.$$

თუ $q_k=\frac{1}{k+1}$, მაშინ ნორლუნდის ლოგარითმულ საშუალოებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$L_n(f;x):=\frac{1}{l_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{S_{n-k}(f)}{k+1}.$$

ეს საშუალოები არის რისის ლოგარითმული საშუალოების „შებრუნებული'' საშუალოები. [5],[6]-ში განხილულია ზოგიერთი კრებადობისა და განშლადობის საკითხი უწყვეტ ფუნქციათა სივრცესა და ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცეში. დადგენილია, რომ აღნიშნული საშუალოები არიან ცუდი თვისებების მატარებლები კრებადობის თვალსაზრისით.

ერთ-ერთ თავის ბოლო ნაშრომში [16] ტყებუჩავას მიერ განხილული იყო ლოგარითმული საშუალოები, რომლებიც კერძო შემთხვევაში მოიცავენ რისისა და ნორლუნდის ლოგარითმულ საშუალოებს. მის მიერ განხილული საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$T_{n,n_0}(f;x)=\frac{1}{l(n,n_0)}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{S_k(f;x)}{n_0-k+1}+S_{n_0}(f;x)+\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{S_k(f;x)}{k-n_0+1}\right),\qquad 0\le n_0\le n$$

$$l(n,n_0)=\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{1}{n_0-k+1}+1+\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{1}{k-n_0+1}$$

სადაც პირველი ნაწილი ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოების მსგავსია, ხოლო მეორე ნაწილი რისის საშუალოების მსგავსი.

თუ $n_0=0$ მიიღება რისის საშუალოები, ხოლო თუ $n_0=n$ მიიღება ნორლუნდის საშუალოები. ტყებუჩავას საშუალოების გული F_{n,n_0} განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$F_{n,n_0}=\frac{1}{l(n,n_0)}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{D_k}{n_0-k+1}+D_{n_0}+\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{D_k}{k-n_0+1}\right),$$

ტყებუჩავამ დაამტკიცა შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

თეორემა T1. თუ $0\le n_0\le n$, მაშინ

$$1+\frac{\log^2(n_0+2)}{\log(n+2)}\lesssim\left\|F_{n,n_0}\right\|_{L_1(\mathbb{T})}\lesssim1+\frac{\log^2(n_0+2)}{\log(n+2)}.$$

ანალოგიური შედეგი უოლშ-ფურიეს მწკრივებისთვის დამტკიცებული იყო გატის და ნაგის მიერ[7]. უფრო მეტიც, უოლშ-ფურიეს მწკრივების და ტრიგონომეტრიული ფურიეს მწკრივებისთვის კვადრატული კერძო ჯამები ზოგადი ლოგარითმული საშუალოებისთვის ასევე იქნა შესწავლილი. ტრიგონომეტრიული სისტემის შემთხვევა მხოლოდ ნაწილობრივად იქნა გადაწყვეტილი. ვთქვათ $T_{n,n_0}f := F_{n,n_0} * f$. ზედა შეფასებიდან მიიღება შემდეგი თორემა : **თეორემა T2.** თუ $\log n_0(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right)$, მაშინ

ა) $\forall f \in L_1(T)$ მაშინ $\left\|T_{n,n_0}f - f\right\|_{L_1(T)} \to 0$

ბ) $\forall f \in C(T)$ მაშინ $\left\|T_{n,n_0}f - f\right\|_{C(T)} \to 0$

ანუ ტყებუჩავას საშუალოები $\log n_0(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right)$ პირობისას კრებადია ინტეგრალური ნორმითა და უწყვეტ ფუნქციათა სივრცის ნორმით.

ასევე ტყებუჩავამ დაამტკიცა, რომ თუ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n_0(n)}{\sqrt{\log n}} = \infty$. მაშინ არსებობს შესაბამისად ინტეგრებადი და უწყვეტი ფუნქციები, რომლისტვისაც ეს კრებადობა არ სრულდება. ანუ ეს პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

ჩვენი მიზანი იყო დაგვედგინა უზრუნველყოფს თუ არა $\log n_0(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right)$ პირობა თითქმის ყველგან კრებადობას.

ჩვენ ამ პირობებში დავამტკიცეთ თითქმის ყველგან კრებადობა, ამასთან დავახასიათეთ ის წერტილები, სადაც კრებადობას აქვს ადგილი.

განსაზღვრება. ვთქვათ $f \in L_1(T)$. ვიტყვით რომ x არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი თუ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}|f(x+t) - f(x)|\,dt = 0.$$

ცნობილია, რომ შემდეგი თეორემა არის სამართლიანი:

თეორემა L. (იხილეთ [19]) ვთქვათ $f \in L_1(T)$. მაშინ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0.$$

სრულდება თითქმის ყველა X - თვის T -დან.

ძირითადი შედეგის ფორმულირებამდე მოვიყვანოთ ტყებუჩავას, დირიხლეს, რისის, ნორლუნდის და ფეიერის გულების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია პროგრამა მეპლის გამოყენებით. ეს გეომეტრიული ილუსტრაციები ადასტურებს თეორიულ შეფასებებს, რომლებიც ამ გულებისთვისაა ცნობილი. ასევე გვიჩვენებს ტყებუჩავას გულის კავშირზე რისისა და ნორლუნდის გულებთან.

1.1.2. ცნობილი გულების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

■ დირიხლეს გული:

```
In[20]:= Dk[y_, n_] = Sin[(n + 1/2) y] / (2 * Sin[y/2])
```

$$\text{Out[20]=}\quad \frac{1}{2}\,\mathrm{Csc}\left[\frac{y}{2}\right]\,\mathrm{Sin}\left[\left(\frac{1}{2}+n\right)y\right]$$

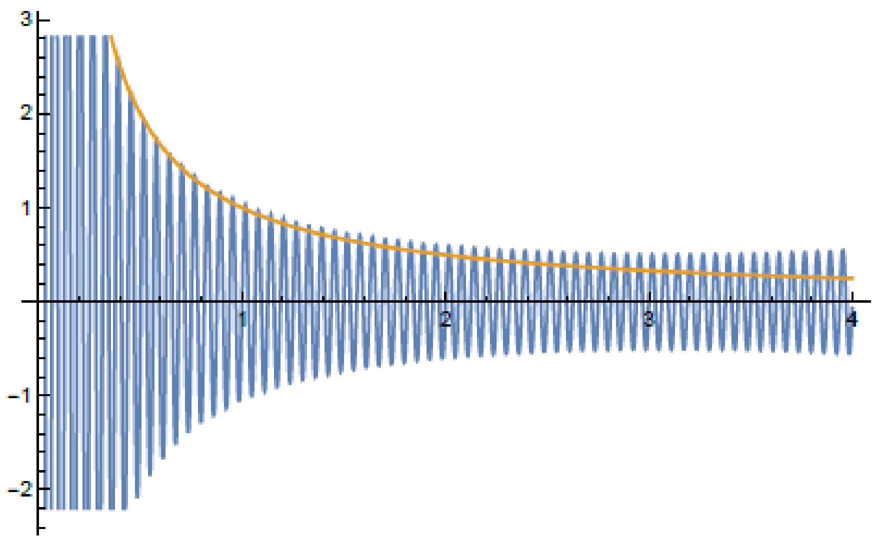
```
In[21]:= Dk[y, 100]
```

$$\text{Out[21]=}\quad \frac{1}{2}\,\mathrm{Csc}\left[\frac{y}{2}\right]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{201\,y}{2}\right]$$

დირიხლეს გულისა და 1/x გრაფიკები. სურათი გვიჩვენებს, რომ დირიხლეს გულის შეფასება logn რიგის უნდა იყოს, რადგან ჩანს ხშირი რხევა და ამიტომ ‘‘ნაპრალების სიმცირე”

```
In[45]:= Plot[{Dk[x, 100], x^-1}, {x, 0, 4}]
```

Out[45]=



■ მართლაც დავითვალოთ ინტეგრალების სხვაობა და პასუხის სიმცირეც 1.38136 ასეთი მცირე n-თვის გვარწმუნებს ამაში.

```
In[29]:= Integrate[(x^-1) - Dk[x, 100], {x, 1, 4}] // N
Out[29]= 1.38136
```

■ ფეიერის გული:

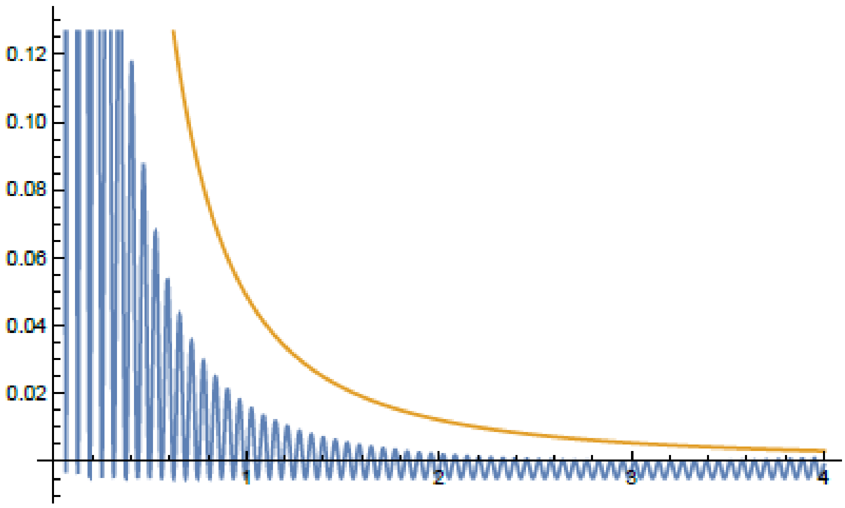
In[23]:= `Fk[z_, n_] = ` $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\,\mathrm{Csc}\left[\frac{z}{2}\right]\,\mathrm{Sin}\left[\left(\frac{1}{2}+i\right)z\right]\right)\Big/(n+1)$

Out[23]= $\dfrac{-\mathrm{Csc}\left[\frac{z}{2}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2}(-\pi+2z)\right]+\mathrm{Csc}\left[\frac{z}{2}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2}(-\pi+2z+2nz)\right]}{4\,(1+n)}$

■ ფეიერის გულისა და 1/nx^2 ფუნქციების ერთად გამოსახვა გვიჩვენებს ფეიერის გულის შეფასების სამართლიანობას და ასევე მის ინტეგრებადობას.

In[25]:= `Plot[{Fk[x, 100], ` π^2 `(x^-2)/202}, {x, 0, 4}]`

Out[25]=



■ რისის ლოგარითმული საშუალო:

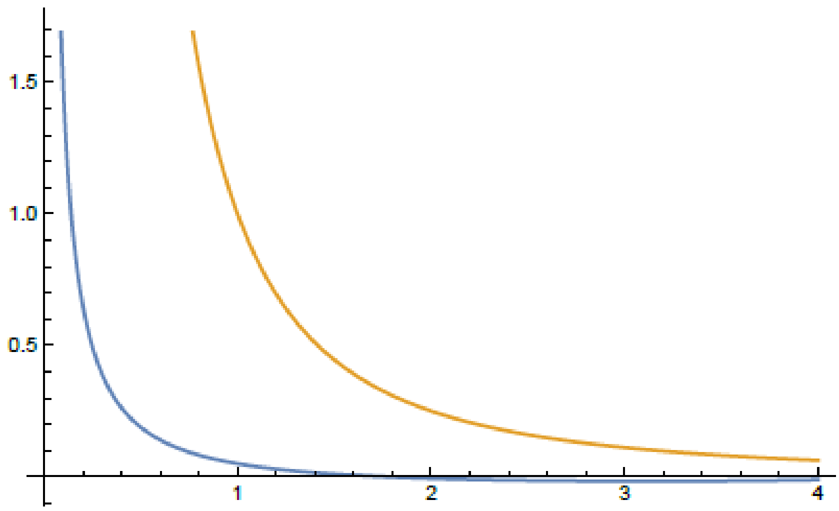
In[31]:= $$Rk[x\_, n\_] = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\operatorname{Csc}\left[\frac{x}{2}\right] \operatorname{Sin}\left[\left(\frac{1}{2}+i\right) x\right]\right) \Big/ (i+1)\right) \Big/ \operatorname{Log}[n+1]$$

Out[31]= $$\frac{1}{2\left(-1+e^{i x}\right) \operatorname{Log}[1+n]} e^{-i (1+n) x} \left(\operatorname{LerchPhi}\left[e^{-i x}, 1, 2+n\right] - e^{i (1+n) x} \left(-1+e^{i x}+e^{i (2+n) x} \operatorname{LerchPhi}\left[e^{i x}, 1, 2+n\right] + \operatorname{Log}\left[1-e^{i x}\right] - e^{i x} \operatorname{Log}\left[e^{-i x}\left(-1+e^{i x}\right)\right]\right)\right)$$

■ რისის ლოგარითმული საშუალოსა და 1/nx^2 ერთად გამოსახვა მიუთითებს მის ნულთან სიახლოვესა და აქედან გამომდინარე მისი ნორმის მუდმივით შეფასებაზე. ასევე უნდა აღინიშნოს, რომ მას ოსილაცია არ აქვს. ანუ ფეიერის გულივით კარგი თვისებები ჩანს ნახაზზე.

In[50]:= `Plot[{Rk[x, 10000], x^-2}, {x, 0, 4}]`

Out[50]=



■ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალო:

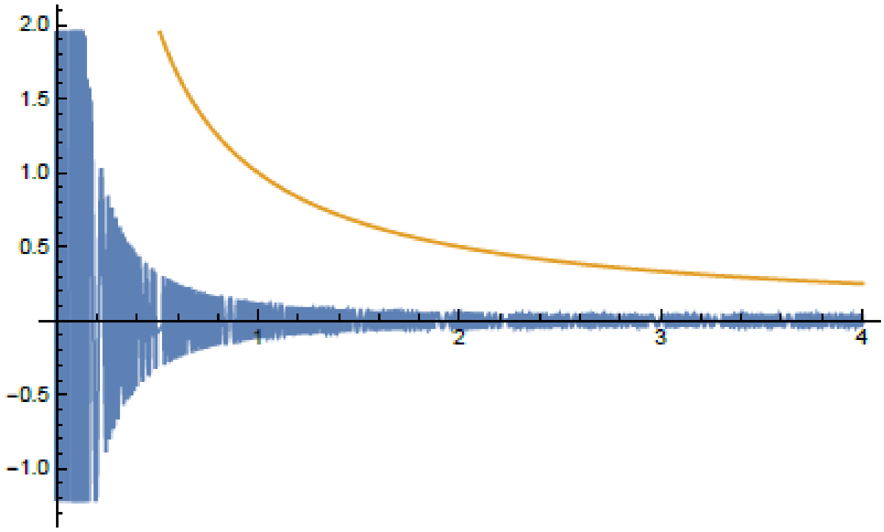
In[33]:= $$Nk[x\_, n\_] = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\operatorname{Csc}\left[\frac{x}{2}\right] \operatorname{Sin}\left[\left(\frac{1}{2}+i\right) x\right]\right) \Big/ (n+1-i)\right) \Big/ \operatorname{Log}[n+1]$$

Out[33]= $$\frac{1}{4 \operatorname{Log}[1+n]} i\, e^{-i x - i \left(\frac{1}{2}+n\right) x} \operatorname{Csc}\left[\frac{x}{2}\right] \left(e^{i x + 2 i \left(\frac{1}{2}+n\right) x} \left(e^{-i x}\right)^{n} \operatorname{LerchPhi}\left[e^{-i x}, 1, 1+n\right] - \left(e^{i x}\right)^{1+n} \operatorname{LerchPhi}\left[e^{i x}, 1, 1+n\right] - \operatorname{Log}\left[1-e^{i x}\right] + e^{2 i x + 2 i \left(\frac{1}{2}+n\right) x} \operatorname{Log}\left[e^{-i x}\left(-1+e^{i x}\right)\right]\right)$$

■ ნორლუნდის ლოგარითმული საშუალოსა და 1/x ერთად გამოსახვა მიუთითებს, რომ ეს გრაფიკები ახლოსაა ერთმანეთთან. რაც გულის შეფასების სამართლიანობაში გვარწმუნებს. ასევე ოსცილირების თვისებაც ჩანს.

In[49]:=
```
Plot[{Nk[x, 10 000], x^-1}, {x, 0, 4}]
```

Out[49]=



■ ტყებუჩავას გული, რომელიც წარმოადგენს რისისა და ნორლუნდის ლოგარითმული გულების კომბინაციას.

In[35]:= Tk[x_, n_, m_] =

$$\left(\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\,\text{Csc}\left[\frac{x}{2}\right]\,\text{Sin}\left[\left(\frac{1}{2}+i\right)x\right]\right)\Big/(m+1-i)+\sum_{i=m+1}^{n}\left(\frac{1}{2}\,\text{Csc}\left[\frac{x}{2}\right]\,\text{Sin}\left[\left(\frac{1}{2}+i\right)x\right]\right)\Big/\,i-m+1\right)\Big/\ \text{Log}[n+1]$$

Out[35]=

$$\frac{1}{\text{Log}[1+n]}\left(1-m+\frac{1}{2\left(-1+e^{i\,x}\right)}\right.$$

$$\left(-e^{-i\,(1+m)\,x}\,\text{HurwitzLerchPhi}\left[e^{-i\,x},1,1+m\right]+e^{-i\,(1+n)\,x}\left(\text{HurwitzLerchPhi}\left[e^{-i\,x},1,1+n\right]+e^{i\,(3+m+n)\,x}\,\text{HurwitzLerchPhi}\left[e^{i\,x},1,1+m\right]-e^{i\,(3+2\,n)\,x}\,\text{HurwitzLerchPhi}\left[e^{i\,x},1,1+n\right]\right)\right)$$

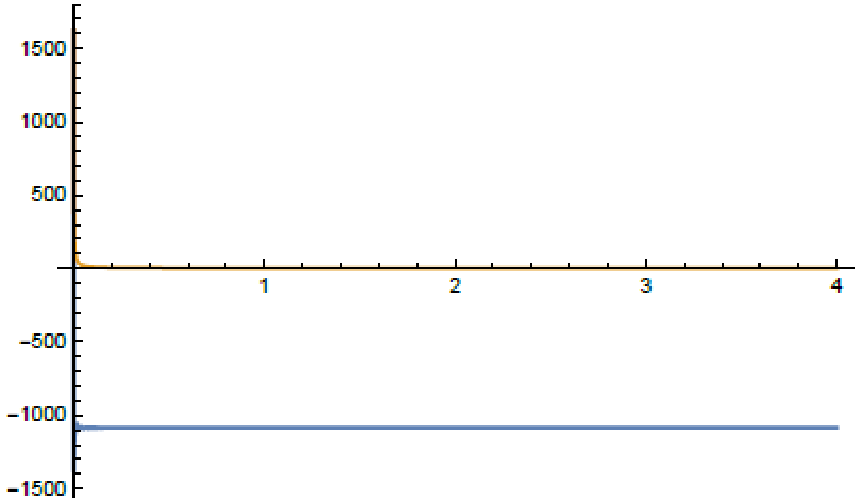
$$\frac{1}{4}\,i\,e^{-i\,x-i\left(\frac{1}{2}+m\right)x}\,\text{Csc}\left[\frac{x}{2}\right]\left(e^{2\,i\left(\frac{1}{2}+m\right)x}\left(e^{-i\,x}\right)^{m}\,\text{LerchPhi}\left[e^{-i\,x},1,2+m\right]-\right.$$

$$\left.\left.e^{2\,i\,x}\left(e^{i\,x}\right)^{m}\,\text{LerchPhi}\left[e^{i\,x},1,2+m\right]-\text{Log}\left[1-e^{i\,x}\right]+e^{2\,i\,x+2\,i\left(\frac{1}{2}+m\right)x}\,\text{Log}\left[e^{-i\,x}\left(-1+e^{i\,x}\right)\right]\right]\right)\right)$$

როცა ნორლუნდის საშუალოს წილი ძალიან დიდია, ტყებუჩავას გულის გრაფიკი 1/x ემსგავრება რაც სწორედ ნორლუნდის გულის შეფასებას გვაძლევს.

```
In[53]:= Plot[{Tk[x, 10000, 9998], x^-1}, {x, 0, 4}]
```

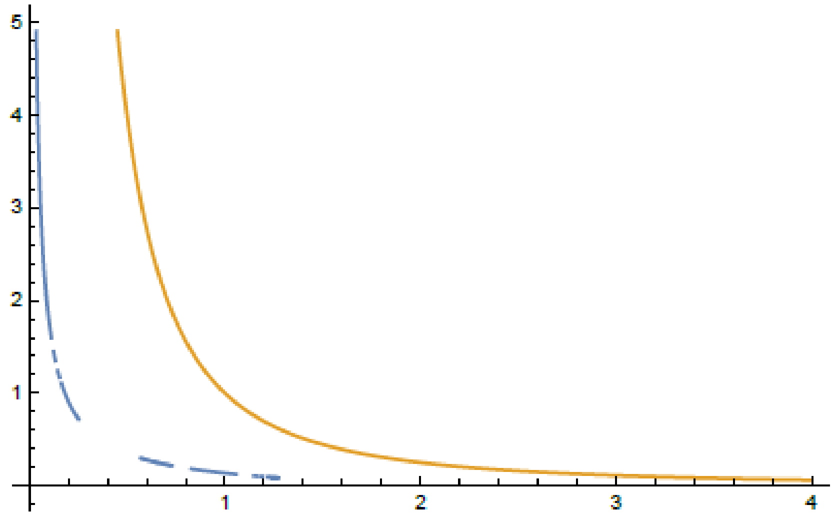
Out[53]=



■ როცა რისის საშუალოს წილი ძალიან დიდია მაშინ ზემოთ მოყვანილ რისის გულის გრაფიკს ემსგავსება ტყებუჩავას გულის გრაფიკი.

```
In[55]:= Plot[{Tk[x, 10000, 1], x^-2}, {x, 0, 4}]
```

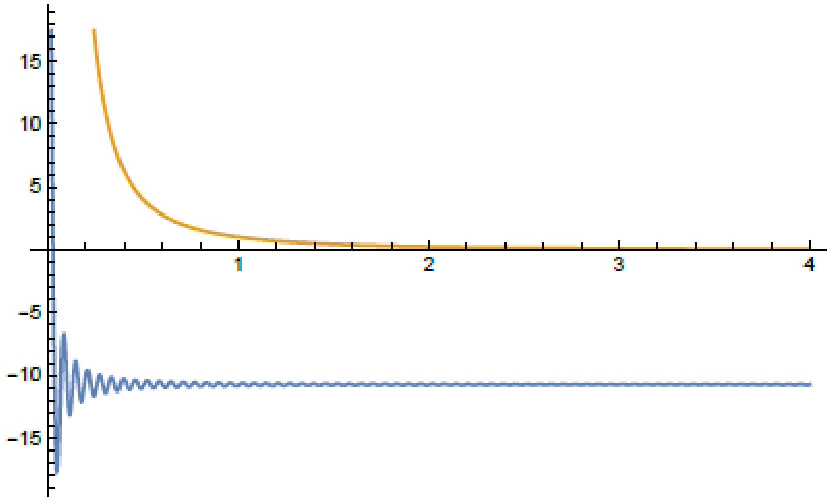
Out[55]=



■ როცა ნორლუნდის საშუალოს კრიტიკულ წილს ავიღებთ, რომლის შემდეგაც გული ფუჭდება სურათზე ჩანს როგორ იწყება ნორლუნდის გულის გავლენის გაძლიერება.

```
In[63]:= Plot[{Tk[x, 10000, 100], x^-2}, {x, 0, 4}]
```

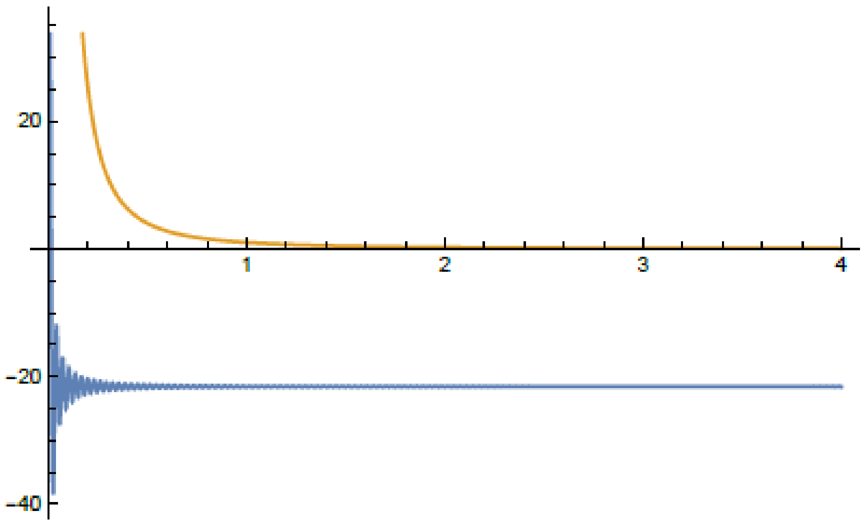
Out[63]=



■ სულ რაღაც ორჯერ გავზარდე ნორლუნდის გულის წილი და თავად ხედავთ თეორიულ კრიტიკულ წერტილთან ასეთმა მცირედმა მოცილებამაც კი როგორ შეცვალა სურათი.

```
In[62]:= Plot[{Tk[x, 10000, 200], x^-2}, {x, 0, 4}]
```

Out[62]=



1.1.3. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

თეორემა1. ვთქვათ $f \in L_1(T)$ და

$$\log n_0(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right),$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,n_0}(f,x) = f(x)$$

ყველა x -თვის, რომელიც არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი.

შედეგი 1. ვთქვათ $f \in L_1(T)$ და

$$\log n_0(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right),$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,n_0}(f,x) = f(x)$$

თითქმის ყველგან.

1.1.4. ძირითადი შედეგების დამტკიცება

თეორემა1. ვთქვათ $f \in L_1(T)$ და

$$\log n_0(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right),$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,n_0}(f,x) = f(x)$$

თუ x არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი.

დასამტკიცებლად ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი ლემის სამართლიანობა:

ლემა 1. სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left|F_{n,n_0}(x)\right| \lesssim nI_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x) + \frac{1}{x\,log\,n} I_{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n_0}\right)}(x) + \frac{n_0}{log\,n} I_{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n_0}\right)}(x)\,log\frac{1}{x}$$
$$+ \frac{1}{x\,log\,n} I_{\left[\frac{1}{n_0},\pi\right]}(x)\,log\frac{1}{x}.$$

$F_{n,n_0}(x)$-თვის გვაქვს შემდეგი წარმოდგენა:

$$F_{n,n_0}(x) = \frac{1}{l(n,n_0)}\left\{\sum_{j=2}^{n_0+1} \frac{sin\left(n_0+1+\frac{1}{2}-j\right)x}{j2\,sin\frac{x}{2}}\right.$$

$$\left. + D_{n_0}(x) + \sum_{j=2}^{n-n_0+1} \frac{sin\left(n_0-1+\frac{1}{2}+j\right)x}{j2\,sin\frac{x}{2}}\right\}$$

პირველ და ბოლო წევრებში შესამისად სინუსების სხვაობისა და სინუსების ჯამის ფორმულების გამოყენებით $F_{n,n_0}(x)$ შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$F_{n,n_0}(x) = \frac{1}{l(n,n_0)}\left\{\frac{\sin\left(n_0+1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{j=2}^{n_0+1}\frac{\cos jx}{j}\right.$$

$$-\frac{\cos\left(n_0+1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{j=2}^{n_0+1}\frac{\sin jx}{j}$$

$$+D_{n_0}(x) + \frac{\sin\left(n_0-1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{j=2}^{n-n_0+1}\frac{\cos jx}{j}.$$

$$\left.+\frac{\cos\left(n_0-1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{j=2}^{n-n_0+1}\frac{\sin jx}{j}\right\}$$

$$= \frac{1}{l(n,n_0)}\{A_1+A_2+A_3+A_4+A_5\}.$$

ცნობილია რომ სამართლიანია შემდეგი შეფასებები: (იხილეთ [19, თ.5])

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{\sin jx}{j}\right| \lesssim 1, x\in T, N\geq 1,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{\cos jx}{j}\right| \lesssim ln\frac{1}{x} \quad \forall x \in 0,\pi\ ,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{\cos jx}{j}\right| \lesssim ln(m+2) \quad x\in\left[\frac{1}{m+2},\pi\right], \quad \forall N\geq 1.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ $0\leq x<1/n$

$$\left|F_{n,n_0}(x)\right|\leq n.$$

ზემოთ მოყვანილი შეფასებებიდან როცა $x\geq 1/n$ გვექნება

$$|A_1| \lesssim \frac{1}{\log n}\left\{n_0 \log n_0\, I_{\frac{1}{n},\frac{1}{n_0})}(x) + I_{\left[\frac{1}{n_0},\pi\right]}(x)\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\right\}$$

$$|A_2| \lesssim \frac{1}{x\log n} I_{\left[\frac{1}{n},\pi\right]}(x),$$

$$|A_3| \lesssim \frac{1}{\log n}\left\{n_0 I_{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n_0}\right)}(x) + \frac{1}{x} I_{\left[\frac{1}{n_0},\pi\right]}(x)\right\},$$

$$|A_4| \lesssim \frac{1}{\log n}\left\{n_0 I_{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n_0}\right)}(x) \log\frac{1}{x} + I_{\left[\frac{1}{n_0},\pi\right]}(x)\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}\right\},$$

$$|A_5| \lesssim \frac{1}{x\log n} I_{\left[\frac{1}{n},\pi\right]}(x).$$

აღნიშნული შეფასებები ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას.

ახლა დავამტკიცოთ **თეორემა 1**. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

$$\left|T_{n,n_0}(f,x) - f(x)\right| \le \left(\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n_0}} + \int_{\frac{1}{n_0}}^{\pi}\right)\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right|\left|F_{n,n_0}(t)\right|dt$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 .$$

გამოვიყენოთ **ლემა 1** და მივიღებთ:

$$I_1 \lesssim n\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right|dt = o(1)$$

ყოველი x -თვის, რომელიც არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი. კვლავ გამოვიყენოთ **ლემა 1** და გვექნება:

$$I_2 \lesssim \frac{1}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n_0}}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right|\frac{dt}{t}$$

$$+\frac{n_0}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n_0}}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right|\log\frac{1}{t}dt = I_{21} + I_{22}.$$

განვიხილოთ $F(t)$ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია მოცემული შემდეგნაირად:

$$F_x(t) = F(t) = \int_0^t\left|\frac{f(x+s)+f(x-s)}{2} - f(x)\right|ds.$$

მაშინ ცხადია სამართიანია შემდები

$$I_{21} \lesssim \frac{1}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n_0}}\frac{F'(t)}{t}dt,$$

თუ მოვახდენთ ნაწილობით ინტეგრებას მივიღებთ:

$$I_{21} \lesssim \frac{1}{\log n}\frac{F(t)}{t}\,|_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n_0}} + \frac{1}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n_0}}\frac{F(t)}{t^2}dt \quad .$$

$\frac{F(t)}{t} = o(1)$ ყოველი x -თვის, რომელიც არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი და I_{21}-ის პირველი ნაწილი არის $o(1)$ როცა $n \to \infty$. მეორე ნაწილისთვისაც ანალოგიურია სამართლიანი. მართლაც, ყოველი $\varepsilon > 0$ -თვის საკმარისად დიდი n -თვის $\frac{F(t)}{t} < \varepsilon$ $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n_0}\right]$ სეგმენტზე. აქედან გამომდინარე

$$I_{21} \lesssim \frac{\varepsilon}{\log n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n_0}}\frac{dt}{t} \lesssim \varepsilon.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $I_{22} = o(1)$ როცა $n \to \infty$.

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ $I_2 = o(1)$ როცა $n \to \infty$.

I_3 ინტეგრალი შეგვიძლია დავშალოთ ორ ინტეგრალად

$$I_3 = \int_{\frac{1}{n_0}}^{\eta} + \int_{\eta}^{\pi} = I_{31} + I_{32},$$

ლემა 1-ის გამოყენებით გვექნება

$$I_{32} \leq \frac{1}{\log n}\frac{1}{\eta}\log\frac{1}{\eta}c_f,$$

სადაც c_f დამოკიდებულია f ფუნქციაზე. ცხადია ეს წევრი შეგვიძლია გავხადოთ საკმარისად მცირე, მაგრამ უნდა დავიცვათ ბალანსი η-სა და n-ს შორის. მაგალითად $\eta = \frac{1}{\log n_0}$ მაშინ დიდი n -თვის საკმარისად მცირეს გავხდით ამ წევრს. ანუ გვექნება $I_{32} = o(1)$ როცა $n \to \infty$.

კვლავ **ლემა 1**-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$I_{31} \lesssim \frac{1}{\log n}\int_{\frac{1}{n_0}}^{\frac{1}{\log n_0}} \frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right| dt \ .$$

ეს შეფასება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$I_{31} \lesssim \frac{1}{\log n}\int_{\frac{1}{n_0}}^{\frac{1}{\log n_0}} \frac{1}{t}\log\frac{1}{t}F'(t)dt,$$

თუ მოვახდენთ ნაწილობით ინტეგრებას მივიღებთ:

$$I_{31} \lesssim \frac{1}{\log n}\frac{F(t)}{t}\log\frac{1}{t}\Big|_{\frac{1}{n_0}}^{\frac{1}{\log n_0}} + \frac{1}{\log n}\int_{\frac{1}{n_0}}^{\frac{1}{\log n_0}} \frac{F(t)}{t^2}\log\frac{1}{t}dt.$$

$\frac{F(t)}{t} = o(1)$ ყოველი x -თვის, რომელიც არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი და I_{31}-ის პირველი ნაწილი არის $o(1)$ როცა $n \to \infty$. მეორე ნაწილისთვისაც ანალოგიურია სამართლიანი. მართლაც, ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის საკმარისად დიდი n -თვის $\frac{F(t)}{t} < \varepsilon$ $\left[\frac{1}{n_0}, \frac{1}{\log n_0}\right]$ სეგმენტზე. აქედან გამომდინარე

$$I_{31} \lesssim \frac{\varepsilon}{\log n}\int_{\frac{1}{n_0}}^{\frac{1}{\log n_0}} \frac{1}{t}\log\frac{1}{t}dt \lesssim \frac{\varepsilon \log^2 n_0}{\log n} \lesssim \varepsilon.$$

ანუ მივიღეთ, რომ$I_3 = o(1)$ როცა $n \to \infty$.

I_1, I_2, I_3-თვის მიღებული შეფასებები ასრულრბს თორემის დამტკიცებას.

1.2. ტრიგონომეტრიული ფურიეს მწკრივების ორგანზომილებიანი ტყებუჩავასა და ნორლუნდის შერეული საშუალოების ზომით კრებადობა

1.2.1. განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე თეორემები

$L_p(T^2)$ -თი ავღნიშნოთ ყველა ზომად f ფუნქციათა კლასი, რომლებიც არიან 2π პერიოდული და აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{T}^2} |f|^p\right)^{1/p} < \infty, \text{ სადაც } T^2 := [-\pi,\pi]^2$$

სუსტი $L_1(T^2)$ სივრცე მოიცავს ყველა ზომად f ფუნქციებს, რომლებიც 2π პერიოდულია ყველა ცვლადის მიმართ და სრულდება შემდეგი:

$$\|f\|_{weak-L_1(T^2)} := \sup_{\lambda} \lambda \mathrm{mes}\{(x,y) \in T^2 : |f(x,y)| > \lambda\} < \infty.$$

ვთქვათ $f \in L_1(T^2)$. f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის მოიცემა შემდეგნაირად:

$$S[f] := \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\,(n,m) e^{i(nx+my)},$$

სადაც

$$\hat{f}(n,m) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{T^2} f\,(x,y) e^{-i(nx+my)} dxdy$$

არის f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი. ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამს აქვს შემდეგი სახე:

$$S_{NM}(f\,;x\,,y):=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-M}^{M}\hat{f}\,(n,m)e^{i(nx+my)}.$$

ორმაგი ფურიეს მწკრივების შერეული ლოგარითმული საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$(L_n\,\mathcal{R}_m)(f\,;x\,,y):=\frac{1}{l_nl_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{S_{n-i,j}(f\,;x\,,y)}{(i+1)(j+1)}.$$

ორმაგი ფურიეს მწკრივების ნორლუნდისა და რისის ლოგარითმული საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$(L_n\,\mathcal{L}_m)(f\,;x\,,y):=\frac{1}{l_nl_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{S_{n-i,m-j}(f\,;x\,,y)}{(i+1)(j+1)},$$

$$(R_n\,\mathcal{R}_m)(f\,;x\,,y):=\frac{1}{l_nl_m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{S_{i,j}(f\,;x\,,y)}{(i+1)(j+1)},$$

შესაბამისად.

ცხადია, რომ სამართლიანია შემდეგი:

$$(L_n\,\mathcal{L}_m)(f\,;x\,,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}f\,(s,t)F_n(x-s)F_m(y-t)dsdt,$$

$$(R_n\,\mathcal{R}_m)(f\,;x\,,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}f\,(s,t)G_n(x-s)G_m(y-t)dsdt$$

და

$$(L_n \mathcal{R}_m)(f\,;x\,,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} f\,(s,t)F_n(x-s)G_m(y-t)dsdt,$$

სადაც

$$F_n(u) := \frac{1}{l_n}\sum_{i=0}^{n}\frac{D_{n-i}(u)}{i+1}, G_n(u) := \frac{1}{l_n}\sum_{i=0}^{n}\frac{D_i(u)}{i+1}..$$

ვთქვათ $L_Q = L_Q(T^2)$ არის ორლიჩის სივრცე [12, თ.2] წარმოქმნილი Q ფუნქციით. Q არის ამოზნექილი, უწყვეტი ფუნქცია ისეთი, რომ $Q(0)=0$ და

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{Q(u)}{u} = +\infty,\ \lim_{u\to 0}\frac{Q(u)}{u} = 0.$$

ამ სივრცეში ნორმა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\|f\|_{L_Q(T^2)} = inf\{\,k>0 : \int_{T^2} Q\,(|f|/k) \le 1\}.$$

კერძოდ თუ $Q(u)=u\log^{\beta}(1+u)$ $u,\beta>0$ მაშინ შესაბამის სივრცეს ავღნიშნავთ $L\,log\quad^{\beta}L(T^2)$ -ით.

ვთქვათ $f \in L_p(T^2), 1<p<\infty$. მაშინ ორმაგი ფურიეს მწკრივის მართკუთხოვანი კერძო ჯამი $S_{n,m}\left(f;x,y\right)$ კრებადია f -კენ ნორმით როცა $n\to\infty$ [18]. $L_1(T^2)$-თვის აღნიშნული თეორემა არ არის სამართლიანი. მაგრამ ერთგანზომილებიანი შემთხვევისათვის და $f \in L_1(T)$-თვის $S_n\left(f\right)$ აქვს სუსტი (1,1) ტიპი [19]. ამ შეფასებიდან გამომდინარეობს $S_n\left(f;x\right)$-ის კრებადობა $f \in L_1(T)$-კენ ზომით. თუმცა ორმაგი ფურიეს მწკრივებისათვის აღნიშნული შედეგი არ სრულდება [11],[13]. უფრო მეტიც, დამტკიცებულია, რომ ორმაგი ფურიეს მწკრივის კვადრატული კერძო ჯამიც არ არის ზომით კრებადი T^2-ზე $L\,log\,L\,(T^2)$ სივრცის ნებისმიერი გაფართოებისათვის. მეორეს მხრივ, კარგად არის ცნობილი, რომ თუ $f \in L\,log\,L\,(T^2)$, მაშინ მართკუთხოვანი კერძო ჯამი $S_{n,m}\left(f;x,y\right)$ კრებადია f -კენ ზომით T^2-ზე.

კლასიკური რეგულარული მეთოდები ხშირად აუმჯობესებენ ფურიეს მწკრივების კრებადობას. მაგალითისათვის, ორმაგი ფურიეს მწკრივების ფეიერის

საშუალოები $f \in L_1(T^2)$-თვის კრებადია f -კენ $L_1(T^2)$ ნორმით[18]. ეს საშუალოები არის ნორლუნდის საშუალოების კერძო შემთხვევა.

კარგად არის ცნობილი, რომ ორმაგი ფურიეს მწკრივების ნორლუნდის შეჯამებადეობის მეთოდი არის უფრო სუსტი ვიდრე ნებისმიერი დადებითი რიგის ჩეზაროს შეჯამებადობის მეთოდი. [9]-ში არის დამტკიცებული, რომ ორმაგი ფურიეს მწკრივებისათვის ეს საშუალოები საზოგადოდ არ არის კრებადი T^2-ზე ზომით, მაშინაც კი თუ განვიხილავთ ორლიჩის სივრცეს ფართეს ვიდრე $L\,log\,L\,(T^2)$. აქედან გამომდინარე ყველა კლასიკურ რეგულარულ მეთოდს არ შეუძლია ზომით კრებადობის გაუმჯობესება.

უოლშის სისტემისათვის ლოგარითმული საშუალოების შეჯამებადობის საკთხები შეგიძლიათ მოიძიოთ [3],[4],[5],[8],[15],[17].

[9]-ში განხილულია შერეული ლოგარითმული საშუალოების $\left(L_n{}^\circ R_m\right)$ მართკუთხოვანი კერძო ჯამი მრავალგანზომილებიანი შემთხვევისათვის და დამტკიცებულია, რომ აღნიშნული საშუალოები მოქმედებს $L_1(T^2)$ სივრციდან სუსტ $L_1(T^2)$-ში. აქედან გამომდინარეობს, რომ ორმაგი ფურიეს მწკრივის ლოგარითმული საშუალოების მართკუთხოვანი კერძო ჯამი კრებადია ზომით. კერძოდ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა GG1 (გოგინავა, გოგოლაძე). ვთქვათ, $f \in L_1(T^2)$. მაშინ

$(R_n{}^\circ L_m)(f\,;x\,,y) \to f$ -კენ ზომით T^2-ზე, როცა $n, m \to \infty$.

თეორემა GG2 (გოგინავა, გოგოლაძე). ვთქვათ $f \in L\,log\,L\,(T^2)$ მაშინ

$(L_n{}^\circ L_m)(f\,;x\,,y) \to f$ -კენ ზომით T^2-ზე, როცა $n, m \to \infty$.

თეორემა GG3 (გოგინავა, გოგოლაძე). ვთქვათ $L_Q(T^2)$ ორლიჩის სივრცე ისეთი, რომ

$$L_Q(T^2) \subsetneqq L\,log\,L\,(T^2).$$

მაშინ იმ f ფუნქციების სიმრავლე $L_Q(T^2)$-დან რომლებისთვისაც $(L_n{}^\circ L_m)(f\,;x\,,y)\to f$ -კენ ზომით T^2-ზე არის ბერის I კატეგორიის $L_Q(T^2)$-ში.

ნებისმიერი ნატურალური n, n_0, m რიცხვებისათვის, სადაც $0 \le n_0 \le n$ გვაქვს

$$\left(T_{n,n_0}{}^\circ L_m\right)(f;x,y)=f*\left(F_{n,n_0}\times F_m\right).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\left(T_{n,n_0}{}^\circ L_m\right)(f\,;x\,,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} f\,(s,t)F_{n,n_0}(x-s)F_m(y-t)dsdt.$$

თუ $n_0=0$ მიიღება $\left(R_n{}^\circ L_m\right)$ საშუალოები, ხოლო თუ $n_0=n$ მიიღება $\left(L_n{}^\circ L_m\right)$ საშუალოები.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ამოცანა:

ვთქვათ $f\in L_1(T^2)$. რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს n_0, რომელიც უზრუნველყოფს $\left(T_{n,n_0}{}^\circ L_m\right)$ საშუალოების ზომით კრებადობას T^2-ზე. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ეს არის ტყებუჩავას პირობა, ანუ $\log n_0(n)=O\left(\sqrt{\log n}\right)$. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ეს პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

1.2.2. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

თეორემა 2. **ა)** თუ $\log n_0(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right)$. მაშინ $\left(T_{n,n_0}{}^{\circ}L_m\right)(f\,;x\,,y) \to f$ ზომით $\forall f \in L_1(T^2)$-თვის.

ბ) თუ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\log n_0(n)}{\sqrt{\log n}} = \infty$. მაშინ იმ f ფუნქციების სიმრავლე, სადაც ადგილი აქვს $\left(T_{n,n_0}\mathcal{L}_m\right)(f\,;x\,,y) \to f$ ზომით კრებადობას, არის ბერის I კატეგორიის სიმრავლე, კერძოდ, $\exists f \in L_1(T^2)$ ისეთი, რომ არ აქვს ადგილი $\left(T_{n,n_0}\mathcal{L}_m\right)(f\,;x\,,y) \to f$ ზომით კრებადობას .

1.2.3. ძირითადი შედეგების დამტკიცება

თავდაპირველად მოვიყვანოთ დამხმარე თეორემები, რომლებიც დამტკიცებაში გვჭირდება.

თეორემა G [1]. ვთქვათ $H : L_1(T^2) \to L_0(T^2)$ არის წრფივი, უწყვეტი ოპერატორი რომელიც კომუტატიურია $\mathcal{E}$ სიმრავლეზე. ანუ $\forall E \in \mathcal{E} \quad \forall f \in L_1(T^2) \quad HEf = EHf$. ვთქვათ $\|f\|_{L_1(T^2)} = 1$ და $\lambda > 1$. მაშინ ნებისმიერი $1 \le r \in N$ -თვის, იმ პირობით, რომ $mes\{(x,y) \in T^2 : |Hf| > \lambda\} \ge \frac{1}{r}$ არსებობს $E_1, \dots, E_r, E_1^{'}, \dots, E_r^{'} \in \mathcal{E}$ და $\varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, \dots, r$ ისეთი, რომ

$$mes\{(x,y) \in T^2 : \left| H\left(\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i f(E_i x, E_i^{'} y) \right) \right| > \lambda\} \ge \frac{1}{8}.$$

თეორემა GGT (გატი, გოგინავა, ტყებუჩავა). ვთქვათ $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$ არის წრფივი უწყვეტი ოპერატორების მიმდევრობა მოქმედი $L_1(T^2)$ სივრციდან $L_0(T^2)$ -ში. დავუშვათ არსებობს ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ $L_1(T^2)$ -ის ერთეულოვანი $S(0,1)$ ბირთვიდან, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ და $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ უსასრულობისკენ მიმავალი რიცხვთა მიმდევრობები ისეთი, რომ

$$\varepsilon_0 = \inf_k mes\{(x,y) \in T^2 : |H_{m_k} \xi_k(x,y)| > \nu_k\} > 0.$$

მაშინ K სიმრავლე ფუნქციებისა $L_1(T^2)$ სივრციდან, რომელთათვისაც $\{H_m f\}$ მიმდევრობა კრებადია ზომით არის ბერის I კატეგორიის სიმრავლე $L_1(T^2)$ -ში.

თეორემა GGT დამტკიცება შეგიძლიათ იპოვოთ [3]-ში.

ვთქვათ

$$\alpha_{km}:=\frac{\pi(12k+1)}{6(m+1/2)},\beta_{km}:=\frac{\pi(12k+5)}{6(m+1/2)},\gamma_m:=\frac{\pi}{6(m+1/2)},$$

$$J_m:=\bigcup_{k=1}^{\left[\frac{\sqrt{m+1}-5}{12}\right]}\left[\alpha_{km}+\gamma_m,\beta_{km}-\gamma_m\right].$$

ლემა T. (ტყებუჩავა). ვთქვათ $0\le z\le\gamma_n$ და $x\in J_n$. მაშინ

$$F_{n,n_0}(x-z)\gtrsim\frac{log(n_0+2)}{x\,log(n+2)}.$$

ტყებუჩავას ლემის დამტკიცება შეგიძლიათ იპოვოთ [8]-ში.

თეორემა 2-ის დამტკიცება. **ა)** [10]-ში დამტკიცებულია, რომ ერთგანზომილებიან ოპერატორს $L_m(f):=f*F_m$ აქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპი. ესეიგი $f\in L_1(T)$-თვის ჩვენ გვაქვს

$$\|L_m(f)\|_{weak-L_1(T)}\lesssim\|f\|_{L_1(T)}.$$

მეორეს მხრივ ტყებუჩავამ [16]-ში დაამტკიცა, რომ

$$\sup_n\left\|F_{n,n_0}\right\|_{L_1(T)}<\infty$$

როცა

$$\log n_0=O\left(\sqrt{\log n}\right).$$

ვთქვათ

$$\Omega:=\left\{(x,y)\in T^2:\left|\left(T_{n,n_0}\mathcal{L}_m\right)(f,x,y)\right|>\lambda\right\}.$$

მაშინ გვექნება

$$\lambda\mathrm{mes}(\Omega)=\lambda\int_{T^2}\mathbb{I}_\Omega\,(x,y)dxdy=\lambda\int_T\left(\int_T I_\Omega\,(x,y)dy\right)dx$$

$$\lesssim\left\|\left(f*F_{n,n_0}\right)(f)\right\|_{L_1(T^2)}\lesssim\|f\|_{L_1(T^2)},$$

სადაც I_E არის E სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია.

სტანდარტული მსჯელობის გამოყენებით [19]-დან და ზემოთ მიღებული შეფასებიდან დავამტკიცებთ **ა)** პუნქტს.

ახლა დავამტკიცოთ **ბ)** პუნქტი. ვთქვათ,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n_0(n)}{\sqrt{\log n}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\log n_0(n_k)}{\sqrt{\log n_k}} = \infty.$$

თეორემა GGT გამოყენებით თეორემა იქნება დამტკიცებული თუ ვაჩვენებთ, რომ არსებობს უსასრულობისკენ მიმავალი რიცხვთა მიმდევრობები $\{n_k : k \geq 1\}$ და $\{\nu_k : k \geq 1\}$, ასევე ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\xi_k : n \geq 1\}$ $L_1(T^2)$-ის ერთეულოვანი $S(0,1)$ ბირთვიდან ისეთი, რომ ყოველი n-თვის

$$mes\{(x,y) \in T^2 : \left|\left(T_{n_k,n_0(n_k)} \circ L_{n_k}\right)(\xi_k ; x , y)\right| > \nu_k\} \geq \frac{1}{8}.$$

თავდაპირველად დავამტკიცოთ, რომ

$$mes\left\{(x,y) \in T^2 : \left|\left(T_{n_k,n_0(n_k)} \circ L_{n_k}\right)\left(\frac{I_{[0,\gamma_{n_k}]^2}}{\gamma_{n_k}^2}; x, y\right)\right| \gtrsim n_k^{3/2}\right\} \gtrsim \frac{\log^2 n_0(n_k)}{n_k^{3/2}\log n_k}.$$

ლემა T გამოყენებით გვექნება:

$$\left(T_{n_k,n_0(n_k)} \circ L_{n_k}\right)\left(\frac{I_{[0,\gamma_{n_k}]^2}}{\gamma_{n_k}^2}; x , y\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma_{n_k}^2}\frac{1}{\pi^2}\int_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2} F_{n_k,n_0(n_k)}\,(x-u)F_{n_k}(y-v)dudv$$

$$\gtrsim \frac{\log n_0\,(n_k)}{\log n_k}\frac{1}{xy}, (x,y)\in J_{n_k}\times J_{n_k}.$$

დავუშვათ

$$s_{i,n_k} := \frac{\sqrt{n_k}\,\log n_0\left(n_k\right)}{i\log n_k}.$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$mes\left\{(x,y)\in T^2 : \left|\left(T_{n_k,n_0(n_k)}\,\mathcal{L}_{n_k}\right)\left(\frac{I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}}{\gamma_{n_k}^2}; x\,, y\right)\right| \gtrsim n_k^{3/2}\right\}$$

$$\geq mes\left\{(x,y)\in J_{n_k}\times J_{n_k} : \left|\left(T_{n_k,n_0(n_k)}\,\mathcal{L}_{n_k}\right)\left(\frac{I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}}{\gamma_{n_k}^2}; x\,, y\right)\right| \gtrsim n_k^{3/2}\right\}$$

$$\geq mes\left\{(x,y)\in J_{n_k}\times J_{n_k} : \frac{\log n_0\,(n_k)}{\log n_k}\frac{1}{xy}\gtrsim n_k^{3/2}\right\}$$

$$= mes\left\{(x,y)\in J_{n_k}\times J_{n_k} : y \lesssim \frac{\log n_0\,(n_k)}{x n_k^{3/2}\,\log n_k}\right\}$$

$$\gtrsim \frac{1}{n_k^2}\sum_{i=1}^{\left[\frac{\sqrt{n_0(n_k)+1}-5}{12}\right]}\sum_{l=1}^{s_{i,n_k}} = c\sum_{i=1}^{\left[\frac{\sqrt{n_0(n_k)+1}-5}{12}\right]}\frac{\sqrt{n_k}\,\log n_0\,(n_k)}{i n_k^2\,\log n_k}$$

$$\gtrsim \frac{\log^2 n_0\left(n_k\right)}{n_k^{3/2}\log n_k}.$$

და ბოლოს, **თეორემა G** გამოყენებით არსებობს $E_1,\dots,E_{r_k},E_1^{'},\dots,E_{r_k}^{'}\in\mathscr{E}$ და $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{r_k}=\pm 1$ ისეთი, რომ

$$mes\{(x,y)\in T^2 : \left|\sum_{i=1}^{r_k}\varepsilon_i\left(T_{n_k,n_0(n_k)}\,\mathcal{L}_{n_k}\right)\left(\frac{I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}}{\gamma_{n_k}^2}; E_i\,x, E_i^{'}y\right)\right| \gtrsim n_k^{3/2}\} > \frac{1}{8},$$

სადაც

$$r_k \sim \frac{n_k^{3/2} \log n_k}{\log^2 n_0\left(n_k\right)}.$$

ავღნიშნოთ

$$\nu_k = \frac{\log^2 n_0\left(n_k\right)}{\log n_k}$$

და

$$\xi_k(x,y) = \frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{r_k} \varepsilon_i \frac{I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}\left(E_i x, E_i' y\right)}{\gamma_{n_k}^2}.$$

დაგვრჩა მხოლოდ დასამტკიცებელი, რომ $\xi_k \in S\left(0,1\right)$. მართლაც

$$\|\xi_k\|_{L_1(T^2)} \leq \frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{r_k} \frac{\left\| I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2} \right\|_{L_1(T^2)}}{\gamma_{n_k}^2} \leq 1.$$

რაც ასრულებს თეორემის მტკიცებას.

1.3. ტრიგონომეტრიული ფურიეს მწკრივების ორგანზომილებიანი ტყებუჩავას საშუალოების კრებადობა

1.3.1. განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე თეორემები

ნებისმიერი n, n_0, m და m_0-თვის ისეთებისთვის, რომ $0 \leq n_0 \leq n$ და $0 \leq m_0 \leq m$ ორგანზომილებიანი ტყებუჩავას საშუალოები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$t_{m,n}^{m_0,n_0} f = f * \left(F_{n,n_0} \times F_{m,m_0}\right) = \frac{1}{l(m,m_0)l(n,n_0)} \left\{ \sum_{i=0}^{n_0-1} \frac{S_i(x)}{n_0 - i + 1} \sum_{j=0}^{m_0-1} \frac{S_j(y)}{m_0 - j + 1} \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{n_0-1} \frac{S_i(x)}{n_0 - i + 1} S_{m_0}(y) + \sum_{i=0}^{n_0-1} \frac{S_i(x)}{n_0 - i + 1} \sum_{j=m_0+1}^{m} \frac{S_j(y)}{j - m_0 + 1}$$

$$+ S_{n_0}(x) \sum_{j=0}^{m_0-1} \frac{S_j(y)}{m_0 - j + 1} + S_{n_0}(x) S_{m_0}(y) + S_{n_0}(x) \sum_{j=m_0+1}^{m} \frac{S_j(y)}{j - m_0 + 1}$$

$$+ \sum_{i=n_0+1}^{n} \frac{S_i(x)}{i - n_0 + 1} \sum_{j=0}^{m_0-1} \frac{S_j(y)}{m_0 - j + 1} + \sum_{i=n_0+1}^{n} \frac{S_i(x)}{i - n_0 + 1} S_{m_0}(y)$$

$$\left. + \sum_{i=n_0+1}^{n} \frac{S_i(x)}{i - n_0 + 1} \sum_{j=m_0+1}^{m} \frac{S_j(y)}{j - m_0 + 1} \right\}$$

ორგანზომილებიანი ტყებუჩავას საშუალოს გულს აქვს შემდეგი სახე:

$$T_{m,n}^{m_0,n_0} = \frac{1}{l(m,m_0)l(n,n_0)} \left\{ \sum_{i=0}^{n_0-1} \frac{D_i(x)}{n_0 - i + 1} \sum_{j=0}^{m_0-1} \frac{D_j(y)}{m_0 - j + 1} \right.$$

$$+\sum_{i=0}^{n_0-1}\frac{D_i(x)}{n_0-i+1}D_{m_0}(y)+\sum_{i=0}^{n_0-1}\frac{D_i(x)}{n_0-i+1}\sum_{j=m_0+1}^{m}\frac{D_j(y)}{j-m_0+1}$$

$$+D_{n_0}(x)\sum_{j=0}^{m_0-1}\frac{D_j(y)}{m_0-j+1}+D_{n_0}(x)D_{m_0}(y)+D_{n_0}(x)\sum_{j=m_0+1}^{m}\frac{D_j(y)}{j-m_0+1}$$

$$+\sum_{i=n_0+1}^{n}\frac{D_i(x)}{i-n_0+1}\sum_{j=0}^{m_0-1}\frac{D_j(y)}{m_0-j+1}+\sum_{i=n_0+1}^{n}\frac{D_i(x)}{i-n_0+1}D_{m_0}(y)$$
$$\left.+\sum_{i=n_0+1}^{n}\frac{D_i(x)}{i-n_0+1}\sum_{j=m_0+1}^{m}\frac{D_j(y)}{j-m_0+1}\right\}$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $n, m > 1$ მაშინ $T_{m,n}^{m_0,n_0}$ ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$T_{m,n}^{m_0,n_0}=\frac{1}{l(m,m_0)l(n,n_0)}\left\{\sum_{i=2}^{n_0+1}\frac{D_{n_0+1-i}(x)}{i}\sum_{j=2}^{m_0+1}\frac{D_{m_0+1-j}(y)}{j}\right.$$

$$+\sum_{i=2}^{n_0+1}\frac{D_{n_0+1-i}(x)}{i}D_{m_0}(y)+\sum_{i=2}^{n_0+1}\frac{D_{n_0+1-i}(x)}{i}\sum_{j=2}^{m-m_0+1}\frac{D_{j+m_0-1}(y)}{j}$$

$$+D_{n_0}(x)\sum_{j=2}^{m_0+1}\frac{D_{m_0+1-j}(y)}{j}+D_{n_0}(x)D_{m_0}(y)+D_{n_0}(x)\sum_{j=2}^{m-m_0+1}\frac{D_{j+m_0-1}(y)}{j}$$

$+\sum_{i=2}^{n-n_0+1}\frac{D_{i+n_0-1}(x)}{i}\sum_{j=2}^{m_0+1}\frac{D_{m_0+1-j}(y)}{j}+\sum_{i=2}^{n-n_0+1}\frac{D_{i+n_0-1}(x)}{i}D_{m_0}(y)+$
$\left.\sum_{i=2}^{n-n_0+1}\frac{D_{i+n_0-1}(x)}{i}\sum_{j=2}^{m-m_0+1}\frac{D_{j+m_0-1}(y)}{j}\right\}.$

1.3.2. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

თეორემა 1. თუ $0 \le n_0 \le n$ და$0 \le m_0 \le m$ მაშინ

$$1+\frac{\log^2(n_0+2)}{\log(n+2)}+\frac{\log^2(m_0+2)}{\log(m+2)}+\frac{\log^2(n_0+2)\log^2(m_0+2)}{\log(n+2)\log(m+2)} \lesssim \left\|T_{m,n}^{m_0,n_0}\right\|_{L_1}$$

$$\lesssim 1+\frac{\log^2(n_0+2)}{\log(n+2)}+\frac{\log^2(m_0+2)}{\log(m+2)}+\frac{\log^2(n_0+2)\log^2(m_0+2)}{\log(n+2)\log(m+2)}.$$

თეორემა 2. შემდეგი პირობები არის ერთმანეთის ექვივალენტური

ა) $\log n_0(n)=O\left(\sqrt{\log n}\right)$ და $log\, m_0\,(m) = O\left(\sqrt{log\, m}\right)$ როცა $n, m \to \infty$

ბ) $\left\|t_{m,n}^{m_0,n_0} f - f\right\|_C \to 0$ როცა $n, m \to \infty \;\; \forall f \in C$

გ) $\left\|t_{m,n}^{m_0,n_0} f - f\right\|_L \to 0$ როცა $n, m \to \infty \;\; \forall f \in L^1$.

თეორემა 1 არის სამართლიანი თუ გამოვიყენებთ თეორემა T1. და იმ ფაქტს, რომ ვიხილავთ ნამრავლიან გულს.

თეორემა 2 არის თეორემა 1-ის შედეგი რადგან ა) პირობა არის გულის შემოსაზღვრულობის პირობა რაც ბ) და გ)-ს შესრულების აუცილებელი და საკმარისი პირობაა.

თეორემა 3. თუ $\log n_0(n)=O\left(\sqrt{\log n}\right)$ ან $log\, m_0\,(m) = O\left(\sqrt{log\, m}\right)$ როცა $n, m \to \infty$მაშინ $\left(t_{m,n}^{m_0,n_0}\right)(f\,; x\,, y) \to f$ ზომით $\forall f \in L_1(T^2)$-თვის.

თეორემა 4. ვთქვათ $f \in L\, log\, L\,(T^2)$. როცა $n, m \to \infty$ მაშინ $\left(t_{n,n}^{m_0,n_0}\right)(f\,; x\,, y) \to f$ ზომით.

თეორემა 5. ვთქვათ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log^2 n_0(n)}{\log n} = \infty$. მაშინ იმ f ფუნქციების სიმრავლე, სადაც ადგილი აქვს $\left(t_{n,n}^{m_0,n_0}\right)(f\,; x\,, y) \to f$ ზომით კრებადობას, არის ბერის I კატეგორიის სიმრავლე. კერძოდ, $\exists f \in L_1(T^2)$ ისეთი, რომ არ აქვს ადგილი $\left(t_{n,n}^{m_0,n_0}\right)(f\,; x\,, y) \to f$ ზომით კრებადობას .

1.3.3. ძირითადი შედეგების დამტკიცება

თეორემა 3-ის დამტკიცება. პირობიდან გვაქვს, რომ ან $\log n_0(n) = O\left(\sqrt{\log n}\right)$ ან $log\, m_0\,(m) = O\left(\sqrt{log\, m}\right)$ როცა $n, m \to \infty$. ზოგადობის შეუზღუდავად დაუშვათ, რომ სრულდება პირველი. ახლა დავამტკიცოთ, რომ ტყებუჩავას ერთგანზომილებიანF_{m,m_0}გულს აქვს სუსტი $(1,1)$ ტიპი. ესეიგი $f \in L_1(T)$-თვის ჩვენ გვაქვს

$$\left\|F_{m,m_0}(f)\right\|_{weak-L_1(T)} \lesssim \|f\|_{L_1(T)}.$$

დაუშვათ $\alpha_n(t) := sin\big((n+1)t\big)$ და$\beta_n(t) := cos\big((n+1)t\big)$. შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$S_{n-k}(f\,;x) = \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\frac{sin\left(\left(n-k+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\,sin\left(\frac{(x-t)}{2}\right)}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\,sin\big((n+1)(x-t)\big)\frac{cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\,sin\left(\frac{(x-t)}{2}\right)}dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_T f(t)\,cos\big((n+1)(x-t)\big)\frac{sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\,sin\left(\frac{(x-t)}{2}\right)}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\,sin\big((n+1)(x-t)\big)\left(\frac{cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\,sin\left(\frac{(x-t)}{2}\right)} - \frac{cos\left(\frac{(x-t)}{2}\right)}{2\,sin\left(\frac{(x-t)}{2}\right)}\right)dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_T f(t)\frac{sin\big((n+1)(x-t)\big)}{2\,tan\left(\frac{(x-t)}{2}\right)}dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_T f(t)\,cos\big((n+1)(x-t)\big)\frac{sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\,sin\left(\frac{(x-t)}{2}\right)}dt$$

$$=-\frac{\alpha_n(x)}{\pi}\int_T f(t)\beta_n(t)\widetilde{D}(x-t)dt+\frac{\beta_n(x)}{\pi}\int_T f(t)\alpha_n(t)\widetilde{D}(x-t)dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_T f(t)\frac{sin\big((n+1)(x-t)\big)}{2\,tan\left(\frac{(x-t)}{2}\right)}dt-\frac{\beta_n(x)}{\pi}\int_T f(t)\beta_n(t)\frac{sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\,sin\left(\frac{(x-t)}{2}\right)}dt$$

$$-\frac{\alpha_n(x)}{\pi}\int_T f(t)\alpha_n(t)\frac{sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{2\,sin\left(\frac{(x-t)}{2}\right)}dt$$

$$=-\alpha_n(x)\tilde{S}_k(f\beta_n\,;x)+\beta_n(x)\tilde{S}_k(f\alpha_n\,;x)-\beta_n(x)S_k(f\beta_n\,;x)-\alpha_n(x)S_k(f\alpha_n\,;x)$$
$$+S^*_{n+1}(f\,;x)$$

სადაც $\tilde{S}_n(f\,;x)$, $S^*_n(f\,;x)$ და $\widetilde{D}_k(x)$ შეესაბამება შეუღლებულ კერძო ჯამს, მოდიფიცირებულ კერძო ჯამს და შეუღლებულ გულს შესაბამისად. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f\in L_1(T)$-თვის ჩვენ გვაქვს (იხ. [18], თ.7):

$$\|S^*_n(f)\|_{weak-L_1(T)}\lesssim\|f\|_{L_1(T)},$$

$$\left\|sup\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}S_k(f)\right|\right\|_{weak-L_1(T)}\lesssim\|f\|_{L_1(T)}$$

და

$$\left\|sup\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}\tilde{S}_k(f)\right|\right\|_{weak-L_1(T)}\lesssim\|f\|_{L_1(T)}.$$

თუ გამოვიყენებთ აბელის გარდაქმნას მივიღებთ სუსტ (1,1) ტიპს. მეორეს მხრივ ტყებუჩავამ [14]-ში დაამტკიცა, რომ

$$\sup_n \|F_{n,n_0}\|_{L_1(T)} < \infty$$

როცა

$$\log n_0 = O\left(\sqrt{\log n}\right).$$

ვთქვათ

$$\Omega := \left\{(x,y) \in T^2 : \left|\left(F_{n,n_0} \mathcal{F}_{m,m_0}\right)(f,x,y)\right| > \lambda\right\}.$$

მაშინ გვექნება

$$\lambda \text{mes}(\Omega) = \lambda \int_{T^2} \mathbb{I}_\Omega (x,y) dx dy = \lambda \int_T \left(\int_T I_\Omega (x,y) dy \right) dx$$
$$\lesssim \left\| \left(f * F_{n,n_0}\right)(f) \right\|_{L_1(T^2)} \lesssim \|f\|_{L_1(T^2)},$$

სადაც I_E არის E სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია.

სტანდარტული მსჯელობის გამოყენებით [17]-დან და ზემოთ მიღებული შეფასებიდან დავამტკიცებთ თეორემას.

ახლა დავამტკიცოთ **თეორემა 4**. თეორემის დასამტკიცებლად ჩვენ გამოვიყენებთ მარცინკევიჩის საინტერპოლაციო თეორემის კერძო შემთხვევას. ვთქვათ $A : L_1(T^1) \to L_0(T^1)$ არის სუსტი (1,1)ტიპის და (α, α) ტიპის რომელიმე $1 < \alpha < \infty$-თვის. ანუ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) ყოველი $y > 0$

$$mes\{x \in T^1 : |A(f,x)| > \lambda\} \lesssim \frac{1}{y} \int_{T^1} |f(t)| dt \,; \forall f \in L_1(T^1)\,;$$

ბ) ყოველი $f \in L_\alpha(T^1)$

$$\|Af\|_{L_\alpha(T^1)} \lesssim \|f\|_{L_\alpha(T^1)}.$$

მაშინ ყოველი $\beta \geq 0$

$$\int_{T^1} |A(f,x)| \, ln^\beta |A(f,x)| \, dt \lesssim \int_{T^1} |f(x)| \, ln^{\beta+1} |f(x)| \, dt + 1.$$

მაშინ **თეორემა 3**-ის ანალოგიურად გვექნება

$$\lambda \mathrm{mes}(\Omega) = \lambda \int_{T^2} \mathbb{I}_\Omega (x,y) dxdy = \lambda \int_T \left(\int_T I_\Omega (x,y) dy \right) dx$$
$$\lesssim \left\| \left(f * F_{n,n_0} \right)(f) \right\|_{L_1(T^2)} \lesssim 1 + \| |f| \, log|f| \|_{L_1(T^2)}.$$

აქაც სტანდარტული მსჯელობის გამოყენებით [17]-დან და ზემოთ მიღებული შეფასებიდან დავამტკიცებთ თეორემას.

დავამტკიცოთ **თეორემა 5**. ვთქვათ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{log^2 n_0(n)}{log\, n} = \lim_{n_k\to\infty} \frac{log^2 n_0(n_k)}{log n_k} = \infty.$$

თეორემა GGT გამოყენებით თეორემა იქნება დამტკიცებული თუ ვაჩვენებთ, რომ არსებობს უსასრულობისკენ მიმავალი რიცხვთა მიმდევრობები $\{n_k : k \geq 1\}$ და $\{\nu_k : k \geq 1\}$, ასევე ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\xi_k : n \geq 1\}$ $L_1(T^2)$-ის ერთეულოვანი $S(0,1)$ ბირთვიდან ისეთი, რომ ყოველი n-თვის

$$mes\{(x,y) \in T^2 : \left| \left(t_{n_k,n_k}^{n_0,n_0} \right)(\xi_k ; x, y) \right| > \nu_k\} \geq \frac{1}{8}.$$

თავდაპირველად დავამტკიცოთ, რომ

$$mes \left\{ (x,y) \in T^2 : \left| \left(t_{n_k,n_k}^{n_0,n_0} f \right) \left(\frac{I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}}{\gamma_{n_k}^2} ; x, y \right) \right| \gtrsim n_k^{3/2} \right\} \gtrsim \frac{log^2 n_0 \, (n_k)}{n_k^{3/2} \, log\, n_k}.$$

ლემა T გამოყენებით გვექნება:

$$\left(t_{n_k,n_k}^{n_0,n_0} f \right) \left(\frac{I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}}{\gamma_{n_k}^2} ; x, y \right)$$
$$= \frac{1}{\gamma_{n_k}^2} \frac{1}{\pi^2} \int_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2} F_{n_k, n_0(n_k)} \, (x-u) F_{n_k, n_0(n_k)} (y-v) dudv$$
$$\gtrsim \frac{log^2 n_0 \, (n_k)}{log^2 n_k} \frac{1}{xy}, (x,y) \in J_{n_k} \times J_{n_k}.$$

დავუშვათ

$$s_{i,n_k} := \frac{\sqrt{n_k}\, log^2 n_0\,(n_k)}{i\, log^2 n_k}.$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$mes\left\{(x,y)\in T^2 : \left|\left(t_{n_k,n_k}^{n_0,n_0} f\right)\left(\frac{I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}}{\gamma_{n_k}^2}; x, y\right)\right| \gtrsim n_k^{3/2}\right\}$$

$$\geq mes\left\{(x,y)\in J_{n_k}\times J_{n_k} : \left|\left(t_{n_k,n_k}^{n_0,n_0} f\right)\left(\frac{I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}}{\gamma_{n_k}^2}; x, y\right)\right| \gtrsim n_k^{3/2}\right\}$$

$$\geq mes\left\{(x,y)\in J_{n_k}\times J_{n_k} : \frac{log^2 n_0\,(n_k)}{log^2 n_k}\frac{1}{xy} \gtrsim n_k^{3/2}\right\}$$

$$= mes\left\{(x,y)\in J_{n_k}\times J_{n_k} : y \lesssim \frac{log^2 n_0\,(n_k)}{x n_k^{3/2}\, log^2 n_k}\right\}$$

$$\gtrsim \frac{1}{n_k^2}\sum_{i=1}^{\left[\frac{\sqrt{n_k+1}-5}{12}\right]}\sum_{l=1}^{s_{i,n_k}} = c\sum_{i=1}^{\left[\frac{\sqrt{n_k+1}-5}{12}\right]}\frac{\sqrt{n_k}\, log^2 n_0\,(n_k)}{i n_k^2\, log^2 n_k}.$$

$$\gtrsim \frac{log^2 n_0\,(n_k)}{n_k^{3/2}\, log\, n_k}.$$

და ბოლოს, **თეორემა G** გამოყენებით არსებობს $E_1,\dots,E_{r_k},E_1^{'},\dots,E_{r_k}^{'}\in\mathscr{E}$ და $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{r_k}=\pm 1$ ისეთი, რომ

$$mes\{(x,y)\in T^2 : \left|\sum_{i=1}^{r_k}\varepsilon_i\left(T_{n_k,n_0(n_k)}\,\mathcal{L}_{n_k}\right)\left(\frac{I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}}{\gamma_{n_k}^2}; E_i\,x, E_i^{'}y\right)\right| \gtrsim n_k^{3/2}\} > \frac{1}{8},$$

სადაც

$$r_k \sim \frac{n_k^{3/2}\, log\, n_k}{log^2 n_0\,(n_k)}.$$

ავღნიშნოთ

$$\nu_k = \frac{log^2\, n_0\,(n_k)}{log\, n_k}$$

და

$$\xi_k(x,y) = \frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{r_k} \varepsilon_i \frac{I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2}\left(E_i x, E_i^{'} y\right)}{\gamma_{n_k}^2}.$$

დაგვრჩა მხოლოდ დასამტკიცებელი, რომ $\xi_k \in S\left(0,1\right)$. მართლაც

$$\|\xi_k\|_{L_1(T^2)} \le \frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{r_k} \frac{\left\| I_{\left[0,\gamma_{n_k}\right]^2} \right\|_{L_1(T^2)}}{\gamma_{n_k}^2} \le 1.$$

რაც ასრულებს თეორემის მტკიცებას.

1.4. გამოყენებული ლიტერატურა

1. Garsia A. Topic in almost everywhere convergence. *Chicago*, 1970.
2. G´at G. Investigation of certain operators with respect to the Vilenkin system. *Acta Math. Hungar.*, 61, 1-2 (1993), 131-149.
3. G´at G., Goginava U., Tkebuchava G. Convergence in measure of Logarithmic means of double Walsh-Fourier series. *Georgian Math. J.*, 12, 4 (2005), 607-618.
4. G´at G., Goginava U., Tkebuchava G. Convergence in measure of logarithmic means of quadratical partial sums of double Walsh-Fourier series. *J. Math. Anal. Appl.*, 323,1 (2006), 535-549.
5. G´at G., Goginava U. uniform and *L*-convergence of logarithmic means of Walsh-Fourier series. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 22, 2 (2006), 497-506.

6. G. G´at and U. Goginava. On the divergence of N¨orlund logarithmic means of WalshFourier series. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 25(6):903{916, 2009.

7. G. G´at and K. Nagy. On the logarithmic summability of Fourier series. Georgian Math. J., 18(2):237{248, 2011.
8. Goginava U., Tkebuchava G. Convergence of the logarithmic means of Fourier series. *J. Math. Anal. Approx. Theory*, 1, 1 (2006), 30-41.

9. Goginava U., Gogoladze L. Convergence in measure of logarithmic means of multiple Fourier series. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 49, 2 (2014), 70-77.
10. Goginava U., Gogoladze L. Convergence in measure of strong logarithmic means of double Fourier series. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 49, 3 (2014), 109-116.
11. Getsadze R. On the divergence in measure of multiple Fourier seties. (Russian) *Some problems of functions theory*, 4 (1988), 84-117.
12. Krasnosel'skii M.A., Rutickii Ya.B. Convex functions and Orlicz space. *(English translation), P. Noorhoff (Groningen)*, 1961.
13. Konyagin S.V. Divergence with respect to measure of multiple Fourier series. (Russian) Mat. *Zametki*, 44, 2 (1988), 196-201, 286; *translation in Math. Notes*, 44, 1-2 (1988), 589-592 (1989).
14. Simon P. Strong convergence of certain means with respect to the Walsh-Fourier series. *Acta Math. Hungar.*, 49 (1987), 425-431.

15. Sz´asz O. On the logarithmic means of rearranged partial sums of Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48 (1942), 705–711.
16. Tkebuchava G. Logarithmic summability of Fourier series. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhzi. (N.S.)*, 21, 2 (2005), 161-167.
17. Yabuta K. Quasi-Tauberian theorems, applied to the summability of Fourier series by Riesz's logarithmic means. *To^ ho^ ku Math. Journ.*, 22 (1970), 117-129.
18. Zhizhiashvili L.V. Some problems of multidimensional harmonic analysis. (Russian) *Tbilisi, TGU,* 1996.
19. Zygmund A. Trigonometric Series. vol. 1. *Cambridge Univ. Press, Cambridge*, 1959.

თავი II: ორმაგი ფურიე-ვილენკინის მწკრივების თანაბარი კრებადობა

2.1. განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე თეორემები

ვთქვათ $\mathbb{N}_+$ არის დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე, $\mathbb{N} := \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$.

ვთქვათ $m := (m_{0,} m_{1,...})$ არის ნატურალურ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობა, რომლის თითოეული წევრი არაა ნაკლები 2-ზე. $Z_{m_k} := \{0,1,...m_k - 1\}$ წარმოადგენს სიმრავლეს, რომელზეც შემოტანილია შეკრების ოპერაცია მოდულით m_k.

G_m ჯგუფი არის პირდაპირი ნამრავლი Z_{m_i} ჯგუფებისა, რომლებზეც გვაქვს დისკრეტული ტოპოლოგია.

μ ზომა, არის პირდაპირი ნამრავლი ზომების:

$$\mu_k\left(\{j\}\right) := 1/m_k \qquad (\mathrm{j} \in \mathrm{Z}_{\mathrm{m_k}}).$$

μ არის ჰაარის ზომა G_m-ზე და $\mu\left(G_m\right) = 1.$

G_m-ის ელემენტები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მიმდევრობის სახით

$$x := \left(x_0, x_1, ..., x_j, ...\right) \ \left(x_k \in Z_{m_k}\right).$$

თუ m მიმდევრობა არის შემოსაზღვრული, მაშინ G_m უწოდებენ შემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფს, წინაამღდეგ შემთხვევაში შემოუსაზღვრელს. ჩვენ ვიხილავთ შემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფებს.

ვთქვათ, გვაქვს m მიმდევრობით აგებული შემდეგი რიცხვები:

$$M_0 := 1, M_{k+1} := m_k M_k \ (k \in \mathbb{N}).$$

მაშინ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$n=\sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j.$$

სადაც $n_j \in Z_{m_j}\,(j\in\mathbb{N}_+)$ და მხოლოდ სასრული რაოდენობა n_j -ის განსხვავდება ნულისგან.

ახლა განვსაზღვროთ G_m-ზე ორთონორმირებული სისტემა, რომელსაც უწოდებენ ვილენკინის სისტემას.

პირველ რიგში განვსაზღვროთ კომპლექსურ მნიშვნელობიანი ფუნქცია $r_k(x): G_m \to C,$ განზოგადოებული რადემახარის ფუნქცია, შემდეგნაირად:

$$r_k(x) := \exp\left(2\pi i x_k / m_k\right) \ \left(i^2=-1, x\in G_m, k\in\mathbb{N}\right).$$

ახლა განვსაზღვროთ ვილენკინის სისტემა $\psi := (\psi_n : n\in\mathbb{N})$ G_m-ზე, როგორც:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x)\left(n\in\mathbb{N}\right).$$

კერძოდ ჩვენ ვიღებთ უოლშის სისტემას, თუ $m\equiv 2.$

ვილენკინის სისტემა არის ორთონორმირებული და სრული $L_2\left(G_m\right)$-ში.

ψ სისტემისთვის დირიხლეს გული განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k \qquad (n\in\mathbb{N}_+), \qquad D_0 = 0.$$

D_n შემდეგი თვისება კარგად არის ცნობილი(იხილეთ [20])

$$D_{M_n} = \begin{cases} M_n, x\in I_n \\ 0, x\in G\backslash I_n \end{cases}$$

და

$$\int_G D_n(t)d\mu(t) = 1 \quad (n\in\mathbb{N}_+).$$

ვთქვათ $n=\sum_{i=0}^{k} a_i M_i,$ თანაც $a_k \neq 0$ და $0\le a_i < m_i$ როცა $0\le i\le k,$ ასევე $n' = n - a_k M_k$ მაშინ

$$D_n(x) = \frac{1-\psi_{M_k}^{a_k}}{1-\psi_{M_k}} D_{M_k}(x) + \psi_{M_k}^{a_k} D_{n'}(x).$$

ასევე ცნობილია შემდეგი თვისების სამართლიანობა [19] რომელი თვისების დამტკიცება მესამე თავში იქნება მოყვანილი.

$$\left|D_k(Z_\alpha^{(n)})\right| \leq \frac{cM_n}{\alpha}.$$

ყოველი k, n -თვის, სადაც $(0 < \alpha < M_n)$.

კარგად არის ცნობილი ფართო ანალოგია შემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფებზე ჰარმონიულ ანალიზსა და კლასიკურ ფურიეს მწკრივებს შორის. მაგრამ ტრიგონომეტრიულ შემთხვევაში არსებობს ფუნქციათა კლასი რომლის ფუნქციების ფურიეს მწკრივები ყოველთვის კრებადია. კრებადობა თანაბარია თუ დამატებით მოვითხოვთ ფუნქციის უწყვეტობას. ასეთი მაგალითია სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასი (იხილეთ [15]). ვინერის [21], მარცინკევიჩის[17], ვატერმანის[22], ჭანტურიას[4], კიტა და იონედას [16], ახობაძის[2], გოგინავას[6] წვლილი დიდი იყო სასრული ვარიაცის კლასზე ზოგადი კლასების შესწავლაში. ვილენკინის სისტემისათვის ერთ განზომილებიანი შემთხვევისთვის სასრული რხევების და განზოგადოებული სასრული რხევების ფუნქციათა კლასი განხილული იყო ონივერისა და ვატერმანის მიერ [19]. ორ განზომილებიან შემთხვევაში სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასი განსაზღვრა და შეისწავლა ჰარდმა[14]. მზგავსი შედეგი იყო დამტკიცებული მორიცის მიერ [18]. გოგინავამ [5] დაამტკიცა, რომ ჰარდის თეორემაში შერეული ვარიაციის სასრულობის მოთხოვნა არ იყო საჭირო. მსგავსი თეორემა უოლშ-ფურიეს მწკრივებისათვის იქნა შესწავლილი [7]-ში. განსხვავებული განზოგადოებული სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასები იყო შესწავლილი გოლუბოვის [12],[13], ახობაძე[3], გოგინავა და სააკიანის მიერ [8]-[11].

ჯგუფს

$$G_m^2 := G_m \times G_m$$

უწოდებენ ორგანზომილებიან ვილენკინის ჯგუფს. ორგანზომილებიანი სისტემა: $(\psi_{n,m} : n, m \in \mathbb{N})$ არის კრონეკერის ნამრავლი ორი ვილენკინის სისტემის, სადაც:

$$\psi_{n,m}\left(x^1, x^2\right) = \psi_n\left(x^1\right)\psi_m\left(x^2\right).$$

ორგანზომილებიანი ვილენკინ-ფურიეს კოეფიციენტი:

$$\hat{f}\left(n,m\right) := \int_{G_m^2} f\psi_{n,m} \quad \left(n,m \in \mathbb{N}\right).$$

ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების მართკუთხოვანი კერძო ჯამი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$S_{n,m}(f;x^1,x^2):=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} f(k,i)\psi_{k,i}(x^1,x^2).$$

ორგანზომილებიანი დირიხლეს გული განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$D_{m,n}(x^1,x^2):=D_m(x^1)D_n(x^2).$$

ვთქვათ $a_k\in\{1,2,...,p_{k+1}-1\}$, $b_l\in\{1,2,\ldots,p_{l+1}-1\}$, $z_\alpha^{(n)}=(b_0b_1...b_{n-1}0...)$ ასევე

$$O_1(f;M_k,y):=\sum_{\alpha=0}^{M_k-1}\omega_1\left(f;I_k+z_\alpha^{(k)},y\right),$$

$$O_2(f;M_l,x):=\sum_{\beta=0}^{M_l-1}\omega_2\left(f;x,I_l+z_\beta^{(l)}\right)$$

და

$$O_{1,2}(f;M_k,M_l):=\sum_{\alpha=0}^{M_k-1}\sum_{\beta=0}^{M_l-1}\omega_{1,2}\left(f;\left(I_k+z_\alpha^{(k)}\right)\times\left(I_l+z_\beta^{(l)}\right)\right).$$

სადაც

$$\omega_1\left(f,I_k+z_\alpha^{(k)},y\right):=\sup_{x,x'\in I_k+z_\alpha^{(k)}}\left|f(x,y)-f\left(x',y\right)\right|,$$

$$\omega_2\left(f,x,I_l+z_\beta^{(l)}\right):=\sup_{y,y'\in I_l+z_\beta^{(l)}}\left|f(x,y)-f\left(x,y'\right)\right|$$

და

$$\omega_{1,2}\left(f,\left(I_k+z_\alpha^{(k)}\right)\times\left(I_l+z_\beta^{(l)}\right)\right)$$

$$:=\sup_{x,x'\in I_k+z_\alpha^{(k)},y,y'\in I_l+z_\beta^{(l)}}\left|f(x,y)-f\left(x',y\right)-f\left(x,y'\right)+f\left(x',y'\right)\right|.$$

ვიტყვით, რომ f არის სასრული ოსილაციის (რხევის)$\left(f\in BO\left(G^2\right)\right)$, თუ

$$sup_k O_1(f,M_k,0)<\infty,$$

$$sup_r O_{12}(f,M_{r,},0)<\infty$$

და

$$sup_{k,r}O_{1,2}(f,M_k,M_r)<\infty.$$

ვიტყვით, რომ შემოსაზღვრული, ზომადი f ფუნქცია არის კერძო სასრული ოსილაციის $\left(f \in PBO\left(G^2\right)\right)$, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

$$\sup_{y\in G}\sup_{k} O_1\left(f; M_k, y\right) < \infty,$$

$$\sup_{x\in G}\sup_{l} O_2\left(f; M_l, x\right) < \infty.$$

მოვიყვანოთ აღნიშვნები, რომლებიც საჭიროა ძირითადი თეორემის ჩამოსაყალიბებლად. ვთქვათ,

$$\Delta_k^{(1)} f\left(x,y\right) = f\left(x-e_k, y\right) - f\left(x,y\right),$$

$$\Delta_l^{(2)} f\left(x,y\right) = f\left(x, y-e_l\right) - f\left(x,y\right)$$

და

$$\Delta_{k,l}^{(1,2)} f\left(x,y\right) = f\left(x-e_k, y-e_l\right) - f\left(x-e_k, y\right) - f\left(x, y-e_l\right) + f\left(x,y\right).$$

ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების თეორია წარმოადგენს აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზისერთ-ერთ მნიშვნელოვან მიმართულებას. ამ თეორიის განვითარებაზე ძლიერი გავლენა მოახდინა ტრიგონომეტრიული მწკრივების კლასიკურმა თეორიამ, სადაც შეისწავლება ორთონორმირებული სისტემები, რომელთა თვისებები ძირითადად განპირობებულია ტოპოლოგიური ჯგუფის სტრუქტურით. უოლშის
სისტემა არის მნიშვნელოვანი მოდელი, რომელზეც შეიძლება აბსტრაქტული ანალიზის მრავალი ფუნდამენტალური დებულების ილუსტრირება.

ჟორდანმა 1881 წელს განსაზღვრა სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასი შემდეგნაირად:

ვთქვათ f არის ერთი ცვლადის ნამდვილი და ზომადი ფუნქცია პერიოდით 1. მოცემული $I=(a,b)$ -თვის ჩვენ აღვნიშნავთ

$$f(I) := f(b) - f(a).$$

ვთქვათ $E=\{I_i\}$ არის სიმრავლე თანაუკვეთი ინტერვალებისა T -დან და სიმრავლე ყველა შესაძლო ასეთი E -ბის

არის Ω.

ჩვენ აღვნიშნავთ

$$V(f) = \sup_{\{I_i\}\in\Omega} \sum_i |f(I_i)|.$$

ჩვენ ვიტყვით f არის სასრული ვარიაციის და დავწერთ $f \in BV$, თუ

$$V(f) < \infty.$$

ჟორდანმა დაამტკიცა შემდეგის სამართლიანობა:

თეორემა (**ჟორდანი**) ვთქვათ, $f \in BV$. მაშინ

$$S_n f(x) \to (f(x+0) + f(x-0))/2 \text{ როცა } n \to \infty.$$

ორგანზომილებიან შემთხვევაში სასრული ვარიაციის BV ფუნქციათა კლასი შემოღებული იყო ჰარდის მიერ 1906 წელს.

ვთქვათ, f არის ორი ცვლადის ნამდვილი და ზომადი ფუნქცია პერიოდით 1 თითოეული ცვლადის მიმართ. მოცემული $I=(a,b)$, $J=(c,d)$ ინტერვალებისათვის და x, y წერტილებისათვის $I:=[0,1]$-დან ჩვენ აღვნიშნავთ

$$f(I,y) := f(b,y) - f(a,y), \qquad f(x,J) := f(x,d) - f(x,c)$$

და მართკუთხედისთვის $A=(a,b)\times(c,d)$, ჩვენ გვაქვს

$$f(A) = f(I,J) := f(a,c) - f(a,d) - f(b,c) + f(b,d).$$

ვთქვათ $E=\{I_i\}$ არის სიმრავლე თანაუკვეთი ინტერვალებისა T -დან და სიმრავლე ყველა შესაძლო ასეთი E -ბის არის Ω. ჩვენ Ω_n აღვნიშნავთ n თანაუკვეთ ინტერვალთა სიმრავლეს $I_i \subset T$ -დან. აღვნიშნოთ

$$V_1(f) = \sup_{y\in T} \sup_{\{I_i\}\in\Omega} \sum_i |f(I_i, y)|,$$

$$V_2(f) = \sup_{x\in T}\sup_{\{J_j\}\in\Omega}\sum_j |f(x,J_j)|$$

$$V_{1,2}(f) = \sup_{\{I_i\},\{J_j\}\in\Omega}\sum_i\sum_j |f(I_i,J_j)|.$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ f არის სასრული ვარიაციის ჰარდის აზრით და დავწერთ $f \in BV$, თუ

$$V(f) := V_1(f) + V_2(f) + V_{1,2}(f) < \infty.$$

თეორემა (**ჰარდი**) ვთქვათ, $f \in BV$. მაშინ

$$S_{n_1,n_2}f(x,y) \to \frac{1}{4}\sum f(x\pm 0, y\pm 0) \text{ როცა } n_1,n_2 \to \infty.$$

ვიტყვით, რომ f არის კერძო სასრული ვარიაციის და დავწერთ $f \in PBV$, თუ

$$V(f) := V_1(f) + V_2(f) < \infty.$$

თეორემა (**გოგინავა**) ვთქვათ $f \in L_1$ და $f \in PBV$. თუ $f(x\pm 0, y\pm 0)$ ზღვრები არსებობს, მაშინ

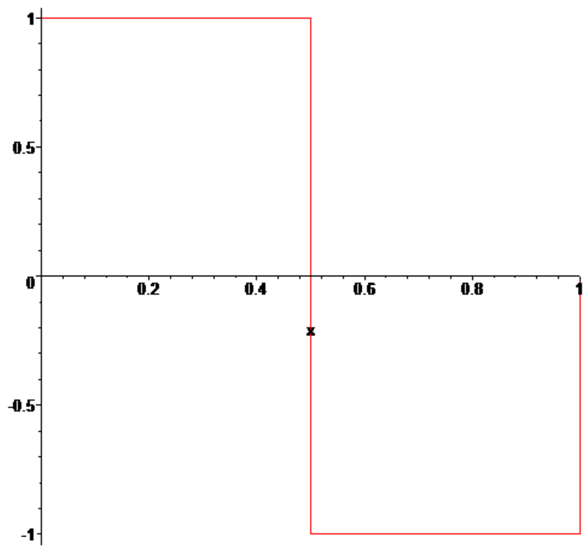
$$S_{n_1,n_2}f(x,y) \to \frac{1}{4}\sum f(x\pm 0, y\pm 0) \text{ როცა } n_1,n_2 \to \infty.$$

აღნიშნულ თეზისში შემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფებისთვის ჩვენ განვიხილეთ ორგანზომილებიანი ფურიეს მწკრივების მართკუთხოვანი კერძო ჯამების თანაბრად კრებადობის პრობლება კერძო სასრული ოსილაციის ფუნქციებისთვის. გოგინავამ თეორემა დაამტკიცა უოლშის სისტემისთვის. ჩვენი შედეგი წარმოადგენს გოგინავას შედეგის ანალოგს ვილენკინის სისტემისათვის. ასევე ჩვენ შევისწავლეთ წერტილოვანი კრებადობის საკითხი.

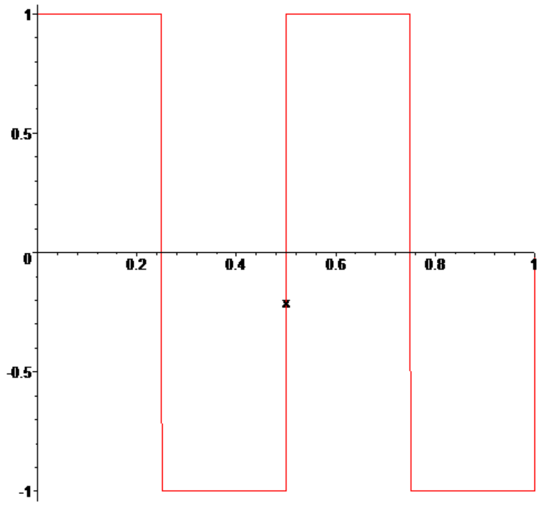
ჩვენს მიერ განხილული ვილენკინის სისტემა წარმოადგენს უოლშის სისტემის განზოგადებას. უოლშის სისტემის ბევრი თვისების ანალოგი თვისება და ანალოგი თეორემები ცნობილია ვილენკინის სისტემისთვის. ამიტომ, ვილენკინის სისტემის უკეთესი გააზრებისთვის და გეომეტრიული წარმოდგენისათვის კარგი იქნება თუ უოლშის სისტემისთვის მოვიყვანთ გეომეტრიულ ილუსტრაციებს საბაზისო ფუნქციებისათვის.

2.2. საბაზისო ფუნქციების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

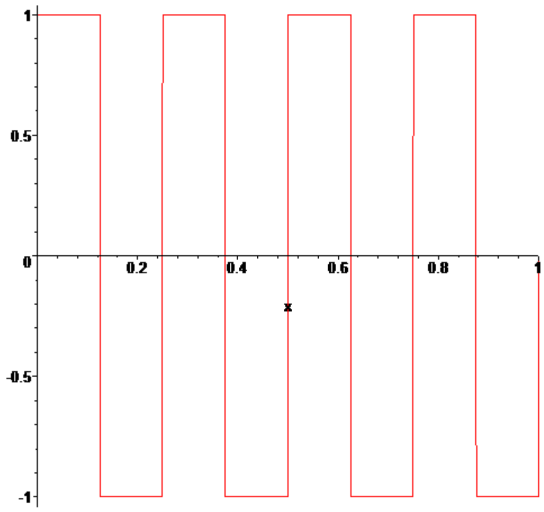
ავაგოთ რადემახერის ფუნქციების გრაფიკები $[0,1)$ -ზე:



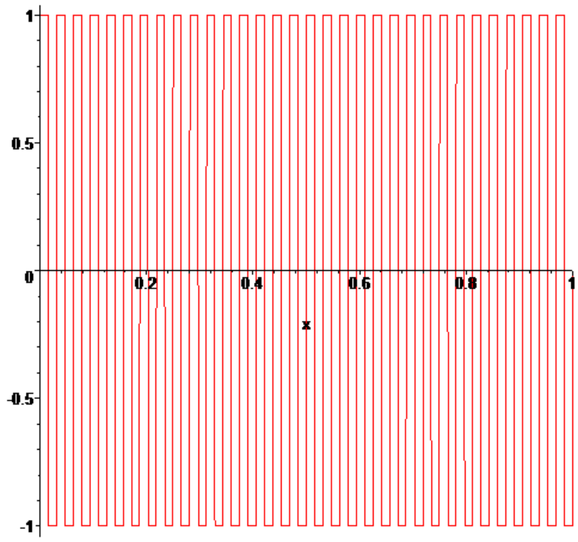
ნახ: 2.1 რადემახერის ფუნქცია υ_0



ნახ: 2.2 რადემახერის ფუნქცია v_1

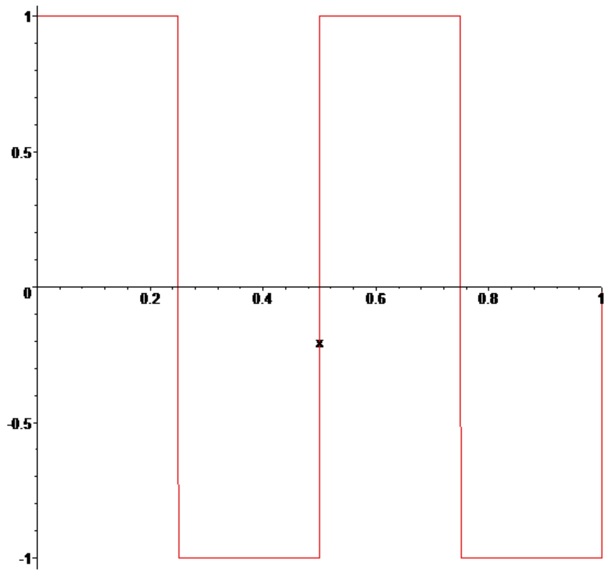


ნახ: 2.3 რადემახერის ფუნქცია v_2

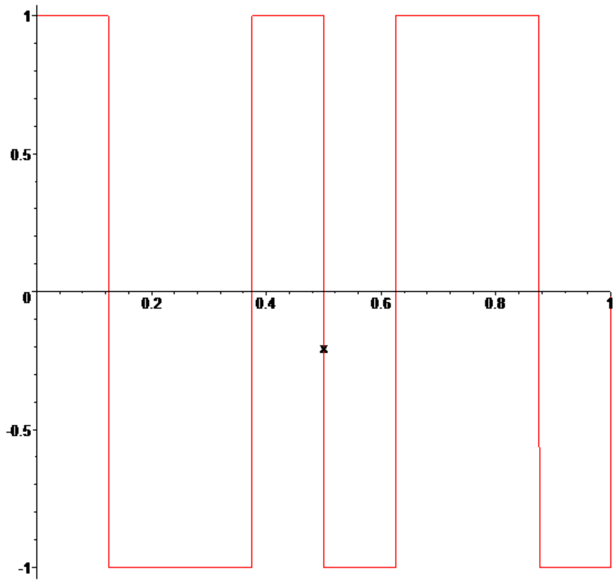


ნახ: 2.4 რადემახერის ფუნქცია υ_{16}

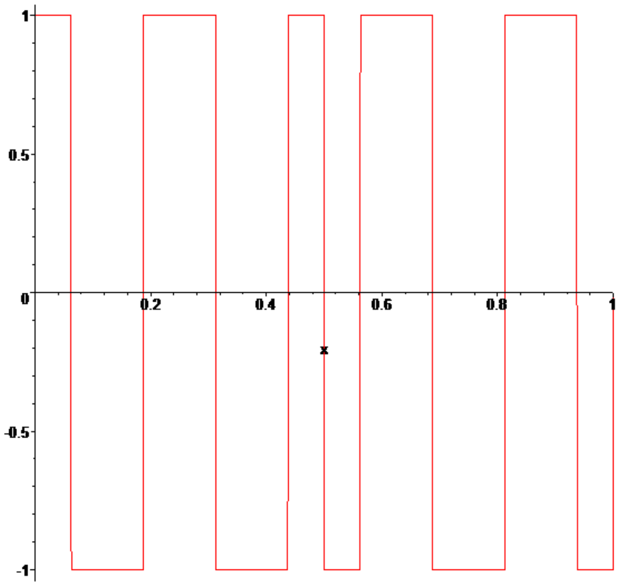
ახლა ავაგოთ უოლშის ფუნქციების გრაფიკები $[0,1)$ -ზე:



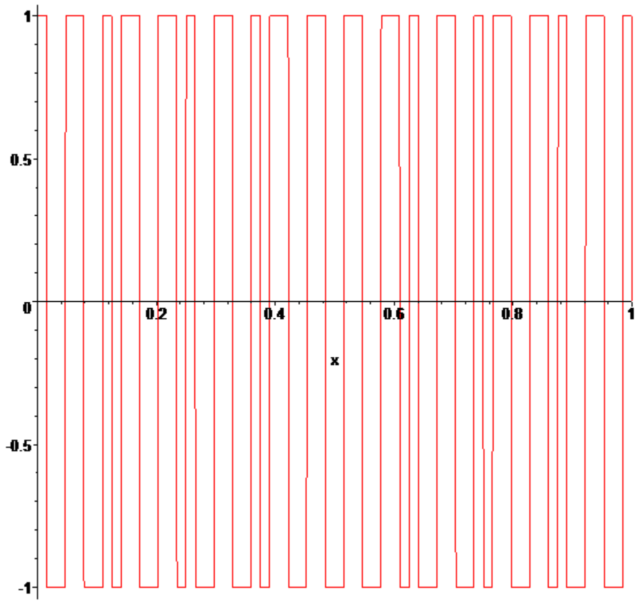
ნახ:2.5 უოლშის ფუნქცია ϕ_2



ნახ:2.6 უოლშის ფუნქცია ϕ_7

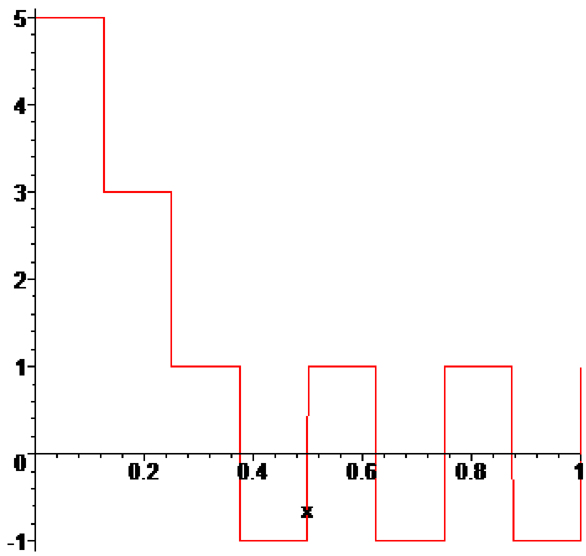


ნახ:2.7 უოლშის ფუნქცია ϕ_{13}

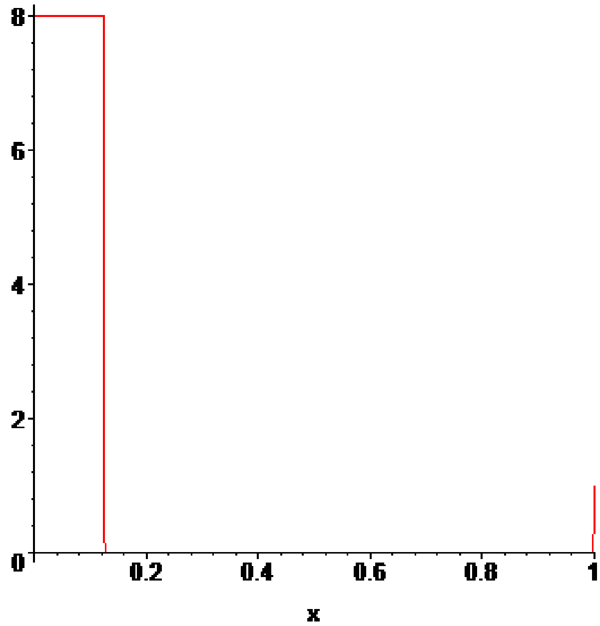


ნახ:2.9 უოლშის ფუნქცია ϕ_{53}

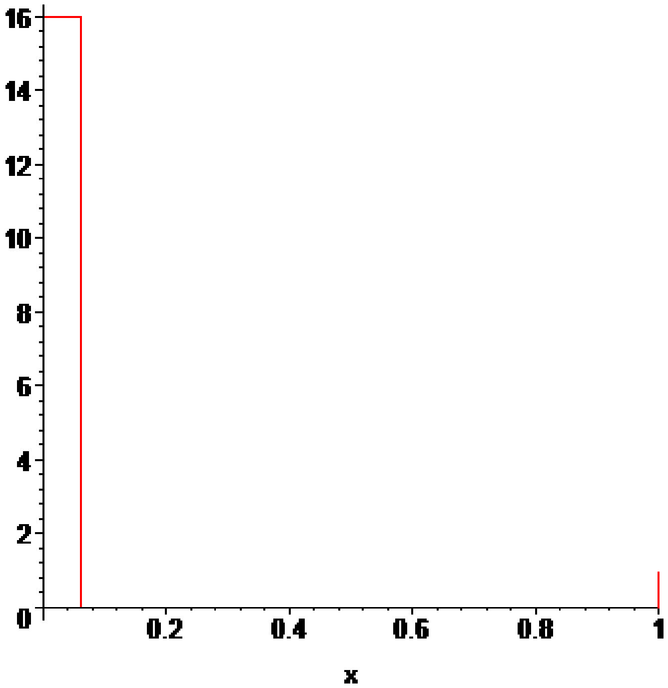
[0,1) ინტერვალზე ავაგოთ დირიხლეს გულის გრაფიკები:



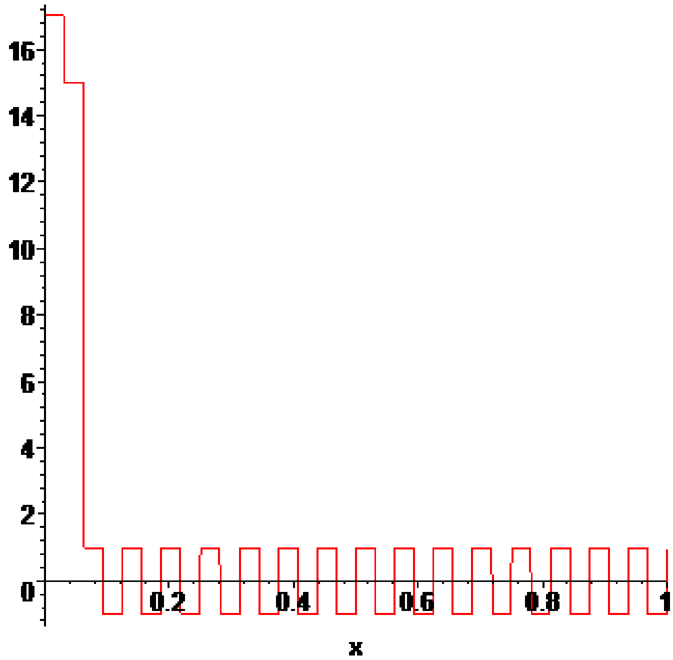
ნახ: 2.10 დირიხლეს გული D_5^{ϕ}



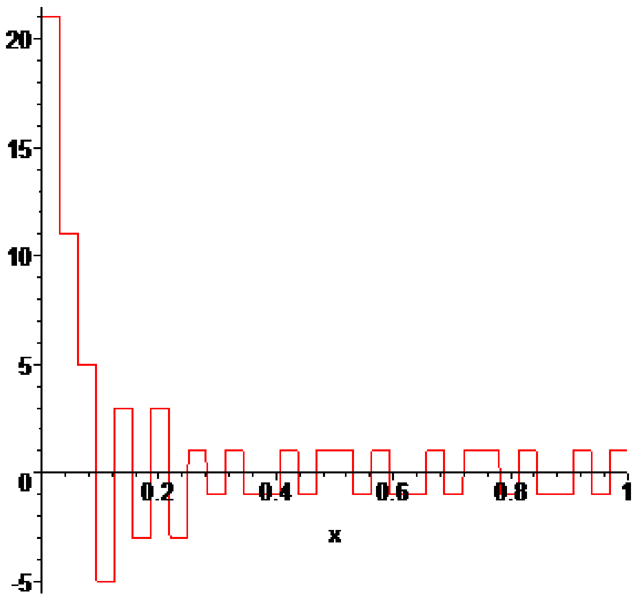
ნახ: 2.10 დირიხლეს გული D_8^{ϕ}



ნახ: 2.10 დირიხლეს გული D_{16}^{ϕ}



ნახ: 2.10 დირიხლეს გული D_{17}^{ϕ}



ნახ: 2.10 დირიხლეს გული D_{21}^{ϕ}

2.3. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

თეორემა 1. ვთქვათ $f \in C\left(G^2\right)$ და სრულდება შემდეგი პირობები

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha=1}^{M_k-1} \frac{1}{\alpha}\left|\Delta_k^{(1)} f\left(x - z_\alpha^{(k)}, y\right)\right| = 0,$$

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{\beta=1}^{M_l-1} \frac{1}{\beta}\left|\Delta_l^{(2)} f\left(x, y - z_\beta^{(l)}\right)\right| = 0,$$

$$\lim_{l,k\to\infty} \sum_{\alpha=1}^{M_k-1} \sum_{\beta=1}^{M_l-1} \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}\left|\Delta_{k,l}^{(1,2)} f\left(x - z_\alpha^{(k)}, y - z_\beta^{(l)}\right)\right| = 0$$

თანაბრად $\left(x, y\right) \in G^2$ მიმართ. მაშინ f ფუნქციის ვილენკინ-ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია G^2-ზე.

თეორემა 2. ვთქვათ, f არის G^2 -ზე და $f \in PBO(G^2)$. მაშინ f ფუნქციის ვილენკინ-ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია G^2-ზე. (გოგინავას თეორემის ანალოგი ვილენკინის სისტემისთვის)

შედეგი 1. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქცია G^2 და $f \in BO(G^2)$. მაშინ f ფუნქციის ვილენკინ-ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია G^2-ზე. (ჰარდის თეორემის ანალოგი ვილენკინის სისტემისთვის)

2.4. ძირითადი შედეგების დამტკიცება

თეორემა 1-ის დამტკიცება.

ვთქვათ, $n=\sum_{i=0}^{k}a_iM_i$, თანაც $a_k\neq 0$ და $0\le a_i<m_i$ როცა $0\le i\le k$, ასევე $n^{\prime}=n-a_kM_k$ და

ვთქვათ, $m=\sum_{j=0}^{l}b_jM_j$, თანაც $b_l\neq 0$ და $0\le b_j<m_j$ როცა $0\le j\le l$, ასევე $m^{\prime}=m-b_lM_l$.

ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$S_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)=\int_{G^2}\left(f(x-s,y-t)-f(x,y)\right)D_n(s)D_m(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=\int_{G^2}\left(f(x-s,y-t)-f(x,y)\right)\left(1+\psi_{M_k}(s)+\ldots+\psi_{M_k}^{a_k-1}(s)\right)D_{M_k}(s)$$

$$\times\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_l}^{b_l-1}(t)\right)D_{M_l}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$+\int_{G^2}\left(f(x-s,y-t)-f(x,y)\right)\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_l}^{b_l-1}(t)\right)$$

$$\times D_{M_l}(t)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{n^{\prime}}(s)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$+\int_{G^2}\left(f(x-s,y-t)-f(x,y)\right)\left(1+\psi_{M_k}(s)+\ldots+\psi_{M_k}^{a_k-1}(s)\right)$$

$$\times D_{M_k}(s)\psi_{M_l}^{b_l}(t)D_{m^{\prime}}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$+\int_{G^2}\left(f(x-s,y-t)-f(x,y)\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{n^{\prime}}(s)\psi_{M_l}^{b_l}(t)D_{m^{\prime}}(t)d\mu(s)d\mu(t)=A_1+A_2+A_3+A_4.$$

მივიღებთ

$$|A_1|\le M_kM_l\int_{I_k}\int_{I_l}\left|f(x-s,y-t)-f(x,y)\right|$$

$$\times\left|1+\psi_{M_k}(s)+\ldots+\psi_{M_k}^{a_k-1}(s)\right|\left|1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_l}^{b_l-1}(t)\right|d\mu(s)d\mu(t)$$

$$\leq M_k M_l \frac{1}{M_k}\frac{1}{M_l}\left(\omega_1\left(f;\frac{1}{M_k}\right)+\omega_2\left(f;\frac{1}{M_l}\right)\right)a_k\, b_l$$

$$\leq p^2\left(\omega_1\left(f;\tfrac{1}{M_k}\right)+\omega_2\left(f;\tfrac{1}{M_l}\right)\right)=o(1),$$

როცა $l,k\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G^2$ მიმართ.

მივიღებთ, რომ თუ $t\in I_k$, $0\leq\alpha<M_k$, მაშინ $D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}+t\right)=D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)$. აქედან გამომდინარე ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$A_2=\int_{I_k}\int_G f(x-s,y-t)\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_l}^{b_l-1}(t)\right)$$

$$\times D_{M_l}(t)D_{n'}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(s)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$+\int_{I_k}\int_G\sum_{\alpha=1}^{M_k-1} f\left(x-z_\alpha^{(k)}-s,y-t\right)\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_l}^{b_l-1}(t)\right)D_{M_l}(t)$$

$$\times D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)d\mu(s)d\mu(t)=A_{21}+A_{22}.$$

ცხადია, რომ

$$\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\psi_{M_k}^{a_k}(s)=e^{-\frac{2\pi i}{m_k}a_k}e^{\frac{2\pi i s_k}{m_k}a_k}=e^{\frac{2\pi i(s_k-1)}{m_k}a_k}=\psi_{M_k}^{a_k}(s-e_k)$$

და $0<c_1\leq\left|1-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\right|\leq 2.$

$$\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)A_{21}=\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\int_{I_k}\int_G f(x-s,y-t)$$

$$\times\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_l}^{b_l-1}(t)\right)D_{M_l}(t)D_{n'}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(s)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=\int_{I_k}\int_G f(x-s,y-t)\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_l}^{b_l-1}(t)\right)D_{M_l}(t)D_{n'}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(s-e_k)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=\int_{I_k}\int_G f(x-s-e_k,y-t)\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_l}^{b_l-1}(t)\right)D_{M_l}(t)D_{n'}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(s)d\mu(s)d\mu(t).$$

აქედან გამომდინარე გვექნება

$$\left|A_{21}-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)A_{21}\right| \le \left|1-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\right| \int_{I_k}\int_G \left|\Delta_k^{(1)} f(x-s,y-t)\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_l}^{b_l-1}(t)\right)D_{M_l}(t)D_{n'}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(s)\right|$$

$$\times d\mu(s)d\mu(t) \le M_k M_l \frac{c}{M_k}\frac{1}{M_l}\omega_1\left(f,\frac{1}{M_k}\right)b_l \le cp\omega_1\left(f,\frac{1}{M_k}\right).$$

ცხადია ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left|A_{22}-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)A_{22}\right| \le \left|1-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\right|$$

$$\times(p+1)M_k\int_{I_k}\int_G\left|\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_l}^{b_l-1}(t)\right)D_{M_l}(t)\right|$$

$$\times\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\left|\Delta_k^{(1)} f\left(x-z_\alpha^{(k)}-s,y\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)\right|d\mu(s)d\mu(t)$$

$$\le c(p+1)M_kM_l\frac{c}{M_k}\frac{1}{M_l}o(1)b_l=o(1).$$

მივიღებთ

$$A_2=o(1)$$

როცა $k\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G^2$ თვის.

ანალოგიურად გვექნება

$$A_3=o(1)$$

როცა $l\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G^2$ თვის. A_4-თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$A_4=\int_{G^2}\left(f(x-s,y-t)-f(x,y)\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{n'}(s)\psi_{M_l}^{b_l}(t)D_{m'}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{M_k-1}\sum_{\beta=0}^{M_l-1}\int_{I_l}\int_{I_k} f\left(x-z_\alpha^{(k)}-s,y-z_\beta^{(l)}-t\right)$$

$$\times D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{m'}\left(z_\beta^{(l)}\right)\psi_{M_l}^{b_l}\left(z_\beta^{(l)}\right)\psi_{M_l}^{b_l}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=\int_{I_l}\int_{I_k} f(x-s,y-t)D_{n'}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{m'}(0)\psi_{M_l}^{b_l}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$+\int_{I_l}\int_{I_k}\sum_{\alpha=1}^{M_k-1} f\left(x-z_\alpha^{(k)}-s, y-t\right)D_{m'}(0)\psi_{M_l}^{b_l}(t)D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$+\int_{I_l}\int_{I_k}\sum_{\beta=1}^{M_l-1} f\left(x-s, y-z_\beta^{(l)}-t\right)D_{n'}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{m'}\left(z_\beta^{(l)}\right)\psi_{M_l}^{b_l}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$+\int_{I_l}\int_{I_k}\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\sum_{\beta=1}^{M_l-1} f\left(x-z_\alpha^{(k)}-s, y-z_\beta^{(l)}-t\right)D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)$$

$$\times D_{m'}\left(z_\beta^{(l)}\right)\psi_{M_l}^{b_l}(t)d\mu(s)d\mu(t) = A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}.$$

გვექნება

$$\left|A_{41}-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)A_{41}\right| \le \left|1-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\right|$$

$$\times\int_{I_l}\int_{I_k}\left|\Delta_k^{(1)}f(x-s,y-t)D_{m'}(0)\psi_{M_l}^{b_l}(t)D_{n'}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(s)\right|d\mu(s)d\mu(t)$$

$$\le M_k M_l \frac{c}{M_k}\frac{1}{M_l}\omega_1\left(f,\frac{1}{M_k}\right) = o(1).$$

როცა $k,l\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G^2$ თვის. ანალოგიურად გვექნება

$$\left|A_{42}-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)A_{42}\right| \le \left|1-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\right|(p+1)M_k$$

$$\times\int_{I_l}\int_{I_k}\left|D_{m'}(0)\psi_{M_l}^{b_l}(t)\right|\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\left|\Delta_k^{(1)}f\left(x-z_\alpha^{(k)}-s,y-t\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)\right|d\mu(s)d\mu(t)$$

$$\le (p+1)M_k M_l\frac{c}{M_k}\frac{1}{M_l}o(1) = o(1)$$

როცა $k,l\to\infty$. ანალოგიურად

$$A_{43} = o(1)$$

როცა $k,l\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G^2$ თვის. A_{44} -თვის გვექნება

$$\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)A_{44} = \int_{I_l}\int_{I_k}\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\sum_{\beta=1}^{M_l-1} f\left(x-z_\alpha^{(k)}-s-e_k, y-z_\beta^{(l)}-t\right)$$

$$\times D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{m'}\left(z_\beta^{(l)}\right)\psi_{M_l}^{b_l}(t)d\mu(s)d\mu(t),$$

$$\psi_{M_l}^{-b_l}(e_l)A_{44} = \int_{I_l}\int_{I_k}\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\sum_{\beta=1}^{M_l-1} f\left(x-z_\alpha^{(k)}-s, y-z_\beta^{(l)}-t-e_l\right)$$

$$\times D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{m'}\left(z_\beta^{(l)}\right)\psi_{M_l}^{b_l}(t)d\mu(s)d\mu(t),$$

$$\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\psi_{M_l}^{-b_l}(e_l)A_{44}=\int_{I_l}\int_{I_k}\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\sum_{\beta=1}^{M_l-1}f\left(x-z_\alpha^{(k)}-s-e_k,y-z_\beta^{(l)}-t-e_l\right)$$

$$\times D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{m'}\left(z_\beta^{(l)}\right)\psi_{M_l}^{b_l}(t)d\mu(s)d\mu(t).$$

მივიღებთ

$$\left|A_{44}-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)A_{44}-\psi_{M_l}^{-b_l}(e_l)A_{44}+\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\psi_{M_l}^{-b_l}(e_l)A_{44}\right|$$

$$=\left|1-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\right|\left|1-\psi_{M_l}^{-b_l}(e_l)\right|\left|A_{44}\right|$$

$$\leq\left|1-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\right|\left|1-\psi_{M_l}^{-b_l}(e_l)\right|$$

$$\times(p+1)^2M_kM_l\int_{I_l}\int_{I_k}\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\sum_{\beta=1}^{M_l-1}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}$$

$$\times\left|\Delta_{k,l}^{(1,2)}f\left(x-z_\alpha^{(k)}-s,y-z_\beta^{(l)}-t\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)\psi_{M_l}^{b_l}(t)\right|d\mu(s)d\mu(t)$$

$$\leq(p+1)^2M_kM_l\frac{c}{M_k}\frac{1}{M_l}o(1)=o(1)$$

როცა $k,l\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G^2$ თვის. მივიღებთ

$$A_4=o(1)$$

როცა $k,l\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G^2$ თვის. ეს ასრულებს თეორემის მტკიცებას.

თეორემა 2-ის დამტკიცება. საკმარისია, რომ სრულდება თეორემა 1-ის პირობები. ვთქვათ $\theta(M_k)$ და $\eta(M_l)$ არის ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობები, რომლებიც დამოკიდებულია M_k და M_l -ზე შესაბამისად. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\left|\Delta_k^{(1)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y\right)\right|$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{\theta(M_k)}\frac{1}{\alpha}\left|\Delta_k^{(1)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y\right)\right|+\sum_{\alpha=\theta(M_k)+1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\left|\Delta_k^{(1)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y\right)\right|$$

$$\leq\omega_1\left(f,\frac{1}{M_k}\right)\log\theta(M_k)+\frac{c}{\theta(M_k)+1}.$$

შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია ავირჩიოთ $\theta(M_k)$ ისე, რომ ბოლო უტოლობის ორივე წევრი მიისწრაფვის 0-კენ როცა $k\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G^2$ თვის. ანალოგიურად მივიღებთ

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{\beta=1}^{M_l-1}\frac{1}{\beta}\left|\Delta_l^{(2)}f\left(x,y-z_\beta^{(l)}\right)\right|=0$$

როცა $l\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G^2$ თვის. დავწეროთ

$$\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\sum_{\beta=1}^{M_l-1}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}\left|\Delta_{k,l}^{(1,2)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y-z_\beta^{(l)}\right)\right|$$

$$=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{l-1}\sum_{\alpha=M_s}^{M_{s+1}-1}\sum_{\beta=M_r}^{M_{r+1}-1}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}\left|\Delta_{k,l}^{(1,2)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y-z_\beta^{(l)}\right)\right|$$

$$\leq\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{1}{M_s}\frac{1}{M_r}\left(\sum_{\alpha=M_s}^{M_{s+1}-1}\sum_{\beta=M_r}^{M_{r+1}-1}\left|\Delta_{k,l}^{(1,2)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y-z_\beta^{(l)}\right)\right|\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\sum_{\alpha=M_s}^{M_{s+1}-1}\sum_{\beta=M_r}^{M_{r+1}-1}\left|\Delta_{k,l}^{(1,2)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y-z_\beta^{(l)}\right)\right|\right)^{\frac{1}{2}}=B.$$

მივიღებთ

$$\sum_{\alpha=M_s}^{M_{s+1}-1}\sum_{\beta=M_r}^{M_{r+1}-1}\left|\Delta_{k,l}^{(1,2)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y-z_\beta^{(l)}\right)\right|$$

$$\leq pM_r\sup_y\sum_{\alpha=M_s}^{M_{s+1}-1}\left|\Delta_{k,l}^{(1,2)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y-z_\beta^{(l)}\right)\right|$$

$$\sum_{\alpha=M_s}^{M_{s+1}-1}\sum_{\beta=M_r}^{M_{r+1}-1}\left|\Delta_{k,l}^{(1,2)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y-z_\beta^{(l)}\right)\right|$$

$$\leq pM_s\sup_x\sum_{\alpha=M_r}^{M_{r+1}-1}\left|\Delta_{k,l}^{(1,2)}f\left(x-z_\alpha^{(k)},y-z_\beta^{(l)}\right)\right|.$$

აქედან გამომდინარე გვექნება

$$B\leq p\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{l-1}\frac{1}{(M_s)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(M_r)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times \sup_x \left(\sum_{\alpha=M_r}^{M_{r+1}-1} \left| \Delta_{k,l}^{(1,2)} f\left(x - z_\alpha^{(k)}, y - z_\beta^{(l)}\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \sup_y \left(\sum_{\alpha=M_s}^{M_{s+1}-1} \left| \Delta_{k,l}^{(1,2)} f\left(x - z_\alpha^{(k)}, y - z_\beta^{(l)}\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2p \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{(M_s)^{\frac{1}{2}}} \sup_y \left(\sum_{\alpha=M_s}^{M_{s+1}-1} \left| \Delta_{k,l}^{(1,2)} f\left(x - z_\alpha^{(k)}, y - z_\beta^{(l)}\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \sum_{r=0}^{l-1} \frac{1}{(M_r)^{\frac{1}{2}}} \sup_x \left(\sum_{\alpha=M_r}^{M_{r+1}-1} \left| \Delta_{k,l}^{(1,2)} f\left(x - z_\alpha^{(k)}, y - z_\beta^{(l)}\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2p \left(\sum_{s=0}^{\theta(k)-1} + \sum_{s=\theta(k)}^{k-1} \right) \left(\frac{1}{(M_s)^{\frac{1}{2}}} \sup_y \left(\sum_{\alpha=M_s}^{M_{s+1}-1} \left| \Delta_{k,l}^{(1,2)} f\left(x - z_\alpha^{(k)}, y - z_\beta^{(l)}\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\times \left(\sum_{r=0}^{\eta(l)-1} + \sum_{r=\eta(l)}^{l-1} \right) \left(\frac{1}{(M_r)^{\frac{1}{2}}} \sup_x \left(\sum_{\alpha=M_r}^{M_{r+1}-1} \left| \Delta_{k,l}^{(1,2)} f\left(x - z_\alpha^{(k)}, y - z_\beta^{(l)}\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\leq \left(p^2 \sqrt[2]{\omega_{1,2}\left(f, \frac{1}{M_k} \times \frac{1}{M_l}\right)} \theta(k) + \frac{c}{\left(M_{\theta(k)}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\times \left(p^2 \sqrt[2]{\omega_{1,2}\left(f, \frac{1}{M_k} \times \frac{1}{M_l}\right)} \theta(l) + \frac{c}{\left(M_{\theta(l)}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

რადგანაც ჩვენ შეგვიძლია ავარჩიოთ $\theta(k)$ და $\eta(l)$ ისე, რომ

$$\lim_{l,k\to\infty} \sum_{\alpha=1}^{M_k-1} \sum_{\beta=1}^{M_l-1} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta} \left| \Delta_{k,l}^{(1,2)} f\left(x - z_\alpha^{(k)}, y - z_\beta^{(l)}\right) \right| = 0$$

როცა $k, l \to \infty$ თანაბრად $(x, y) \in G^2$ თვის, ეს ასრულებს თეორემის მტკიცებას.

2.5. გამოყენებული ლიტერატურა

1. G. N. Agaev, N.Ya. Vilenkin, G.M. Dzhafarli and A.I. Rubinshtejn, Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups (Ehlm, Baku, 1981).

2. T. Akhobadze, "A generalization of bounded variation", Acta Math. Hungar, 97 (3), 223–256, 2002.

3. T. Akhobadze, "Generalized bounded variation of functions of multiple variables and convergence of Fourier series", Bull. Georgian Acad. Sci., 171 (1), 14–16, 2005.

4. Z. A. Chanturia, "The modulus of variation of a function and its application in the theory of Fourier series", Soviet. Math. Dokl., 15, 67-71, 1974.

5. U. Goginava, "On the uniform convergence of multiple trigonometric Fourier series", East J. Approx., 5 (3),253–266, 1999.

6. U. Goginava, "On the uniform convergence of Walsh-Fourier series", Acta Math. Hungar., 93 (1-2), 59–70, 2001.

7. U. Goginava, "Uniform convergence of Cesaro means of negative order of double Walsh-Fourier series ` ", J. Approx. Theory, 124 (1), 96–108, 2003.

8. U. Goginava and A. Sahakian, "On the Convergence and Summability of double Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 49 (6), 321-333, 2014.

9. U. Goginava and A. Sahakian, "On the convergence of multiple Fourier series of functions of bounded partial generalized variation", Anal. Math., 39 (1), 45–56, 2013.

10. U. Goginava and A. Sahakian, "On the convergence of multiple Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation", Journal of Contemporary Mathematical Analysis 47 (5), 221-233, 2012.

11. U. Goginava and A. Sahakian, "Convergence of double Fourier series and generalized Lambda -variation", Georgian Math. J., 19 (3), 497-509, 2012.

12. B. I. Golubov, "The convergence of the double Fourier series of functions of bounded generalized variation I", Sibirsk. Mat. Z., ˇ 15 (460), 262–291, 1974.

13. B. I. Golubov, "The convergence of the double Fourier series of functions of bounded generalized variation II", Sibirsk. Mat. Z., ˇ 15 (957), 767–783, 1974.

14. G. H. Hardy, "On double Fourier series and especially which represent the double zeta function with real and incommensurable parameters", Quart. J. Math. Oxford Ser., 37, 53-79, 1906.

15. C. Jordan, "Sur la series de Fourier", C.R. Acad. Sci. Paris, 92, 228-230, 1881.

16. H. Kita and K. Yoneda, "A generalization of bounded variation", Acta Math. Hungar., 56 (3-4), 229–238, 1990.

17. J. Marcinkiewicz, "On a class of functions and their Fourier series", Compt. Rend. Soc. Sci. Warsowie, 26, 71-77, 1934.

18. F. Moricz, "On the uniform convergenve and L1-convergence of double Walsh-Fourier series", Stud. Math., 102, 225-237, 1992.

19. C. W. Onneweer and D. Waterman, "Uniform convergence of Fourier series on groups", I, Michigan Math. J., 18, 265-273, 1971.

20. F. Schipp, W. Wade, P. Simon,P. Pal, ´ Walsh Series, an Introduction to Dyadic Harmonic Analysis (Adam Hilger, Bristol, New York, 1990).

21. N. Wiener N, "The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients", Massachusetts J. Math., 3, 72-94, 1924.

22. D. Waterman, "On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation", Studia Math., 44 (1), 107-117, 1972.

თავი III: განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასები და ორმაგი ფურიე-ვილენკინის მწკრივების წერტილოვანი კრებადობა

3.1. განსაზღვრებები, აღნიშვნები, დამხმარე თეორემები

დირიხლეს გულისათვის სამართლიანია შემდეგი გაშლა: (იხ [32])

$$D_n(x) = \psi_n(x) \sum_{j=0}^{\infty} D_{M_j}(x) \sum_{a=m_j-n_j}^{m_j-1} r_j^a(x).$$

დავუშვათ, რომ

$$Z_\alpha^{(k)} := (0,\ldots,0,x_r \neq 0, x_{r+1},\ldots,x_k,0,\ldots)$$

მაშინ მარტივია შევამოწმოთ, რომ

(1) $$\left|D_n(Z_\alpha^{(k)})\right| \leq \sum_{j=0}^{r-1} M_{j+1} \leq cM_r,$$

მეორე მხრივ

(2) $$\alpha = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \frac{x_j}{M_{j+1}}\right) M_k \leq \frac{cM_k}{M_r}.$$

(1)და (2)-დან ჩვენ მივიღებთ, რომ

(3) $$\left|D_n(Z_\alpha^{(k)})\right| \leq \frac{cM_k}{\alpha}.$$

დავუშვათ

$$\Pi_x := \left\{\left(x(\alpha), x'(\alpha)\right) : x(\alpha), x'(\alpha) \in I_k + Z_\alpha^{(k)}, \alpha = 0,\ldots,M_k - 1\right\},$$

$$\Pi_y := \left\{\left(y(\beta), y'(\beta)\right) : y(\beta), y'(\beta) \in I_r + Z_\beta^{(r)}, \beta = 0,\ldots,M_r - 1\right\}$$

და

$$\Pi_{xy} := \left\{\left(x(\alpha), x'(\alpha), y(\beta), y'(\beta)\right) \in \left(I_k + Z_\alpha^{(k)}\right) \times \left(I_r + Z_\beta^{(r)}\right),\right.$$

$$\left.\alpha = 0,\ldots,M_k - 1, \beta = 0,\ldots,M_r - 1\right\}.$$

განვსაზღვროთ

$$\Lambda O_1\left(f;G_m^2\right)=\sup_y\sup_k\sup_{\Pi_x}\sum_{\alpha=0}^{M_k-1}\frac{\left|f\left(x(\alpha),y\right)-f\left(x'(\alpha),y\right)\right|}{\lambda_\alpha}$$

$$\Lambda O_2\left(f;G_m^2\right)=\sup_x\sup_r\sup_{\Pi_y}\sum_{\beta=0}^{M_r-1}\frac{\left|f\left(x,y(\beta)\right)-f\left(x,y'(\beta)\right)\right|}{\lambda_\beta}$$

და

$$\Lambda O_{1,2}\left(f;G_m^2\right)=\sup_{k,r}\sup_{\Pi_{xy}}\sum_{\alpha=0}^{M_k-1}\sum_{\beta=0}^{M_r-1}$$

$$\frac{\left|f\left(x(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x'(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x(\alpha),y'(\beta)\right)+f\left(x'(\alpha),y'(\beta)\right)\right|}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}$$

განსაზღვრება 1. ჩვენ ვიტყვით f არის Λ -სასრული ოსილაციის $\left(f\in\Lambda BO\left(G_m^2\right)\right)$ თუ

(4) $$\Lambda O_1\left(f;G_m^2\right)<\infty,$$

(5) $$\Lambda O_2\left(f;G_m^2\right)<\infty,$$

და

(6) $$\Lambda O_{1,2}\left(f;G_m^2\right)<\infty.$$

ვთქვათ

$$\Lambda BO\left(f,G_m^2\right):=\Lambda O_1\left(f;G_m^2\right)+\Lambda O_2\left(f;G_m^2\right)+\Lambda O_{1,2}\left(f;G_m^2\right).$$

ლემა 1. ვთქვათ $M_k\le n<M_{k+1}$. მაშინ

$$|\hat{f}(n)|\le c\omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right).$$

დამტკიცება. რადგან $\psi_n(x-y)=\psi_n(x)\bar{\psi}_n(y)$

ჩვენ გვექნება

$$\int_{G_m} f\left(t-e_k\right)\psi_n(t)d\mu(t)$$

$$=\hat{f}(n)\bar{\psi}_n\left(e_k\right).$$

აქედან გამომდინარე

$$\left|1-\bar{\psi}_n(e_k)\right||\hat{f}(n)|$$

$$\leq\int_{G_m}\left|f(t)-f\left(t-e_k\right)\right|d\mu(t)$$

$$\leq c\omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right).$$

ადვილი სანახავია, რომ

$$\left|1-\bar{\psi}_n\left(e_k\right)\right|$$

$$=\left|1-\cos\left(\frac{2\pi n_k}{m_k}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi n_k}{m_k}\right)\right|$$

$$=\sqrt{\left(1-\cos\left(\frac{2\pi n_k}{m_k}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{2\pi n_k}{m_k}\right)}$$

$$=\sqrt{2-2\cos\left(\frac{2\pi n_k}{m_k}\right)}$$

$$=\sqrt{4\sin^2\left(\frac{2\pi n_k}{m_k}\right)}$$

$$=2\left|\sin\left(\frac{2\pi n_k}{m_k}\right)\right|\geq c>0.$$

აქედან გამომდინარე,

$$|\hat{f}(n)|\leq c\omega\left(f,\frac{1}{M_k}\right).$$

ვთქვათ, $f \in B(G_m)$. მაშინ განვსაზღვროთ

$$\Lambda O(f, M_k) = \sup_{\Pi_x} \sum_{\alpha=0}^{M_k-1} \frac{\left| f(x(\alpha)) - f(x'(\alpha)) \right|}{\lambda_\alpha}$$

ლემა 2.

$$|\hat{f}(n)| \le \frac{c\{j\} O(f, M_k)}{\log M_k}, \quad M_k \le n < M_{k+1}.$$

დამტკიცება.

ვთქვათ

$$Z_\alpha^{(k)} := (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, 0, \dots),$$

სადაც

$$\alpha = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_j}{M_{j+1}} \right) M_k.$$

მარტივია დავინახოთ, რომ

$$G_m = \bigcup_{\alpha=0}^{M_k-1} \left(I_k + Z_\alpha^{(k)} \right).$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$|\hat{f}(n)| \le c \int_{G_m} \left| f(t) - f(t - e_k) \right| d\mu(t)$$

$$= c \sum_{\alpha=0}^{M_k-1} \int_{I_k + Z_\alpha^{(k)}} \left| f(t) - f(t - e_k) \right| d\mu(t)$$

$$= c \int_{I_k} \sum_{\alpha=0}^{M_k-1} \left| f\left(t - Z_\alpha^{(k)}\right) - f\left(t - Z_\alpha^{(k)} - e_k\right) \right| d\mu(t).$$

აღვნიშნოთ

$$\Delta_k(\alpha) := \left| f\left(t - Z_\alpha^{(k)}\right) - f\left(t - Z_\alpha^{(k)} - e_k\right) \right|.$$

რადგანაც $f \in \Lambda BO$ გვექნება

$$\frac{\Delta_k(0)}{\lambda_1} + \frac{\Delta_k(1)}{\lambda_2} + \cdots + \frac{\Delta_k(M_k - 1)}{\lambda_{M_k}} \le \Lambda O(f, M_k),$$

$$\frac{\Delta_k(0)}{\lambda_2} + \frac{\Delta_k(1)}{\lambda_3} + \cdots + \frac{\Delta_k(M_k - 1)}{\lambda_1} \le \Lambda O(f, M_k),$$

$$\ldots$$

$$\frac{\Delta_k(0)}{\lambda_{M_k}} + \frac{\Delta_k(1)}{\lambda_1} + \ldots + \frac{\Delta_k(M_k - 1)}{\lambda_{M_k - 1}} \le \Lambda O(f, M_k)$$

მივიღებთ

$$\Delta_k(0)\left(\sum_{\alpha=0}^{M_k-1} \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) + \Delta_k(1)\left(\sum_{\alpha=0}^{M_k-1} \frac{1}{\lambda_\alpha}\right)$$

$$+ \cdots + \Delta_k(M_k - 1) \sum_{\alpha=0}^{M_k-1} \frac{1}{\lambda_\alpha} \le M_k \Lambda O(f, M_k).$$

აქედან გამომდინარე

$$\sum_{\alpha=0}^{M_k-1} \left|\Delta_k(\alpha)\right| \le \frac{M_k}{\sum_{\alpha=1}^{M_k} \frac{1}{\lambda_\alpha}} \Lambda O(f, M_k).$$

$\lambda_\alpha = \alpha + 1$-თვის ჩვენ გვაქვს $\left(f \in \{j\}BO\left(G_m^2\right)\right)$

$$|\hat{f}(n)| \le \frac{c}{M_k} \frac{M_k}{\sum_{\alpha=1}^{M_k} \frac{1}{\alpha}} \{j\}O(f, M_k)$$

$$= \frac{c\{j\}O(f, M_k)}{\log M_k}$$

შემდეგი შეფასება იქნა დამტკიცებული შემდეგ შრომაში [37]

ლემა 3. ვთქვათ $M_{k-1} \le n < M_k$. მაშინ

$$\left|S_n\left(f,x\right)\right|\le c\|f\|_\infty$$

$$+cM_k\int_{I_k}\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\left|f\left(x-Z_\alpha^{(k)}-s\right)\right.$$

$$\left.-f\left(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k\right)\right|d\mu(s).$$

ვიტყვით, რომ $f(x,y)$ არის უწყვეტი $(x,y)\in G_m^2$ თუ

$$\lim_{h,\delta\to 0} f(x+h,y+\delta)=f(x,y).$$

აღვნიშნოთ $C\left(G_m^2\right)$ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე $f:G_m^2\to R$ განსაზღვრული სუპრემალური ნორმით (იხ [35]).

კრებადობის კუთხით არსებობს ორი მნიშვნელოვანი მიდგომა. დახასიათება უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში და სხვადასხვა ტიპის სასრული ვარიაციის ტერმინებში.

პირველი მიდგომა გამოყენებულია შემდეგ შრომებში: შავარდენიძე[37] და ასევე ტეფნაძე [30]-[31],[39]-[40].

რაც შეეხება სასრული ვარიაციიის ფუნქციათა კლასებს ის პირველად განხილულია ცნობილ დირიხლე-ჟორდანის თეორემაში. [27] ის ამბობს, რომ $f(x)$ სასრული ვარიაციის ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია $\left[f\left(x+0\right)+f\left(x-0\right)\right]/2$ ყოველი $x\in T$ -თვის. თუ დამატებით f არის უწყვეტი T -ზე, მაშინ თანაბრად კრებადობას აქვს ადგილი. ერთ განზომილებიან შემთხვევაში ამ მიმართულებით შემდეგი შრომები გამოქვეყნდა კიდევ უფრო ზოგად კლასებზე. მაგალითისთვის (იხ. [1],[5],[7],[28]-[29],[38],[41]-[44])

ჰარდმა[27] განაზოგადა დირიხლე-ჟორდანის თეორემა ორ განზომილებიანი შემთხვევისათვის. მან დაამტკიცა, რომ თუ ფუნქცია $f(x,y)$ არის სასრული ვარიაციის ჰარდის აზრით ($f\in BV$) მაშინ $S\left[f\right]$ არის კრებადი $\frac{1}{4}\sum f\left(x\pm 0,y\pm 0\right)$-კენ

ნებბისმიერ $\left(x,y\right)$ წერტილში. თუ დამატებით f არის უწყვეტი T^2-ზე, მაშინ თანაბრად კრებადობას აქვს ადგილი. ამ თეორემის არსებითი გაუმჯობესება მოახდინა გოგინავამ [11] როცა შერეული ვარიაციის სასრულობის გარეშე დაამტკიცა იგივე თეორემა რაც ჰარდმა. ორ განზომილებიან შემთხვევაში ასევე მნიშვნელოვანია შემდეგი შედეგები [6],[10].

თეორემა (სააკიანი [35]) $f(x,y)\in HBV$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ყოველ (x,y) წერტილში არის კრებადი $\frac{1}{4}\sum f(x\pm 0, y\pm 0)$ სადაც აღნიშნული ზღვრები არსებობენ.

ყველა K კონპაქტზე სადაც f არის უწყვეტი ეს კრებადობა არის თანაბარი.

თეორემა (სააკიანი) ანალოგი მაღალ განზომილებიან შემთხვევაში დამტკიცებული იყო [3] და [33]. სასრული Λ -ვარიაციის მქონე ფუნქსიის ორმაგი ფურიეს მწკრივების სფერული და სხვა ტიპის კერძო ჯამები დეტალურად იყო გამოკვლეული დიაჩენკოს მიერ (იხ.[8]-[9])

d-განზომილებიანი განზოგადოებული სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციების ფურიეს მწკრივები იქნა შესწავლილი [2],[4],[34].

ცალკე უნდა აღინიშნოს გოგინავასა და სააკიანის წვლილი ამ საკითხების შესწავლაში. მათ დამოუკიდებლად და ერთად ოცამდე შრომა გამოაქვეყნეს. (იხ. [11]-[25], [35])

განსაზღვრება. ჩვენ ვიტყვით, რომ შემოსაზღვრული, ზომადი f არის კერძო სასრული Λ - ოსილაციის $\left(f\in P\Lambda BO\left(G_m^2\right)\right)$ თუ შემდეგი ორი პირობა სრულდება

(29) $$\Lambda O_1\left(f;G_m^2\right)<\infty,$$

(30) $$\Lambda O_2\left(f;G_m^2\right)<\infty.$$

განსაზღვრება. ვთქვათ Φ არის მკაცრად ზრდადი, უწყვეტი ფუნქცია $[0,+\infty)$ -ზე ისეთი, რომ $\Phi(0)=0$. ჩვენ ვიტყვით, რომ f არის კერძო სასრული Φ ოსილაციის მქონე G_m^2-ზე და დავწერთ $f\in PBO_\Phi\left(G_m^2\right)$. თუ

$$PO_\Phi^{(1)}(f)=\sup_y\sup_k\sup_{\Pi_x}\sum_{\alpha=0}^{M_k-1}\Phi\left(\left|f\left(x(\alpha),y\right)-f\left(x'(\alpha),y\right)\right|\right)<\infty$$

$$PO_\Phi^{(2)}(f)=\sup_x\sup_r\sup_{\Pi_y}\sum_{\beta=0}^{M_r-1}\Phi\left(\left|f\left(x,y(\beta)\right)-f\left(x,y'(\beta)\right)\right|\right)<\infty.$$

განსაზღვრება(იხ [11]). f ფუნქციის ვარიაციის კერძო მოდულები არიან ფუნქციები

$v_1(n,f)$ და $v_2(m,f)$, რომლებიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$v_1(M_k,f)=\sup_y \sup_k \sup_{\Pi_x} \sum_{\alpha=0}^{M_k-1} \left| f\left(x(\alpha),y\right)-f\left(x^{'}(\alpha),y\right)\right|$$

და

$$v_2(M_r,f)=\sup_x \sup_r \sup_{\Pi_y} \sum_{\beta=0}^{M_r-1} \left| f\left(x,y(\beta)\right)-f\left(x,y^{'}(\beta)\right)\right|.$$

ერთ ცვლადიანი ფუნქციებისთვის ვარიაციის მოდულის ცნება იყო შემოღებული ჭანტურიას მიერ [7].

3.2. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

თეორემა 1(მართკუთხოვანი კერძო ჯამების ლოკალიზაციის პრინციპი). ვთქვათ, $f \in \{n\} BO\left(G_m^2\right)$ და $L \in N$. მაშინ

$$S_{n,p}\left(f; x, y\right) = \int_{I_L(x)\times I_L(y)} f(x-s, y-t) D_n(s) D_p(t) d\mu(s) d\mu(t) + o\left(1\right)$$

როცა $\min\left(n, p\right) \to \infty$ თანაბრად $(x, y) \in G_m^2$.

თეორემა 2.

ვთქვათ $f \in \{n\} BO\left(G_m^2\right)$. მაშინ ორმაგი ვილენკინ-ფურიეს მწკრივები კრებადია $f(x, y)$ -კენ, თუ f არის უწყვეტი (x, y) -ზე.

თეორემა 3. ვთქვათ $f \in P\{n\} BO\left(G_m^2\right)$ არის ზომადი ფუნქცია. მაშინ ორმაგი ვილინკინ-ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x, y)$ -კენ, თუ f არის უწყვეტი (x, y) წერტილში.

რომ დავამტკიცოთ თეორემა 3 საჭიროა შემდეგი ჩადგმის თეორემის დამტკიცება.

თეორემა 4. ვთქვათ $\Lambda = \left\{\lambda_n = n\gamma_n\right\}$ და $\gamma_n \ge \gamma_{n+1} > 0, n = 1, 2, \ldots$. თუ

(31) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} < \infty$$

მაშინ

$$P\Lambda BO\left(G_m^2\right) \subset \Lambda BO\left(G_m^2\right).$$

შედეგი 1. ვთქვათ Φ და Ψ არის იუნგის აზრით შეუღლებული ფუნქციები $\left(ab \le \Phi(a)+\Psi(b)\right)$ და

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Psi\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)<\infty. \tag{32}$$

მაშინ $PBO_{\Phi}\left(G_m^2\right)\subset P\Lambda BO\left(G_m^2\right)$. მართლაც, შემდეგი უტოლობიდან

$$\frac{a}{\lambda}\le \Phi(a)+\Psi(\frac{1}{\lambda})$$

გამომდინარეობს, რომ $PBO_{\Phi}(G_m^2)\subset P\Lambda BO(G_m^2)$ თუ გავითვალისწინებთ (32)-ს.

თეორემა 5. თუ $f\in B\left(G_m^2\right)$ არის შემოსაზღვრული G_m^2 და

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\sqrt{v_j\left(M_\alpha, f\right)}}{\sqrt{M_\alpha}}<\infty,\ j=1,2,$$

მაშინ $f\in\{n\}BO\left(G_m^2\right)$.

ზემოთ მოყვანილი თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემების სამართლიანობა.

თეორემა 6. ვთქვათ, $f\in P\Lambda BO\left(G_m^2\right)$ და

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j}{j^2}<\infty, \frac{\lambda_j}{j}\downarrow 0.$$

მაშინ ორმაგი ვილენკინ-ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x,y)$-კენ თუ f არის უწყვეტი (x,y) -ში.

თეორემა 7. ვთქვათ, $f\in B$ და

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\sqrt{v_j\left(M_\alpha, f\right)}}{\sqrt{M_\alpha}}<\infty,\ j=1,2,$$

მაშინ ორმაგი ვილენკინ-ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x,y)$-კენ თუ f არის უწყვეტი (x,y) -ში.

შედეგი 2. ვთქვათ, $f \in B$ და $v_1(k,f)=O\left(k^{\alpha}\right), v_2(k,f)=O\left(k^{\beta}\right), 0<\alpha,\beta<1.$ მაშინ ორმაგი ვილენკინ-ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x,y)$ -კენ თუ f არის უწყვეტი (x,y) -ში.

თეორემა 8. ვთქვათ, $f \in PBO_p, p \geq 1$. მაშინ ორმაგი ვილენკინ-ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x,y)$ -კენ თუ f არის უწყვეტი (x,y) -ში.

თეორემა 9. ვთქვათ, $f \in P\left\{\frac{n}{\log^{1+\delta} n}\right\} BO\left(G_m^2\right)$. მაშინ ორმაგი ვილენკინ-ფურიეს მწკრივი კრებადია $f(x,y)$ -კენ თუ f არის უწყვეტი (x,y) -ში.

3.3. ძირითადი შედეგების დამტკიცება

თეორემა 1-ის დამტკიცება.

(7)
$$S_{n,p}(f;x,y)$$
$$=\left(\int_{I_L(x)\times I_L(y)}+\int_{I_L(x)\times \bar{I}_L(y)}+\int_{\bar{I}_L(x)\times I_L(y)}+\int_{\bar{I}_L(x)\times \bar{I}_L(y)}\right)$$
$$\left(f(s,t)D_n(x-s)D_p(y-t)d\mu(s)d\mu(t)\right)$$
$$=A_1+A_2+A_3+A_4.$$

ვთქვათ

$$g_{xy}(s,t)$$
$$=f(x-s,y-t)\sum_{i=0}^{L-1}D_{M_i}(s)\sum_{a=m_i-n_i}^{m_i-1}r_i^a(s)$$
$$\times\sum_{j=0}^{L-1}D_{M_j}(t)\sum_{b=m_j-p_j}^{m_j-1}r_j^b(t)1_{\bar{I}_L\times\bar{I}_L}(s,t),$$

სადაც 1_E არის $E\subset G_m^2$ სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია. მაშინ გვექნება

(8)
$$A_4=\int_{\bar{I}_L\times\bar{I}_L}f(x-s,y-t)\psi_n(s)\left(\sum_{i=0}^{L-1}D_{M_i}(s)\sum_{a=m_i-n_i}^{m_i-1}r_i^a(s)\right)$$
$$\times\psi_p(t)\left(\sum_{j=0}^{L-1}D_{M_j}(t)\sum_{b=m_j-p_j}^{m_j-1}r_j^b(t)\right)d\mu(s)d\mu(t)$$
$$=\hat{g}_{xy}(n,p)$$

რადგან $f \in L\left(G_m^2\right)$,

$$\sum_{i=0}^{L-1} D_{M_i}(s) \sum_{a=m_i-n_i}^{m_i-1} r_i^a(s)$$

და

$$\sum_{j=0}^{L-1} D_{M_j}(t) \sum_{b=m_j-k_j}^{m_j-1} r_j^b(t)$$

არის შემოსაზღვრული

(9) $\hat{g}_{xy}(n,p) \to 0$ როცა $\min(n,p) \to \infty$ თანაბრად $(x,y) \in G_m^2$.

(10)

(8),(9)-დან გამომდინარე $A_4 \to 0$ როცა $\min(m,n) \to \infty$ თანაბრად $(x,y) \in G_m^2$.

ავღნიშნოთ

(11) $$F_y(s,t) = f(s,t) \sum_{j=0}^{L-1} D_{M_j}(y-t) \sum_{b=m_j-p_j}^{m_j-1} r_j^b(y-t).$$

მაშინ A_2-თვის შეგვიძლია დავწეროთ

(12) $$A_2 = \int_{I_L(x) \times \bar{I}_L(y)} f(s,t) D_n(x-s)$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{L-1} D_{M_j}(y-t) \sum_{b=m_j-k_j}^{m_i-1} r_j^b(y-t) \right)$$

$$\times \psi_p(y+t) d\mu(s) d\mu(t)$$

$$= \int_{I_L(x) \times \bar{I}_L(y)} F_y(s,t) D_n(x-s) \psi_p(y-t) d\mu(s) d\mu(t)$$

$$= \int_{\bar{I}_L(y)} \left(\int_{I_L(x)} F_y(s,t) D_n(x-s) d\mu(s) \right) \psi_p(y-t) d\mu(t).$$

ვთქვათ

$$\tilde{\varphi}_{xy}(t) := \left(\int_{I_L(x)} F_y(s,t) D_n(x+s)\, d\mu(s)\right) 1_{\bar{I}_L(y)}(t).$$

მაშინ (12)-დან ჩვენ მივიღებთ, რომ

(13) $$A_2 = \int_{G_m} \tilde{\varphi}_{xy}(t) \psi_p(y-t)\, d\mu(t) = \psi_p(y) \hat{\tilde{\varphi}}_{xy}(p).$$

ვთქვათ $M_r \leq n < M_{r+1}$. მაშინ ლემა 1, ლემა 2 და (11)-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

(14) $$|A_2| \leq \frac{c\{j\} O(\tilde{\varphi}_{xy}, M_r)}{\log M_r}$$

$$\leq \frac{c\{j\} O\left(\varphi_{xy}, M_r\right)}{\log M_r}$$

სადაც

$$\varphi_{xy}(t) := \int_{I_L(x)} F_y(s,t) D_n(x-s)\, d\mu(s).$$

ვთქვათ $G_m = \bigcup_{\beta=0}^{M_r-1} \left(I_r + Z_\beta^{(r)}\right),\ t(\beta), t'(\beta) \in I_r + Z_\beta^{(r)}$

და

$$\varepsilon_\beta := sgn\left(\varphi_{xy}\left(t(\beta)\right) - \varphi_{xy}\left(t'(\beta)\right)\right).$$

მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

(15) $$\sum_{\beta=1}^{M_r-1} \frac{\left|\varphi_{xy}\left(t(\beta)\right) - \varphi_{xy}\left(t'(\beta)\right)\right|}{\beta}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{M_r-1} \frac{\varepsilon_\beta \left(\varphi_{xy}\left(t(\beta)\right) - \varphi_{xy}\left(t'(\beta)\right)\right)}{\beta}$$

$$= \int_{I_L(x)} \sum_{\beta=1}^{M_r-1} \frac{\varepsilon_\beta \left(F_y(s, t(\beta)) - F_y(s, t'(\beta))\right)}{\beta}$$

$$\times D_n(x-s)\, d\mu(s)$$

$$= \int_{G_m} \tilde{\psi}_{xy}(s) D_n(x-s) d\mu(s) = S_n\left(\tilde{\psi}_{xy}, x\right),$$

სადაც

$$\tilde{\psi}_{xy}(s) := \sum_{\beta=1}^{M_r-1} \frac{\varepsilon_\beta\left(F_y(s,t(\beta)) - F_y(s,t^{'}(\beta))\right)}{\beta} 1_{\bar{I}_L(x)}(s).$$

ლემა 3-დან ჩვენ მივიღებთ, რომ

(16)
$$\left|S_n\left(\tilde{\psi}_{xy}, x\right)\right| \le c\left\| \tilde{\psi}_{xy}\right\|_\infty$$

$$+cM_k \int_{I_k} \sum_{\alpha=1}^{M_k-1} \frac{1}{\alpha} \left| \tilde{\psi}_{xy}\left(x - Z_\alpha^{(k)} - s\right)\right.$$

$$\left.-\tilde{\psi}_{xy}\left(x - Z_\alpha^{(k)} - s - e_k\right)\right| d\mu(s)$$

$$\le c\left\|\psi_{xy}\right\|_\infty + cM_k \int_{I_k} \sum_{\alpha=1}^{M_k-1} \frac{1}{\alpha} \left|\psi_{xy}\left(x - Z_\alpha^{(k)} - s\right)\right.$$

$$\left.-\psi_{xy}\left(x - Z_\alpha^{(k)} - s - e_k\right)\right| d\mu(s),$$

სადაც

$$\psi_{xy}(s) := \sum_{\beta=1}^{M_r-1} \frac{\varepsilon_\beta\left(F_y(s,t(\beta)) - F_y(s,t^{'}(\beta))\right)}{\beta}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

(17)
$$\sum_{\alpha=1}^{M_k-1} \frac{1}{\alpha} \left|\psi_{xy}\left(x - Z_\alpha^{(k)} - s\right) - \psi_{xy}\left(x - Z_\alpha^{(k)} - s - e_k\right)\right|$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{M_k-1} \frac{1}{\alpha} \left|\sum_{\beta=1}^{M_r-1} \frac{\varepsilon_\beta\left(F_y(x - Z_\alpha^{(k)} - s, t(\beta)) - F_y(x - Z_\alpha^{(k)} - s, t^{'}(\beta))\right)}{\beta}\right.$$

$$-\sum_{\beta=1}^{M_r-1}\frac{\varepsilon_\beta\left(F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t(\beta))-F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t'(\beta))\right)}{\beta}\Bigg|$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\left|\sum_{\beta=1}^{M_r-1}\frac{\varepsilon_\beta}{\beta}\left(F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t(\beta))-F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t'(\beta))\right.\right.$$

$$\left.\left.-F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t(\beta))+F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t'(\beta))\right)\right|$$

$$\leq\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\sum_{\beta=1}^{M_r-1}\frac{1}{\beta}\left|F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t(\beta))-F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t'(\beta))\right.$$

$$\left.-F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t(\beta))+F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t'(\beta))\right)\right|$$

ავღნიშნოთ

$$h_y(t):=\sum_{j=0}^{L-1}D_{M_j}(y-t)\sum_{b=m_j-p_j}^{m_i-1}r_j^b(y+t).$$

ცხადია, რომ $F_y(s,t)=f(s,t)h_y(t)$

აქედან გამომდინარე

$$F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t(\beta))$$
$$-F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t'(\beta))$$
$$-F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t(\beta))$$
$$+F_y(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t'(\beta))$$
$$=f(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t(\beta))h_y(t(\beta))$$
$$-f(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t'(\beta))h_y(t'(\beta))$$
$$-f(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t(\beta))h_y(t(\beta))$$

$$+f(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t'(\beta))h_y(t'(\beta))$$

$$=\Big[f(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t(\beta))-f(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t'(\beta))$$

$$-f(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t(\beta))+f(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t'(\beta))\Big]$$

$$\times h_y(t(\beta))$$

$$+\Big[f(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t'(\beta))-f(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t'(\beta))\Big]$$

$$\times\big(h_y(t'(\beta))-h_y(t(\beta))\big).$$

მივიღებთ

(18) $$\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\left|\psi_{xy}\left(x-Z_\alpha^{(k)}-s\right)-\psi_{xy}\left(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k\right)\right|$$

$$\le\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\sum_{\beta=1}^{M_r-1}\frac{1}{\beta}\,\Big|f(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t(\beta))-f(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t'(\beta))$$

$$-f(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t(\beta))+f(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t'(\beta))\Big|\times\left|h_y(t(\beta))\right|$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\sum_{\beta=1}^{M_r-1}\frac{1}{\beta}\left|f(x-Z_\alpha^{(k)}-s-e_k,t'(\beta))-f(x-Z_\alpha^{(k)}-s,t'(\beta))\right|$$

$$\times\left|h_y(t'(\beta))-h_y(t(\beta))\right|\le c\Lambda O_{1,2}\left(f,G_m^2\right)+\Lambda O_1\left(f,G_m^2\right)\Lambda O_2\left(h_y,G_m^2\right).$$

თუ შევაჯამებთ (13)-(18) მივიღებთ, რომ

(19) $A_2=o(1)$ როცა $\min(n,p)\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G_m^2$.

ანალოგიურად ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ

(20) $A_3=o(1)$ როცა $\min(n,p)\to\infty$ თანაბრად $(x,y)\in G_m^2$.

(7),(10),(19) და (20)-ის შეერთებით დავასრულებთ თეორემის მტკიცებას.

თუ გავყვებით საკიანის [35] შრომას, თეორემა 2-ის დასამტკიცებლად გვჭირდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა S. ვთქვათ $f \in \{n\}BO(G_m^2)$და f არის უწყვეტი $(x,y) \in G_m^2$.

მაშინ

$$\lim_{L\to\infty}\{n\}BO\left(f;I_L(x)\times I_L(y)\right)=0.$$

თეორემა 2-ის დამტკიცება. თეორემა 1-ის ძალით $(L \in N)$ -თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$S_{n,p}(f;x,y)-f(x,y)$$

$$\int_{I_L(x)\times I_L(y)}(f(s,t)-f(x,y))D_n(x-s)D_p(y-t)d\mu(s)d\mu(t)+o(1)$$

$$=\int_{I_L\times I_L}(f(x-s,y-t)-f(x,y))D_n(s)D_p(t)d\mu(s)d\mu(t)+o(1)$$

როცა $\min\left(p,n\right)\to\infty$ თანაბრად $(x,y) \in G_m^2$-ის მიმართ.

ვთქვათ

$$n=a_kM_k+n^{'},n^{'}<M_k\ \ \left(a_k<m_k\right)$$

და

$$p=b_rM_r+p^{'},p^{'}<M_r\ \ \left(b_r<m_r\right).$$

რადგანაც [32],[36]

(21)
$$D_n(x)=\frac{1-\psi_{M_k}^{a_k}(x)}{1-\psi_{M_k}(x)}D_{M_k}(x)+\psi_{M_k}^{a_k}(x)D_{n'}(x),$$

$$\frac{1-\psi_{M_k}^{a_k}(x)}{1-\psi_{M_k}(x)}=1+\psi_{M_k}(x)+\ldots+\psi_{M_k}^{a_k-1}(x),$$

ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

(22)
$$\int_{I_L\times I_L}(f(x-s,y-t)-f(x,y))D_n(s)D_p(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=\int_{I_L\times I_L}(f(x-s,y-t)-f(x,y))$$

$$\times\left(1+\psi_{M_k}(s)+\ldots+\psi_{M_k}^{a_k-1}(s)\right)D_{M_k}(s)$$

$$\times\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_r}^{b_r-1}(t)\right)D_{M_l}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$+\int_{I_L\times I_L}(f(x-s,y-t)-f(x,y))$$

$$\times\left(1+\psi_{M_l}(t)+\ldots+\psi_{M_r}^{b_r-1}(t)\right)$$

$$\times D_{M_l}(t)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{n'}(s)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$+\int_{I_L\times I_L}(f(x-s,y-t)-f(x,y))$$

$$\times\left(1+\psi_{M_k}(s)+\ldots+\psi_{M_k}^{a_k-1}(s)\right)$$

$$\times D_{M_k}(s)\psi_{M_l}^{b_l}(t)D_{m'}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$+\int_{I_L\times I_L}(f(x-s,y-t)-f(x,y))$$

$$\times\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{n'}(s)\psi_{M_r}^{b_r}(t)D_{p'}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=B_1+B_2+B_3+B_4\,.$$

რადგანაც f უწყვეტია (x,y) წერტილში, მივიღებთ

(23) $$B_1=o(1)\ \text{როცა}\ \min(n,p)\to\infty.$$

B_4 -თვის ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)B_4=\int_{I_L\times I_L}(f(x-s,y-t)-f(x,y))\psi_{M_k}^{a_k}(s)\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)$$

$$\times D_{n'}(s)\psi_{M_r}^{b_r}(t)D_{m'}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=\int_{I_L\times I_L}(f(x-s,y-t)-f(x,y))\psi_{M_k}^{a_k}(s-e_k)$$

$$\times D_{n'}(s)\psi_{M_l}^{b_l}(t)D_{m'}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=\int_{I_L\times I_L}(f(x-s-e_k,y-t)-f(x,y))\psi_{M_k}^{a_k}(s)$$

$$\times D_{n'}(s)\psi_{M_l}^{b_l}(t)D_{m'}(t)d\mu(s)d\mu(t).$$

ანალოგიურად

$$\psi_{M_r}^{b_r}(e_r)B_4=\int_{I_L\times I_L}(f(x-s,y-t-e_r)-f(x,y))\psi_{M_k}^{a_k}(s)$$

$$\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\psi_{M_r}^{b_r}(e_r)B_4=\int_{I_L\times I_L}(f(x-s-e_k,y-t-e_r)-f(x,y))$$

$$\times\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{n'}(s)\psi_{M_l}^{b_l}(t)D_{m'}(t)d\mu(s)d\mu(t).$$

აქედან გამომდინარე

$$B_4-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)B_4-\psi_{M_r}^{b_r}(e_r)B_4+\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\psi_{M_r}^{b_r}(e_r)B_4$$

$$=\left(1-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)-\psi_{M_r}^{b_r}(e_r)+\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\psi_{M_r}^{b_r}(e_r)\right)B_4$$

$$=\left(1-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\right)\left(1-\psi_{M_r}^{b_r}(e_r)\right)B_4$$

$$=\int_{I_L\times I_L}(f(x-s,y-t)-f(x-s-e_k,y-t)$$

$$-f(x-s,y-t-e_r)+f(x-s-e_k,y-t-e_r))$$

$$\times\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{n'}(s)\psi_{M_r}^{b_r}(t)D_{m'}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

ვთქვათ

$$\Delta_k^{(1)}f\left(x,y,s\right):=f(x-s,y)-f(x-s-e_k,y),$$

$$\Delta_r^{(2)}f\left(x,y,t\right):=f(x,y-t)+f(x,y-t-e_r)$$

და

$$\Delta_{k,r}f\left(x,y,s,t\right):=f(x-s,y-t)-f(x-s-e_k,y-t)$$

$$-f(x-s,y-t-e_r)+f(x-s-e_k,y-t-e_r).$$

მაშინ ჩვენ შეგვიცლია დავწეროთ

$$\left(1-\psi_{M_k}^{-a_k}(e_k)\right)\left(1-\psi_{M_r}^{b_r}(e_r)\right)B_4$$

$$=\int_{I_L\times I_L}\Delta_{k,r}f\left(x,y,s,t\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{n'}(s)\psi_{M_r}^{b_r}(t)D_{m'}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{M_k-M_L-1}\sum_{\beta=0}^{M_r-M_L-1}\int_{\left(I_k+Z_\alpha^{(k)}\right)\times\left(I_r+Z_\beta^{(r)}\right)}\Delta_{k,r}f\left(x,y,s,t\right)$$

$$\times\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{n'}(s)\psi_{M_r}^{b_r}(t)D_{m'}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{M_k-M_L-1}\sum_{\beta=0}^{M_r-M_L-1}\int_{I_r}\int_{I_k}\Delta_{k,r}f\left(x,y,s+Z_\alpha^{(k)},t+Z_\beta^{(r)}\right)$$

$$\times D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{m'}\left(z_\beta^{(r)}\right)\psi_{M_r}^{b_r}\left(z_\beta^{(r)}\right)\psi_{M_r}^{b_r}(t)d\mu(s,t)$$

$$=\int_{I_r}\int_{I_k}\Delta_{k,r}f\left(x,y,s+Z_0^{(k)},t+Z_0^{(r)}\right)D_{n'}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{m'}(0)\psi_{M_l}^{b_l}(t)d\mu(s,t)$$

$$+\int_{I_l}\int_{I_k}\sum_{\alpha=1}^{M_k-M_L-1}\Delta_{k,r}f\left(x,y,s+Z_\alpha^{(k)},t+Z_0^{(r)}\right)$$

$$\times D_{m'}(0)\psi_{M_r}^{b_r}(t)D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)d\mu(s,t)$$

$$+\int_{I_l}\int_{I_k}\sum_{\beta=1}^{M_k-M_L-1}\Delta_{k,r}f\left(x,y,s+Z_0^{(k)},t+Z_\beta^{(r)}\right)$$

$$\times D_{n'}(0)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{m'}\left(z_\beta^{(l)}\right)\psi_{M_r}^{b_l}(t)d\mu(s,t)$$

$$+\int_{I_r}\int_{I_k}\sum_{\alpha=1}^{M_k-M_L-1}\sum_{\beta=1}^{M_r-M_L-1}\Delta_{k,r}f\left(x,y,s+Z_\alpha^{(k)},t+Z_\beta^{(r)}\right)$$

$$\times D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\psi_{M_k}^{a_k}(s)D_{m'}\left(z_\beta^{(l)}\right)\psi_{M_r}^{b_r}(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

$$=B_{41}+B_{42}+B_{43}+B_{44}.$$

რადგან

$$\left|D_{n'}(0)\right|\le n'$$

f ფუნქციის (x,y) წერტილში უწყვეტობიდან გვექნება

(24) $\left|B_{41}\right|\le n'm'\int_{I_l}\int_{I_k}\left|\Delta_{k,r}f\left(x,y,s+Z_0^{(k)},t+Z_0^{(r)}\right)\right|d\mu(s,t)\to0$ როცა $\min\left(n,p\right)\to\infty.$

B_{44}-ის შესაფასებლად გამოვიყენოთ (3) უტოლობა და თეორემა S. მივიღებთ

(25)
$$|B_{44}| \le \int_{I_r}\int_{I_k} \sum_{\alpha=1}^{M_k-M_L-1}\sum_{\beta=1}^{M_r-M_L-1} \left|\Delta_{k,r} f\left(x,y,s+Z_\alpha^{(k)},t+Z_\beta^{(r)}\right)\right|$$
$$\times\left|D_{n'}\left(z_\alpha^{(k)}\right)\right|\left|D_{m'}\left(z_\beta^{(r)}\right)\right| d\mu(s)d\mu(t)$$
$$\le cM_kM_r\int_{I_r}\int_{I_k}\sum_{\alpha=1}^{M_k-M_L-1}\sum_{\beta=1}^{Mr-M_L-1}\frac{\left|\Delta_{k,r} f\left(x,y,s+Z_\alpha^{(k)},t+Z_\beta^{(r)}\right)\right|}{\alpha\beta}$$

$\to 0$ როცა $\min(n,p)\to\infty.$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

(26) $$B_{42}+B_{43}\to 0 \text{ როცა } \min(n,p)\to\infty.$$

(24-26) მივიღებთ, რომ

(27) $$B_4\to 0$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

(28) $$B_2, B_3\to 0$$

(23),(27),(28)-ის კომბინირებით მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას.

თეორემა 4-ის დამტკიცება. ვთქვათ $f\in P\Lambda BO\left(G_m^2\right)$. ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sum_{\alpha=0}^{M_k-1}\sum_{\beta=0}^{M_r-1}\frac{\left|f\big(x(\alpha),y(\beta)\big)-f\left(x'(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x(\alpha),y'(\beta)\right)+f\left(x'(\alpha),y'(\beta)\right)\right|}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}$$

$$=\sum_{\alpha\le\beta}\frac{\left|f\big(x(\alpha),y(\beta)\big)-f\left(x'(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x(\alpha),y'(\beta)\right)+f\left(x'(\alpha),y'(\beta)\right)\right|}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}$$

$$+\sum_{\alpha>\beta}\frac{\left|f\big(x(\alpha),y(\beta)\big)-f\left(x'(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x(\alpha),y'(\beta)\right)+f\left(x'(\alpha),y'(\beta)\right)\right|}{\lambda_\alpha\lambda_\beta}$$

$$=I_1+I_2.$$

$$I_1\le\sum_{\alpha=1}^{M_k-1}\frac{1}{\alpha}\sum_{\beta=\alpha}^{M_r-1}\frac{\left|f\big(x(\alpha),y(\beta)\big)-f\left(x'(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x(\alpha),y'(\beta)\right)+f\left(x'(\alpha),y'(\beta)\right)\right|}{\beta}$$

$$\le 2\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\sup_x\sum_{\beta=\alpha}^{\infty}\frac{\left|f\big(x,y(\beta)\big)-f\left(x,y'(\beta)\right)\right|}{\lambda_\beta}\frac{\lambda_\beta}{\beta}$$

$$\le 2\Lambda O_2\left(f;G_m^2\right)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\lambda_\alpha}{\alpha^2}$$

$$\le c\Lambda O_2\left(f;G_m^2\right)<\infty.$$

მსგავსად გვექნება

$$I_2\le cP\Lambda O_1\left(f\right)<\infty.$$

აქედან გამომდინარე

$$f\in\Lambda BO\left(G_m^2\right).$$

თეორემა 5-ის დამტკიცება. ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\sum_{\beta=0}^{M_r-1}\frac{\left|f\left(x,y(\beta)\right)-f\left(x,y'(\beta)\right)\right|}{\beta+1}$$

$$= \sum_{a=1}^{r} \sum_{\beta=M_{a-1}}^{M_a-1} \frac{\left|f(x, y(\beta)) - f\left(x, y'(\beta)\right)\right|}{\beta + 1}$$

$$\leq \sum_{a=1}^{r} \frac{1}{M_{a-1}} \sum_{\beta=0}^{M_a-1} \left| f\left(x, y(\beta)\right) - f\left(x, y'(\beta)\right) \right|$$

$$= \sum_{a=1}^{r} \frac{1}{M_{a-1}} \left(\sum_{\beta=0}^{M_a-1} \left| f\left(x, y(\beta)\right) - f\left(x, y'(\beta)\right) \right| \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\sum_{\beta=0}^{M_a-1} \left| f\left(x, y(\beta)\right) - f\left(x, y'(\beta)\right) \right| \right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{a=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{M_{a-1}}} \left(\sum_{\beta=0}^{M_a-1} \left| f\left(x, y(\beta)\right) - f\left(x, y'(\beta)\right) \right| \right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{a=1}^{r} \frac{v_2(M_a, f)}{\sqrt{M_{a-1}}} \leq c < \infty.$$

აქედან გამომდინარე,

(33) $$\sup_{x \in G_m} \sup_{r} \sum_{\beta=0}^{M_r-1} \frac{\omega_2\left(f, x, I_r + z_\beta^{(r)}\right)}{\beta+1} < \infty$$

ანალოგიურად ჩვენ შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

(34) $$\sup_{y} \sup_{k} \sup_{\Pi_x} \sum_{\alpha=0}^{M_k-1} \frac{\left|f(x(\alpha), y) - f\left(x'(\alpha), y\right)\right|}{\alpha+1} < \infty.$$

გვექნება

$$\sum_{\alpha=0}^{M_k-1} \sum_{\beta=0}^{M_r-1}$$

$$\frac{\left| f\left(x(\alpha), y(\beta)\right) - f\left(x'(\alpha), y(\beta)\right) - f\left(x(\alpha), y'(\beta)\right) + f\left(x'(\alpha), y'(\beta)\right) \right|}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$=\sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{r}\sum_{\alpha=M_{a-1}}^{M_a-1}\sum_{\beta=M_{b-1}}^{M_b-1}$$

$$\frac{\left|f\left(x(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x'(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x(\alpha),y'(\beta)\right)+f\left(x'(\alpha),y'(\beta)\right)\right|}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$\leq\sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{r}\frac{1}{M_a}\frac{1}{M_b}\sum_{\alpha=0}^{M_a-1}\sum_{\beta=0}^{M_b-1}\left|f\left(x(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x'(\alpha),y(\beta)\right)\right.$$

$$\left.-f\left(x(\alpha),y'(\beta)\right)+f\left(x'(\alpha),y'(\beta)\right)\right|$$

რადგან

$$\sum_{\alpha=0}^{M_a-1}\sum_{\beta=0}^{M_b-1}\left|f\left(x(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x'(\alpha),y(\beta)\right)\right.$$

$$\left.-f\left(x(\alpha),y'(\beta)\right)+f\left(x'(\alpha),y'(\beta)\right)\right|$$

$$\leq 2M_a\sup_x\sum_{\beta=0}^{M_b-1}\left|f\left(x,y(\beta)\right)-f\left(x,y'(\beta)\right)\right|$$

და

$$\sum_{\alpha=0}^{M_a-1}\sum_{\beta=0}^{M_b-1}\left|f\left(x(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x'(\alpha),y(\beta)\right)\right.$$

$$\left.-f\left(x(\alpha),y'(\beta)\right)+f\left(x'(\alpha),y'(\beta)\right)\right|$$

$$\leq 2M_b\sup_y\sum_{\beta=0}^{M_b-1}\left|f\left(x(\alpha),y\right)-f\left(x'(\alpha),y\right)\right|$$

ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

(35)$\sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{r}\frac{1}{M_a}\frac{1}{M_b}\sum_{\alpha=0}^{M_a-1}\sum_{\beta=0}^{M_b-1}\left|f\left(x(\alpha),y(\beta)\right)-f\left(x'(\alpha),y(\beta)\right)\right.$

$\left.-f\left(x(\alpha),y'(\beta)\right)+f\left(x'(\alpha),y'(\beta)\right)\right|$

$$= \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=1}^{r} \frac{1}{M_a} \frac{1}{M_b} \left(\sum_{\alpha=0}^{M_a-1} \sum_{\beta=0}^{M_b-1} \Big| f\big(x(\alpha), y(\beta)\big) - f\left(x'(\alpha), y(\beta)\right) \right.$$

$$\left. - f\left(x(\alpha), y'(\beta)\right) + f\left(x'(\alpha), y'(\beta)\right) \Big| \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\sum_{\alpha=0}^{M_a-1} \sum_{\beta=0}^{M_b-1} \Big| f\left(x(\alpha), y(\beta)\right) - f\left(x'(\alpha), y(\beta)\right) \right.$$

$$\left. - f\left(x(\alpha), y'(\beta)\right) + f\left(x'(\alpha), y'(\beta)\right) \Big| \right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=1}^{r} \frac{\sqrt{v_1(M_a, f)}}{\sqrt{M_a}} \frac{\sqrt{v_2(M_b, f)}}{\sqrt{M_b}} < \infty.$$

(33)-(35) შეჯამებით მივიღებთ, რომ $f \in \{n\}BO(G_m^2)$. თეორემა 5 დამტკიცებულია.

3.4. გამოყენებული ლიტერატურა

[1] T. Akhobadze, “A generalization of bounded variation”, Acta Math. Hungar, 97 (3), 223–256, 2002.
[2] T. Akhobadze, “Generalized bounded variation of functions of multiple variables and convergence of Fourier series”, Bull. Georgian Acad. Sci., 171 (1), 14–16, 2005.

[3] A.N. Bakhvalov, Continuity in Λ -variation of functions of several variables and the convergence of multiple Fourier series (Russian), Mat. Sb. 193, 12 (2002), 3-20; English transl.in Sb. Math. 193, 11-12 (2002), 1731-1748

[4] A.N. Bakhvalov, Continuity in Λ -variation and the summation of multiple Fourier series by $Cesa\acute{r}o$ methods (Russian), Mat. Zametki 90, 4 (2011), 483-500; translation in Math. Notes 90, 3-4 (2011),469-484

[5] A. N. Bakhvalov, On the localization of $Cesa'ro$means of Fourier series of functions of bounded Λ -variation (Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 55, 8 (2011), 9-13; translation in Russian Math., (Iz. VUZ), 55, 8 (2011), 7-10

[6] L. Baramidze Uniform Convergence of Double Vilenkin-Fourier Series Journal of Contemporary Mathematical Analysis,2019, Vol. 54, No. 3, pp. 129–138.2019

[7] Z.A. Chanturia, The modulus of variation of a function and its application in the theory of Fourier series, Soviet. Math. Dokl., 15 (1974), 67-71

[8] M.I. Dyachenko, Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series, Anal. Math. 21 (1995), 3-21

[9] M.I. Dyachenko, Two-dimensional Waterman classes and u-convergence of Fourier series (Russian), Mat. Sb., 190, 7 (1999), 23-40; English transl.in Sb. Math., 190, 7-8 (1999), 955-972

[10] M.I. Dyachenko, D. Waterman, Convergence of double Fourier series and W-classes, Trans. Amer. Math. Soc., 357 (2005), 397-407

[11] U. Goginava, On the uniform convergence of multiple trigonometric Fourier series, East J. Approx,5, 3 (1999), 253-266

[12] U. Goginava, On the uniform summability of two-dimensional trigonometric Fourier series, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 124 (2000), 55-72

[13] U. Goginava, Uniform convergence of $Cesa'ro$means of negative order of double Walsh-Fourier series, J. Approx. Theory, 124 (2003), 96-108

[14] U. Goginava, On the summability of double Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation, Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal 64 (4), 490-507 (2012)

[15] U. Goginava, $Cesa'ro$ means of negative order of double Fourier series and generalized bounded variation, Siberian Mathematical Journal, 54, 6 (2013), 1005-1013

[16] U. Goginava. Uniform summability of double Walsh-Fourier series of functions of bounded partial Λ-variation, Mathematica Slovaca 64, 1451-1474

[17] U. Goginava, A. Sahakian, On the convergence of Fourier series of functions of bounded partial generalized variation, East J. Approx., 16, 2 (2010), 153-165

[18] U. Goginava, A. Sahakian, On the convergence of $Cesa'ro$means of negative order of double trigonometric Fourier series of functions of bounded partial generalized variation, Acta. Sci. Math. (Szeged), 77 (2011), 451-471

[19] U. Goginava, A. Sahakian, Convergence of double Fourier series and generalized Λ -variation, Georgian Math. J. 19, 3 (2012), 497-509

[20] U. Goginava and A. Sahakian, On the convergence of multiple Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation, Journal of Contemporary Mathematical Analysis 5, 47 (2012), 221-233.

[21] U. Goginava, A. Sahakian, On the convergence of multiple Fourier series of functions of bounded partial generalized variation, Anal. Math., 39, 1 (2013), 45-56

[22] U. Goginava, A. Sahakian, On the summability of multipleFourier series of functions of bounded partial generalized variation, Proc. Steklov Inst. Math., 280 (2013), 150-161

[23] U. Goginava , A. Sahakian, Convergence and summability of multiple Fourier series and generalized variation. Bull. TICMI 18 (2014), no. 1, 36—54

[24] U. Goginava, A. Sahakian, On the convergence and summability of double Walsh-Fourier series of functions of bounded generalized variation, Journal of Contemporary Mathematical Analysis 48, 6 (2014)

[25] U. Goginava, A. Sahakian, Convergence of Multiple Fourier Series of Functions of Bounded Generalized Variation, Ukrainian Math. J. 67 (2015), no. 2, 186--198.

[26] G.H. Hardy, On double Fourier series and especially which represent the double zeta function with real and incommensurable parameters, Quart. J. Math. Oxford Ser., 37 (1906), 53-79

[27] C. Jordan, Sur la series de Fourier, C.R. Acad. Sci. Paris, 92 (1881), 228-230

[28] H. Kita and K. Yoneda, "A generalization of bounded variation", Acta Math. Hungar., 56 (3-4), 229–238, 1990.

[29] J. Marcinkiewicz, On a class of functions and their Fourier series, Compt. Rend. Soc. Sci. Warsowie, 26 (1934), 71-77

[30]L.-E. Persson, F. Schipp, G. Tephnadze and F. Weisz, An analogy of the Carleson-Hunt theorem with respect to Vilenkin systems, J. Fourier Anal. Appl., 28, 48 (2022), 1-29.

[31]L. E. Persson, G. Tephnadze, P. Wall, On an approximation of 2-dimensional Walsh-Fourier series in the martingale Hardy spaces, Ann. Funct. Anal., 9, 1 (2018), 137-150.

[32]L. E. Persson, G. Tephnadze and F. Weisz, Martingale Hardy Spaces and Summability of one-dimensional Vilenkin-Fourier Series, book manuscript, Birkhäuser/Springer, 2022.

[33] A.I. Sablin, Λ -variation and Fourier series (Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 10 (1987), 66-68; English transl. in Soviet Math., (Iz. VUZ) 31 (1987)

[34] O.G. Sargsyan, On the convergence and the Gibbs phenomenon of multiple Fourier series for functions of bounded harmonic variation (Russian), Izv. Akad. Nauk Armenii Mat., 28, 3 (1993), 3-20, English transl. in J. Contemp. Math. Anal., 28, 3 (1993)

[35] A. Sahakian, On the convergence of double Fourier series of functions of bounded harmonic variation (Russian), Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Mat., 21, 6 (1986), 517-529, English transl. Soviet J. Contemp. Math. Anal., 21, 6 (1986), 1-13

[36] Schipp F., Wade W.R., Simon P and Pal J. Walsh Series, an Introduction to Dyadic

Harmonic Analysis. Adam Hilger, Bristol, New York, 1990.

[37] G. Shavardenidze, On the convergence of Cesàro means of negative order of Vilenkin-Fourier series, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 2019

[38]V. Tevzadze. Uniform convergence of Ces`aro means of negative order of Fourier-Walsh series. Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR, 102(1):33– 36, 1981.

[39]G. Tephnadze, On the partial sums of Walsh-Fourier series, Colloq. Math., 141, 2 (2015), 227-242.

[40]G. Tephnadze, On the convergence of partial sums with respect to Vilenkin system on the martingale Hardy spaces, J. Contemp. Math. Anal., 53, 5, (2018) 294–306.

[41] D. Waterman, On the summability of Fourier series of functions of Λ -variation , Studia

Math., 55 (1976), 87-95

[42] D. Waterman, On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation, Studia Math., 44, 1 (1972), 107-117

[43] N. Wiener, The quadratic variation of a function and its Fourier coe_cients, Massachusetts J. Math, 3 (1924), 72-94

[44] L.V. Zhizhiashvili, Trigonometric Fourier Series and their Conjugates, Kluwer Academic Publishers, Dobrecht, Boston, London, 1996

გამოქვეყნებული ნაშრომები

დისერტაცია დაეყრდნობა შემდეგ გამოქვეყნებულ ნაშრომებს:

1. L. Baramidze, Uniform Convergence of Double Vilenkin-Fourier Series, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2019, Vol. 54, No. 3, pp. 129–138.

2. L. Baramidze, E.Persson, G. Tephnadze, P. Wall, Srtong summability and Boundedness of Maximal operators of Vilenkin-Nörlund means with non-increasing coefficients, J. Inequal. Appl. (2016).

3. L. Baramidze, Pointwise convergence of logarithmic means of Fourier series, Acta Math. Acad. Paed. Nyreg (2016),225–232.

4. L. Baramidze , U. Goginava, Convergence in measure of logarithmic means of double Fourier series, Bulletin of TICMI 41 (2015).