



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,
მათემატიკის დეპარტამენტი

სადოქტორო პროგრამის სახელწოდება: მათემატიკა

გეგა გულაღაშვილი

რიმანის სფეროზე ფუქსის ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა
სისტემისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაციის კომპლექსური
სტრუქტურის დახასიათება

მათემატიკაში დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

გრიგორ გიორგაძე - ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი

თბილისი 2021



Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Faculty of Exact and Natural Sciences

Department of Mathematics

Name of Doctoral Program: Mathematics

Gega Gulagashvili

**Description of the Holomorphic Type of Vector Bundles on the Riemann Sphere,
Induced from Fuchsian System of Differential Equations**

Thesis submitted for the degree of PhD in Mathematics

Scientific adviser:

Grigori Giorgadze - Doctor of Phys.-Math.Sci.

Associated professor

Tbilisi 2021

აბსტრაქტი

ნაშრომი ეძღვნება რეგულარული განსაკუთრებული წერტილების მქონე დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაციის ინვარიანტების გამოთვლასა და მისი საშუალებით დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის გლობალურ ამონახსნა სივრცის დახასიათებას. კერძოდ, რიმანის სფეროზე მოცემული განტოლებათა სისტემა განსაზღვრავს არაკომპაქტური რიმანის ზედაპირის ფუნდამენტური ჯგუფის, ანუ მონოდრომიის, წარმოდგენას. ამ წარმოდგენის საშუალებით იგება ტრივიალური მთავარი ფიბრაცია კომპლექსურ არაკომპაქტურ მრავალსახეობაზე. ფიბრაციის გაგრძელებით სისტემის განსაკუთრებულ წერტილებში, მიიღება არატრივიალური ვექტორული ჰოლომორფული ფიბრაცია დიფერენციალურ-გეომეტრიული მერომორფული ბმულობით, რომლის განსაკუთრებული წერტილები ემთხვევა დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის განშტოების წერტილებს. ფიბრაციის გაგრძელება, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის განსაკუთრებულ წერტილებში, ხდება მერომორფული ბმულობის საშუალებით, ამასთან მიიღება ჰოლომორფულად არაექვივალენტურ ფიბრაციათა ერთობლიობა, რომელთა ჰოლომორფული სტრუქტურის დადგენა მათი გახლეჩვის ტიპის გამოთვლის გზით არის სადისერტაციო ნაშრომის ერთ-ერთი ძირითადი შედეგი.

ნაშრომში გამოკვლეულია განტოლებათა სისტემის ამონახსნის ყოფაქცევა განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში და მისი დამოკიდებულება მიღებული ფიბრაციის ინვარიანტებზე. გამოთვლილია ჰოლომორფული ფიბრაციის გაღწევის ტიპი, რითაც სრულად არის აღწერილი განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაციის კომპლექსური სტრუქტურა. ცალ-ცალკეა განხილული რეგულარულ განტოლებათა სისტემისა და სკალარული განტოლების შემთხვევები, მათი სპეციფიკის გამო, განსაკუთრებულ წერტილთა კლასიფიკაციის თვალსაზრისით. კერძოდ, რეგულარულ განტოლებათა სისტემების კლასი შეიცავს ფუქსის ტიპის

განტოლებათა სისტემების კლასს, ხოლო სკალარული განტოლებებისათვის რეგულარობისა და ფუქსის თვისებები ერთმანეთს ემთხვევა. სადისერტაციო ნაშრომში ცალკეა აგრეთვე გამოყოფილი მეორე რიგის განტოლებათა სისტემები და მეორე რიგის განტოლებები. მეორე რიგის სისტემებზე ყურადღება გამახვილებულია იმის გამო, რომ მათთვის ყოველთვის დადებითადაა ამოხსნადი რიმანის მონოდრომიული ამოცანა.

ნაშრომში დაწვრილებითაა განხილული მერომორფულ კოეფიციენტებიანი, მეორე რიგის, წრფივ განტოლებათა ისეთი სისტემები, რომელთა ამონახსნებიც რეგულარულია. ამ შემთხვევაში, ჰოლომორფული სტრუქტურის დახასიათება მოცემულია ფიბრაციის ჩერნის რიცხვის ტერმინებში, რომელიც ფიბრაციის ტოპოლოგიური ინვარიანტია.

ნაშრომი შედგება შესავლის, ოთხი თავისა და დანართისაგან. შესავალში მოყვანილია დისერტაციაში განხილული ძირითადი ამოცანის მნიშვნელობა და მოტივაცია, მითითებულია, აგრეთვე, მიღებული შედეგების ადგილზე ანალიზურ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების თეორიაში.

აუცილებელი განმარტებები, ფუქსის ტიპის, რეგულარული განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების შესახებ მოყვანილია დისერტაციის პირველ და მეორე თავებში, სადაც შემოტანილია ძირითადი ცნებები და დამტკიცების გარეშეა მოყვანილი სტანდარტული დებულებები, ანალიზურ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიიდან, რომლებიც მუდმივად გამოიყენება მომდევნო თავებში. მეორე თავში განხილულია, აგრეთვე, ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაცია, განსაკუთრებული წერტილების მქონე დიფერენციალურ-გეომეტრიული ბმულობით, ეს არ არის სტანდარტული და საყოველთაოდ ცნობილი ობიექტი, რის გამოც მასთან დაკავშირებული დებულებები მოყვანილია დამტკიცებით. ამგვარი მიდგომის აუცილებლობა გამოიწვია, დისერტაციის ძირითადი თეორემის დამტკიცების გამჭვირვალობისათვის, ამ დებულებების ადაპტირებული ვარიანტის არსებობის

აუცილებლობამ. ამასთან, ამ შედეგების გადმოცემის დროს ვხელმძღვანელობდით პირველწყაროებით, რის გამოც დისერტაციაში მოყვანილი ცნობილი ფაქტები გადმოცემულია ინვარიანტული სახით და ზოგიერთი დებულების დამტკიცება არის ორიგინალური.

ძირითადი შედეგი მოყვანილია დისერტაციის მესამე (თეორემა 3.1.1, თეორემა 3.1.2, თეორემა 3.1.3, თეორემა 3.2.1, დებულება 3.1.1 და დებულება 3.1.2) და მეოთხე (თეორემა 4.1.1) თავებში, სადაც ყოველი რეგულარული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის, რომლის ყველა განსაკუთრებული წერტილი პირველი რიგის პოლუსია გარდა უსასრულობისა, შემოტანილია ახალი ობიექტი, რომელსაც ტრანსფერ-მატრიცი ეწოდება და ნაჩვენებია, რომ იგი რაციონალური მატრიცული ფუნქციაა, ნაჩვენებია რომ განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩის ტიპი, ან რაც იგივეა ფიბრაციის კომპლექსური სტრუქტურა, სრულად ხასიათდება ტრანსფერ-მატრიცის კერძო ინდექსების საშუალებით. ტრანსფერ-მატრიცის ასაგებად მოყვანილია ალგორითმი, რისი ეფექტურობაც ნაჩვენებია დისერტაციის მეოთხე თავში, მეორე რიგის განტოლებათა სისტემისათვის. დამატებაში განხილულია მაგალითები, მითითებულია აგრეთვე მიღებული შედეგებისა და რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის კავშირზე, უბან-უბან მუდმივი სასაზღვრო მატრიცული ფუნქციის შემთხვევაში.

დისერტაციაში განხილული საკითხები და მიღებული შედეგები ეფუძნება უკანასკნელ ორ ათწლეულებში რეგულარულ განტოლებათა სისტემებისათვის დამუშავებულ ანალიზურ, ალგებრულ და გეომეტრიულ მეთოდებს. მიღებული შედეგები შესაძლებელია გამოყენებული იქნას მომიჯნავე ამოცანების, კერძოდ უბან-უბან მუდმივი მატრიცული ფუნქციის კერძო ინდექსების გამოსათვლელად და რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის ანალიზისათვის, უბან-უბან მუდმივი სასაზღვრო მატრიცული ფუნქციის შემთხვევაში.

Abstract

The work is dedicated to the calculation of the holomorphic structure of the vector bundle induced from a regular system of differential equations on Riemann sphere and the characterization of the space of global solution of the system of differential equations through it. In particular, the system of equations given in Riemann sphere defines the representation of the fundamental group or monodromy representation of the non-compact Riemann surface, which induces the principal complex bundle over a noncompact complex manifold with meromorphic differential-geometric meromorphic connection. The set of singular points of the connection and the set of branch points of given system of differential equations coincide. The extension of this bundle over Riemann sphere is analytically nontrivial and its holomorphic structure completely characterized by splitting type of this bundle. The work investigates the behavior of the solutions of the system of equations in the neighbourhood of a singular points and its dependence on the invariants of the obtained bundle. The extension of the trivial bundle on the singular points of the system of equations happens by connection, wherein arises family of holomorphic nonequivalent vector bundles and computation of holomorphic type individual bundles from this family through calculation of splitting type of the bundle is one of the main topics of the thesis.

The work deals in detail of the systems of second-order linear equations with meromorphic coefficients whose solutions are regular. In this case, the characteristic of the holomorphic structure is given in terms of the Chern numbers, topological invariant of the holomorphic bundle.

The cases of a system of regular equations and a scalar equation are discussed separately from the point of view of the classification of specific points due to their specificity. In particular, the class of systems of regular equations contains the class of systems of equations of the Fuchs type, and for scalar equations the properties of regularity and Fuchs coincide. The thesis also distinguishes systems of second-order equations and second-order equations. The main attention is paid to systems of the second order, because the Riemann monodromic problem is always positively solvable for them.

The work consists of an introduction, four chapters and an appendix. The introduction indicates the importance and motivation of the main results discussed in the dissertation, and also indicates the

role of these results in the theory of systems of differential equations with analytical coefficients, in general.

The necessary definitions from the theory of Fuchs-type systems and systems of regular equations are given in Chapters 1 and 2 of the thesis, where the basic concepts are introduced and standard facts from the theory of analytical differential equations are presented, which are constantly used in subsequent chapters. Also, in the second chapter it is considered some basic facts from the theory of holomorphic vector bundles with differential-geometric connections with singular points. This is not a standard and well-known object, therefore, the corresponding results are presented with evidence. The necessity of such approach is needed for an adapted version of these results for the transparency of the approval of the main results.

The main results are given in Chapter 3 (Theorem 3.1.1, Theorem 3.1.2, Theorem 3.1.3, Theorem 3.2.1, Proposition 3.1.1 and Proposition 3.1.2) and the 4th Chapter (Theorem 4.1.1), which show that for each system of regular equations, all singular points of which are first-order poles, except infinity, a new object, so called the transfer matrix, is introduced and it is shown that this is a rational matrix function. The holomorphic structure of the bundle is fully characterized by the partial indices of the transfer matrix. The transfer matrix is constructed algorithmically, and the efficiency of algorithm is proved in the fourth chapter of the thesis for a system of second-order equations.

The topics discussed in the thesis and the results obtained are based on analytical, algebraic and geometric methods developed for regular system of equations over the past two decades. The results obtained can be used for investigation of the related problems, in particular, for calculating the partial indices of a piecewise constant matrix-functions, as well as for analyzing the Riemann-Hilbert boundary value problem when the transition function of the problem is piecewise constant matrix-function.

ს ა რ ჟ ე ვ ი

შესავალი	10
----------------	----

თავი I. რეგულარული და ფუქსის სისტემები რიმანის სფეროზე, განმარტებები და დამხმარე დებულებები

1.1. n რიგის რეგულარული განტოლებები კომპლექსურ სიბრტყეზე	18
1.2. რეგულარულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სივრცის სტრუქტურა	23

თავი II. რეგულარულ განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაცია და მისი კანონიკური გაგრძელება

2.1. ჰოლომორფული ფიბრაცია ბმულობით. დამხმარე დებულებები და განმარტებები	36
2.2. რიმანის სფეროზე, რეგულარული განტოლების, გლობალურ ამონახსნთა სივრცის, რიცხვითი მახასიათებლები	41
2.3. განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ფიბრაცია	45
2.4. მატრიცული ფუნქციის ფაქტორიზაცია და ჰოლომორფული ფიბრაციების კლასიფიკაცია, რიმანის სფეროზე	53

თავი III. რეგულარულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი

3.1. განტოლებათა სისტემის ტრანსფერ-მატრიცი	60
3.2. ინდუცირებული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპის გამოთვლა	86

თავი IV. მეორე რიგის, რეგულარულ განტოლებათა სიტემებისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიზრაციები

4.1. ჰიპერგეომეტრიული განტოლებისაგან ინდუცირებული

ჰოლომორფული ფიზრაცია 90

4.2. ტრანფერ-მატრიცის აგების ალგორითმის რეალიზაცია 91

დანართი 116

დასკვნა 126

ლიტერატურა 127

შესავალი

რიმანის $\mathbb{CP}^1$ სფეროზე

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad (1)$$

წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, სადაც $B(z)$ ცნობილი მატრიცული ფუნქციაა, ხოლო $y(z) = (y^1(z), y^2(z), \dots, y^n(z))$ კი $U \subset \mathbb{CP}^1$ არეში განსაზღვრული უცნობი ვექტორული ფუნქციაა, მათემატიკოსთა და ფიზიკოს-თეორეტიკოსთა უწყვეტი და ინტენსიური კვლევის ობიექტია უკანასკნელი ნახევარი საუკუნის განმავლობაში, მისი მრავალმხივი გამოყენებების გამო. გასული საუკუნის 80-იან წლებში შემჩნეული იქნა, რომ მათემატიკური ფიზიკის არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები კორტევეგ-დე ვრიზის (Korteweg-de Vries), არაწრფივი შრიოდინგერი (nonlinear Schrödinger), ბიურგერსის (Burgers equations), sin-გორდონის (sine-Gordon equation equation) განტოლებები წარმოადგენენ (1) სახის განტოლებათა სისტემის იზომონოდრომულობის პირობას და უშუალოდ არიან დაკავშირებული ე. წ. პენლევეს ტრანსცედენტულ განტოლებებთან. ამავე პერიოდს ეკუთვნის ჰიპოთეზა პენლევეს ტესტის შესახებ, რომლის თანახმად, კომპლექსურ სიბრტყეზე განსაზღვრული ყველა მეორე რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება უძრავი განსაკუთრებული წერტილით რედუცირდება პენლევეს რომელიმე განტოლებაზე (იხ. [7], [15], [31], [37]). მეორეს მხრივ, $B(z)dz$ 1-დიფერენციალური ფორმა არის (1) სისტემისაგან ინდუცირებული ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაციის დიფერენციალურ-გეომეტრიული ბმულობის ფორმა და ამრიგად, შესაძლებელია განხილული იქნას როგორც ყალიბური პოტენციალი, რომელიც ცენტრალური ობიექტია ველის ყალიბურ თეორიაში. (1) სახის განტოლებათა სისტემაა აგრეთვე ველის კონფორმული თეორიის ძირითადი განტოლება, რომელიც კნიჟნიკ-ზამოლოდჩიკოვის განტოლების სახელითაა სამეცნიერო ლიტერატურატურაში ცნობილი, (1) სახის განტოლებას უკავშირდება

კვანძებისა და მარყუქების ტოპოლოგიური კლასიფიკაცია, კვანტური ჯგუფების ზოგიერთი სპეციფიკური საკითხი და სხვა [31].

განსაკუთრებული ინტერესის სფეროს წარმოადგენს (1) სახის რეგულარულ განტოლებათა სისტემა. დავუშვათ $B(z)$ მატრიცული ფუნქცია ჰოლომორფულია S დისკრეტული სიმრავლის დამატებაზე, ხოლო S კი $B(z)$ -ის განსაკუთრებულ წერტილთა სიმრავლეა. ასეთ შემთხვევაში ცნობილია, რომ (1) სისტემას, $z_0 \in X_m = \mathbb{CP}^1 \setminus S$ წერტილის მცირე მიდამოში, ყოველთვის აქვს n წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემა $y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)$, რომელიც გაგრძელებადია ნებისმიერი წირის გასწვრივ და მიღებული ვექტორული ფუნქცია დამოკიდებულია მხოლოდ წირის ჰომოტოპიის კლასზე. თუ $[\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_m]$ -ით აღვნიშნავთ წირების ჰომოტოპიის კლასებს, იმ წირებისას, რომლებიც იწყებიან და მთავრდებიან z_0 წერტილში და ერთხელ შემოუვლიან განსაკუთრებულ წერტილებს, საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ მივიღებთ

$$\chi : \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus S, z_0) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad \chi[\gamma_j] = G_j, \quad 1, \dots, m \quad (2)$$

მონოდრომიის წარმოდგენას, სადაც $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus S, z_0)$ აღნიშნავს ფუნდამენტურ ჯგუფს. $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus S, z_0)$ ჯგუფის ანასახი χ ჰომომორფიზმის დროს არის (1) სისტემის შესაბამისი მონოდრომიის ჯგუფი და წარმოადგენს (1) სისტემის მნიშვნელოვან ინვარიანტს. მაგალითად, გარკვეული კლასის სისტემებისათვის, მონოდრომიის ჯგუფის ამოსნადობიდან გამომდინარეობს (1) სისტემის ამოხსნადობა განზოგადებულ კვადრატურებში [35].

(1) სახის რეგულარული განტოლებათა სისტემების მნიშვნელოვანი ქვეკლასია ფუქსის ტიპის სისტემები, რომლის კანონიკური სახეა

$$df = \omega f; \quad \omega = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{z - s_i} dz, \quad (3)$$

(3) განტოლებათა სისტემა, რომლის კერძო შემთხვევებია რიმანის განტოლება - მეორე რიგის განტოლება სამი განსაკუთრებული წერტილით და მისი კანონიკური სახე, გაუსის

ჰიპერგეომეტრიული განტოლება, აგრეთვე ჰოინის განტოლება, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება ოთხი განსაკუთრებული წერტილით, რომლის კანონიკური სახეა ლამეს განტოლება. როგორც კარგადაა ცნობილი, ეს განტოლებები იძლევიან სპეციალურ ფუნქციებსა და ორთოგონალურ პოლინომებს, რომელთა გამოც მათ ფუნდამენტური გამოკვლევები მიუძღვნეს გაუსმა, რიმანმა, ვაიერშტრასმა, ფუქსმა, შლეზინგერმა, პენლევემ, პუანკარემ [39] (აქვე იხილეთ მოკლე ისტორიული მიმახილვა).

რიმანმა ერთ-ერთ თავის ბოლო ნაშრომში [32] დასვა შებრუნებული ამოცანა:

რიმანის ამოცანა მონოდრომიის შესახებ: შესაძლებელია თუ არა აიგოს (1) სისტემა, რომელსაც მოცემულ $s_1, s_2, \dots, s_m$ წერტილებში ექნება პირველი რიგის პოლუსები, ხოლო ამ სისტემის მონოდრომიის მატრიცები დაემთხვევა წინასწარ მოცემულ $G_1, G_2, \dots, G_m$ მატრიცებს?

რიმანმა იქვე მიუთითა ამ ამოცანის ამოხსნის ერთ-ერთ შესაძლო გზაზე. იგი მსჯელობდა შემდეგნაირად: $s_1, s_2, \dots, s_m$ წერტილები თანმიმდევრობით შევაერთოთ მონაკვეთებით, კერძოდ, s_1 შევაერთოთ s_2 -თან, s_2 შევაერთოთ s_3 -თან ... s_{m-1} შევაერთოთ s_m -თან, ხოლო s_m შევაერთოთ s_1 -თან. მივიღებთ შეკრულ წირს, რომელიც კომპლექსურ სიბრტყეს ორ - გარე, C^- და შიგა, C^+ , არეებად დაყოფს. ამ შეკრულ წირზე განვიხილოთ უბან-უბან მუდმივი $G(t)$ მატრიცული ფუნქცია, განსაზღვრული ტოლობით:

$$G(t) = G_j G_{j-1} \dots G_1 \text{ თუ } t \in s_j s_{j+1},$$

სადაც $s_j s_{j+1}$ აღნიშნავს s_j და s_{j+1} წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს. შემდეგ მან დასვა შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა:

რიმანის სასაზღვრო ამოცანა [13], [29] : ვიპოვოთ მატრიც-ფუნქციათა წყვილი $\Phi^+(t), \Phi^-(t)$, რომლებიც უწყვეტები არიან აგებულ წირზე, გარდა შესაძლოა $s_1, s_2, \dots, s_m$ წერტილებისა, სადაც მათ ექნებათ პირველი რიგის წყვეტები, $\Phi^+(t)$ იქნება შიგა არეზე გადაუგვარებელი ჰოლომორფული მატრიც-ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა, $\Phi^-(t)$ კი იქნება გარე არეზე გადაუგვარებელი ჰოლომორფული მატრიც-ფუნქციის სასაზღვრო

მნიშვნელობა, რომელსაც სასრული რიგი ექნება უსასრულობაში, ხოლო საზღვარზე კი ისინი ერთმანეთს დაუკავშირდებიან ტოლობით:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t).$$

ამრიგად, საჭიროა ვიპოვოთ $\varphi^+ = (\varphi_1^+, \varphi_2^+, \dots, \varphi_n^+)$ და $\varphi^- = (\varphi_1^-, \varphi_2^-, \dots, \varphi_n^-)$ ვექტორულ ფუნქციათა ისეთი წყვილი, რომ:

1. $\varphi^+(z)$ ჰოლომორფული იყოს C^+ -ში, $\varphi^-(z)$ ჰოლომორფული იყოს C^- -ში და სასრული რიგი ჰქონდეს უსასრულობაში;
2. $\varphi^+(z)$ და $\varphi^-(z)$ უწყვეტად გაგრძელებადები იყვნენ L კონტურზე, $s_1, s_2, \dots, s_m$ წერტილების გარდა და (s_j, s_{j+1}) -ზე აკმაყოფილებდნენ თანადობას:

$$\varphi^+(t)G(t) = \varphi^-(t),$$

(s_j, s_{j+1}) - აღნიშნავს s_j და s_{j+1} წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს, ბოლოების ე. ი. s_j და s_{j+1} წერტილების, გარეშე, $j = 1, \dots, n - 1$;

3. $\varphi^\pm(z)(z - s_j)^\varepsilon$ მიისწრაფვის ნულისკენ, ყოველი ε -თვის, $0 \leq \varepsilon < 1$, როდესაც z მიისწრაფვის s_j -კენ შესაბამისად C^+ -დან და C^- -დან, $j = 1, \dots, n$.

ორივე ამოცანა რიმანს დაუსრულებელი დარჩა. მითითებული ნაშრომის გამოქვეყნებიდან მალე იგი გარდაიცვალა და მისი კვლევები დ. ჰილბერტმა გააგრძელა. მან რამდენიმე კერძო შემთხვევისათვის ამოხსნა რიმანის ამოცანა მონოდრომიის შესახებ (შემდეგ მას ჩვენ რიმანის მონოდრომიულ ამოცანას დავუძახებთ), ხოლო ზოგადი სახით ისე, როგორც ეს ამოცანა რიმანმა ჩამოაყალიბა, მან შეიტანა თავის ცნობილ პრობლემათა ნუსხაში, ნომრით 21. როდესაც ჰილბერტი თავის პრობლემებს აყალიბებდა, იგი ყოველთვის აკეთებდა კომენტარს, მოჰყავდა ამოცანის მოტივაცია. ხშირ შემთხვევაში ეს მოტივაცია საკმაოდ “ზოგადმეცნიერულია“, კერძოდ, ჰილბერტის სტილი პრობლემის ჩამოყალიბების დროს ასეთია: იგი სვამს პრობლემას, შემდეგ აწვითარებს მის ამოსახსნელ სავარაუდო ტექნიკას, შემდეგ კი მოჰყავს მომიჯნავე ამოცანები, ბოლოს კი ის შედეგები, რაც ამოცანის ამოხსნას მოჰყვება. 21-ე პრობლემასთან დაკავშირებით ჰილბერტის კომენტარი საკმაოდ ძუნწია. იგი შემოიფარგლება მხოლოდ შიგა

მათემატიკური ინტერესით. ჰილბერტი აღნიშნავს, რომ ამ ამოცანის ამოხსნის შემთხვევაში, ანალიზურ კოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორია მიიღებდა დასრულებულ სახეს (იხ. [4]).

n რიგის სკალარული განტოლებებისათვის, რიმანის მონოდრომიული ამოცანის სრული ანალიზი მოახდინა პუნკარემ, რომელმაც გამოთვალა განტოლებისა და მონოდრომიის პარამეტრები და აჩვენა, რომ მოცემული განსაკუთრებული წერტილებითა და გადაუგვარებელი მატრიცების საშუალებით, შესაძლებელია, აიგოს მერომორფულად არაექვივალენტური განტოლებები. ამის შემდეგ, მომდევნო პერიოდში, კვლევის ობიექტი გახდა მხოლოდ განტოლებათა სისტემები. გარკვეული პროგრესი მიღწეული იქნა პლემელის ნაშრომში [33], სადაც სასაზღვრო ამოცანა მიყვანილია უწყვეტ კოეფიციენტებიან ამოცანაზე და შემდეგ ამოხსნილია სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების მეთოდებით (იხ. აგრეთვე [3], [29]). კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ არსებობს ამონახსნთა ისეთი $\varphi_1^\pm(z), \varphi_2^\pm(z), \dots, \varphi_n^\pm(z)$ სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს (იხ. [13], [29]):

1. T მატრიც ფუნქციის, რომლის სტრიქონები შედგება $\varphi_1^\pm(z), \varphi_2^\pm(z), \dots, \varphi_n^\pm(z)$ ვექტორებისაგან, დეტერმინანტი ყველგან არანულოვანია, გარდა $s_1, s_2, \dots, s_m$ წერტილებისა;
2. მატრიცული ფუნქცია $z^D T$ ჰოლომორფულად შებრუნებადია ∞ -ში.

ყოველი განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში განვიხილოთ მატრიცული ფუნქცია $F = (z - s_j)^D T$. F არის უსასრულობაში ჰოლომორფულად შებრუნებადი, ფორმა $\omega = dF$. F^{-1} “თითქმის“ საძიებელი ფორმაა. თითქმის იმის გამო, რომ მიღებული დიფერენციალური ფორმისაგან განსაზღვრული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს, შესაძლებელია, უსასრულობაში ჰქონდეს არა აუცილებლად პირველი რიგის პოლუსი. ამრიგად, რიმანის ამოცანის ამოხსნის ამგვარი გზა (პლემელის მიდგომა) იძლევა ჰილბერტის 21-ე პრობლემის ამონახსნს, განტოლებათა მხოლოდ რეგულარული კლასისათვის და არა ფუქსის სისტემებისათვის [4], [15], [22].

სასაზღვრო ამოცანის გადასვლის $G(t)$ ფუნქციისათვის მუსხელიშვილმა და ვეკუამ შემოიტანეს მნიშვნელოვანი ინვარიანტი, მატრიცული ფუნქციის კერძო ინდექსები. იგი დაკავშირებულია $G(t)$ -ს ვინერ-ჰოპფი-ბირკჰოფის ფაქტორიზაციასთან [11-12], [31]. კერძოდ, $\gamma: S^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ მარყუჟების სიმრავლე აღვნიშნოთ $LGL_n(\mathbb{C})$ -ით. ნებისმიერი მარყუჟი შესაძლებელია წარმოდგენილი იქნას შემდეგი სახით:

$$\gamma = \gamma_- d\gamma_+, \quad (4)$$

სადაც

$$d = \begin{pmatrix} t^{k_1} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & t^{k_n} \end{pmatrix}$$

და γ_+ , γ_- ჰოლომორფული და შებრუნებადი მატრიცული ფუნქციებია, შესაბამისად, S^1 ერთეულ რადიუსიანი წრეწირის შიგნით და გარეთ, უსასრულობის ჩათვლით [18], [31]. ნებისმიერ მატრიცულ ფუნქციას ცალსახად შეესაბამება ელემენტი $LGL_n(\mathbb{C})$ -დან და აქედან გამომდინარე, კერძო ინდექსები არიან სასაზღვრო ამოცანისა და სასაზღვრო ამოცანის გადასვლის ფუნქციის სრული მახასიათებლები. მეორე მხრივ, $LGL_n(\mathbb{C})$ მარყუჟთა ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი ცალსახად განსაზღვრავს $E \rightarrow \mathbb{CP}^1$ ჰოლომორფულ ფიბრაციას რიმანის სფეროზე, ეს უშუალოდ გამომდინარეობს (4) წარმოდგენიდან, ხოლო d მატრიცული ფუნქციის სტრუქტურიდან (იგი დიაგონალურია) გამომდინარეობს გროთენდიკის თეორემა იმის შესახებ, რომ $E \rightarrow \mathbb{CP}^1$ ვექტორული ფიბრაცია იშლება წრფივი ფიბრაციების ჯამად:

$$E \cong E(k_1) \oplus E(k_2) \oplus \dots \oplus E(k_n). \quad (5)$$

(5) წარმოდგენაში $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ მთელ რიცხვებს ეწოდება E ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი და ამრიგად, ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი ემთხვევა შესაბამისი მარყუჟის (სასაზღვრო ამოცანის გადასვლის მატრიცული ფუნქციის) კერძო ინდექსებს. ამ კონტექსტში, მუსხელიშვილის ცნობილი თეორემა, სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნთა სივრცის შესახებ, არის შემდეგი ტოლობა:

$$\dim H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(E)) = c_1(E) + 1,$$

რაც ნიშნავს, რომ ჰოლომორფული ფიბრაციის, ჰოლომორფული კვეთების სივრცის განზომილება, გამოისახება ფიბრაციის ტოპოლოგიური ინვარიანტის - $c_1(E)$, ჩერნის რიცხვის, საშუალებით.

რიმანის მონოდრომიული ამოცანა (ჰილბერტის 21-ე პრობლემა) სრულად ამოხსნილი იქნა ა. ბოლიბრუხის მიერ [იხ. [4]], კერძოდ, მან აჩვენა, რომ ფუქსის კლასის განტოლებათა სისტემებისათვის ჰილბერტის 21-ე პრობლემა ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპისათვის სრულდება პირობა

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0. \quad (6)$$

ამრიგად, თუ ცნობილია განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი, აქედან გამომდინარეობს კრიტერიუმი იმისა, რეალიზებულია თუ არა მოცემული მონოდრომიის წარმოდგენა როგორც ფუქსის ტიპის განტოლებათა სისტემების მონოდრომია [4], [9]. მართლაც, რეგულარულ განტოლებათა სისტემა, მოცემული მონოდრომიის წარმოდგენისათვის, ყოველთვის არსებობს პლემელის თეორემის თანახმად, ხოლო რეგულარული სისტემისაგან იგება ჰოლომორფული ფიბრაცია, რომლის ჰოლომორფულად ტრივიალურობა, ე. ი. (6) პირობის შესრულება, საკმარისია ფუქსის ტიპის განტოლებათა სისტემის არსებობისათვის. რაც თავის მხრივ იმას ნიშნავს, რომ ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპის ცოდნის შემთხვევაში ცალსახად შეგვეძლება ვთქვათ დადებითია თუ არა პასუხი ჰილბერტის 21-ე პრობლემაზე. აქედან გამომდინარე, მნიშვნელოვანია განტოლებათა სისტემისაგან ასოცირებული (ინდუცირებული) ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპის გამოთვლა. გარდა ამისა, კერძო ინდექსებისა და გახლეჩვის ტიპის ტოლობის გამო, გახლეჩვის ტიპის საშუალებით შესაძლებელი ხდება მატრიცული ფუნქციის კერძო ინდექსების გამოთვლა, რომელიც დღეს ღია პრობლემაა ([12], [26-28]). რეგულარულ განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ჰოლომორფული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპის გამოსათვლელი ალგორითმის არსებობაზე ჰიპოთეზა გამოთქმული იყო ა. ბოლიბრუხის მიერ [9]-ში. კერძო შემთხვევებში ეს ჰიპოთეზა ამოხსნილი და შემდეგ გამოყვებული

იქნა [34], [38]-ში ჰილბერტის 21-ე პრობლემის ამოხსნადობის საკმარისი პირობების მისაღებად.

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება რიმანის სფეროზე ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპის გამოთვლას, განტოლებათა სისტემასთან ასოცირებული რაციონალური მატრიცული ფუნქციის საშუალებით და ეს არის სადისერტაციო ნაშრომის სიახლე.

კერძოდ, დისერტაციაში რეგულარულ განტოლებათა სისტემისაგან აგებულია ჰოლომორფული ფიბრაცია რიმანის სფეროზე და ნაჩვენებია, რომ მისი გახლეჩვის ტიპი ემთხვევა გარკვეული სახის რაციონალური მატრიცული ფუნქციის - ტრანსფერ-მატრიცის კერძო ინდექსებს. ამას ეძღვნება დისერტაციის მესამე და მეოთხე თავები. აქვეა მოყვანილი ამ ტრანსფერ-მატრიცის აგების ალგორითმი. მეოთხე თავში განხილულია მეორე რიგის განტოლებათა სისტემები და სისტემის ტრანსფერ-მატრიცისათვის გამოთვლილია კერძო ინდექსები, კანონიკური ფიბრაციის ჩერნის რიცხვით. დისერტაციის პირველი და მეორე თავები დათმობილი აქვს რეგულარული და ფუქსის ტიპის განტოლებათა სისტემების ამონახსნების გლობალურ და ლოკალურ თვისებებს, ჰოლომორფული ფიბრაციის აგების შესაძლებლობას, რიმანის სფეროზე, ლოგარითმული ბმულობის საშუალებით.

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო სამეცნიერო სემინარებზე, თსუ, “გმი“, გაფართოებული სემინარის სხდომებზე, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ყოველწლიურ საფალკუტეტო კონფერენციებზე, საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის ყოველწლიურ კონფერენციაზე (ბათუმი), საერთაშორისო კონფერენციაზე კომპიუტერულ ალგებრაში (დუბნა) და გამოქვეყნებულია [3], [16-17], [19-20] ნაშრომებში.

კვლევა განხორციელდა შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის ფინანსური მხარდაჭერით [გრანტის ნომერი № FR17_96].

თავი I. რეგულარული და ფუქსის სისტემები რიმანის სფეროზე,

განმარტებები და დამხმარე დებულებები

1.1. n რიგის რეგულარული განტოლებები კომპლექსურ სიბრტყეზე

განვიხილოთ n -ური რიგის წრფივი, ერთგვაროვანი განტოლება

$$y^{(n)} + p_1(z)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(z)y' + p_n(z)y = 0. \quad (1.1.1)$$

ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $p_i(z)$ ანალიზურია 0 წერტილისა მიდამოში, გარდა, შესაძლოა თვით 0-სა, $i = 1, \dots, n$.

$z = 0$ -ს ეწოდება *განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილი* თუ ყოველი $p_i(z)$ კოეფიციენტისათვის, $i = 1, \dots, n$, არის პოლუსი, წინააღმდეგ შემთხვევაში ეწოდება განტოლების *რეგულარული წერტილი* და ეწოდება *რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი*, თუ ნებისმიერი

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid \theta_1 < \arg z < \theta_2, 0 < |z| < \varepsilon\}$$

სექტორისათვის, სადაც ε რაიმე მცირე დადებითი რიცხვია, θ_1 და θ_2 მთელი რიცხვებია, არსებობს ისეთი ნატურალური k და დადებითი მუდმივი C , რომ (1.1.1) განტოლების $y(z)$ ამონახსნისათვის სრულდება უტოლობა

$$|y(z)| < \frac{C}{|z|^k}$$

ნებისმიერი z -სათვის Σ -დან.

თუ 0 არის (1.1.1) განტოლების კოეფიციენტების განსაკუთრებული წერტილია, მაშინ 0 აუცილებლად იქნება ამონახსნის განსაკუთრებული წერტილი, მათ შორის განშტოების წერტილიც [21-22].

დავუშვათ, $z = 0$ რეგულარული ან რეგულარული განსაკუთრებული წერტილია. ვთქვათ

$$D = z \frac{d}{dz}, \text{ მაშინ}$$

$$z^r \frac{d}{dz^r} = D(D-1) \dots (D-r+1) \quad (1.1.2)$$

და (1.1.2)-ის გამოყენებით, (1.1.1) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$D^n y + q_1(z) D^{n-1} y + \dots + q_{n-1}(z) D y + q_n(z) y = 0. \quad (1.1.3)$$

0-ის რეგულარული განსაკუთრებულობის გამო, (1.1.3) განტოლებაში, $q_i(z)$ პოლინომორფული ფუნქციებია, $i = 1, \dots, n$.

(1.1.1) განტოლების *მახასიათებელი განტოლება*, $z = 0$ წერტილში, ვუწოდოთ შემდეგ პოლინომიალურ განტოლებას:

$$\lambda^n + q_1(0)\lambda^{n-1} + \dots + q_{n-1}(0)\lambda + q_n(0) = 0. \quad (1.1.4)$$

(1.1.4) განტოლების ფესვებს ეწოდება (1.1.1) განტოლების, $z = 0$ რეგულარული განსაკუთრებული წერტილის *ლოკალური ექსპონენტები*. მტკიცდება, რომ ექსპონენტები დამოკიდებულნი არ არიან ცვლადის გარდაქმნაზე [21].

თუ z_0 წერტილი არის (1.1.1)-ის რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი (ან რეგულარული წერტილი), მაშინ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^i p_i(z), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ხოლო $z = \infty$ არის (1.1.1)-ის რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი (ან რეგულარული წერტილი), თუ არსებობს ზღვარი $\lim_{z \rightarrow z_0} z^i p_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$. ცნობილია, რომ თუ z_0 არის (1.1.1) განტოლების განსაკუთრებული წერტილი და $a_i = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^i p_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$, მაშინ (1.1.1)-ის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) + a_1 \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+2) + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

ხოლო თუ ∞ რეგულარული განსაკუთრებული წერტილია (ან რეგულარულია) და $a_i = \lim_{z \rightarrow z_0} z^i p_i(z)$, მაშინ მახასიათებელი განტოლება იქნება:

$$\lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+n-1) - a_1 \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+n-2) + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \lambda + (-1)^n a_n = 0.$$

(1.1.1) სახის განტოლებას ეწოდება *ფუქსის*, თუ მისი ყველა განსაკუთრებული წერტილი რეგულარულია.

რიმანის სქემა ეწოდება გამოსახულებას

$$\begin{pmatrix} s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & s_m \\ s_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & s_m^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_1^n & \cdot & \cdot & \cdot & s_m^n \end{pmatrix}, z,$$

სადაც s_j , $j = 1, 2, \dots, m$, რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებია, ხოლო s_j^i , $i = 1, 2, \dots, n$, არიან განსაკუთრებული წერტილის ექსპონენტები. *ფუქსის თეორემის* თანახმად, (1.1.1) განტოლების ყველა ექსპონენტების ჯამი დამოკიდებულია განსაკუთრებული წერტილების რაოდენობაზე და სამართლიანია ტოლობა [22] :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m s_j^i = \frac{(m-2)n(n-1)}{2}.$$

წრფივი, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, ანალიზური კოეფიციენტებით, კომპლექსურ არეში

$$y^{(n)} + p_1(z)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(z)y' + p_n(z)y = 0,$$

რომლის ყველა განსაკუთრებული წერტილი არის რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი, ეკუთვნის *ფუქსის განტოლებათა კლასს*, სადაც

$$p_j(z) = \prod_{l=1}^m \frac{r_l(z)}{(z - s_l)^j}$$

და $s_1, s_2, \dots, s_m$, ერთმანეთისაგან განსხვავებული წერტილებია, რომელთა შორის არ არის ∞ , ხოლო თუ $s_m = \infty$, ე. ი. ∞ არის განსაკუთრებულ წერტილებს შორის, მაშინ

$$p_j(z) = \prod_{l=1}^{m-1} \frac{r_l(z)}{(z - s_l)^j},$$

$r_j(z)$ - ჰოლომორფულია მთლიან კომპლექსურ სიბრტყეზე, $j \in \mathbb{N}$ და $j = 1, \dots, n$.

მაგალითი - მეორე რიგის რეგულარული განტოლება:

თუ $r = 1$, მაშინ, რადგან $D = z \frac{d}{dz}$ და განტოლებას აქვს სახე:

$$z \frac{d}{dz} y + q_1(z)y = 0.$$

ხოლო თუ $r = 2$, მაშინ

$$D(D - 1) = D^2 - D = z \frac{d}{dz} \left(z \frac{d}{dz} \right) - z \frac{d}{dz} = z \frac{d}{dz} + z^2 \frac{d^2}{dz^2} - z \frac{d}{dz} = z^2 \frac{d^2}{dz^2}$$

და

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} y + zq_1(z) \frac{d}{dz} y + q_2(z)y = 0$$

$$\text{ე. ი. } z^2 y'' + zq_1(z)y' + q_2(z)y = 0.$$

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - v^2)y = 0.$$

ბესელის განტოლებას აქვს ორი განსაკუთრებული წერტილი $z = 0$ და $z = \infty$, მაგრამ ის არ არის ფუქსის ტიპის განტოლება, ხოლო

$$z^2 y'' - (a + b - 1)zy' + aby = 0$$

ეილერის განტოლებას, სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივებია, აქვს $z = 0$ და $z = \infty$ განსაკუთრებული წერტილი და იგი წარმოადგენს ფუქსის ტიპის განტოლებას. აქვე შევნიშნოთ, რომ ეილერის განტოლება არის მეორე რიგის, ორი განსაკუთრებული წერტილის მქონე, ფუქსის ტიპის განტოლების კანონიკური სახე (ზოგად ეილერის განტოლებას კვლავ განვიხილავთ პარაგრაფ 1.2.-ში, განტოლება 1.2.14).

მეორე რიგის ფუქსის ზოგად განტოლებას აქვს სახე:

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0,$$

$$\text{სადაც } p(z) = \frac{P(z)}{\prod_{k=1}^m (z - s_k)} \text{ და } q(z) = \frac{Q(z)}{\prod_{k=1}^m (z - s_k)^2}.$$

ამ შემთხვევაში, $p(z)$ და $q(z)$ რაციონალური ფუნქციებია, ხოლო $P(z)$ და $Q(z)$ მრავალწევრებია, რომელთა ხარისხები არ აღემატება, შესაბამისად, $m - 1$ -სა და $2(m - 1) = 2m - 2$ -ს.

თუ $p(z)$ და $q(z)$ ფუნქციებს დავწერთ შემდეგნაირად:

$$p(z) = \frac{p_0 z^{m-1} + p_1 z^{m-2} + \dots + p_m}{\prod_{k=1}^m (z - s_k)} \text{ და } q(z) = \frac{q_0 z^{2m-2} + q_1 z^{2m-3} + \dots + q_{2m}}{\prod_{k=1}^m (z - s_k)^2},$$

მაშინ გვექნება ფუქსის განტოლება, ზოგადი სახით:

$$y'' + \frac{p_0 z^{m-1} + p_1 z^{m-2} + \dots + p_m}{\prod_{k=1}^m (z - s_k)} y' + \frac{q_0 z^{2m-2} + q_1 z^{2m-3} + \dots + q_{2m}}{\prod_{k=1}^m (z - s_k)^2} y = 0.$$

მეორე რიგის ფუქსის რეგულარული განტოლება, $s_1, s_2, \dots, s_m$ განსაკუთრებული წერტილებით, არის განტოლება

$$y'' + \sum_{k=1}^m \frac{1 - (\rho_1^{(k)} + \rho_2^{(k)})}{z - s_k} y' + \left(\sum_{k=1}^m \frac{\rho_1^{(k)} \rho_2^{(k)} \prod_{j=1}^m (z - s_j)}{z - s_k} + Q_{m-2}(z) \right) \frac{y}{\prod_{k=1}^m (z - s_k)^2} = 0,$$

სადაც $Q_{m-2}(z)$ არის მრავალწევრი, რომლის ხარისხი არ აღემატება $m - 2$ -ს, ხოლო $\rho_1^{(k)}$ და $\rho_2^{(k)}$ არის *მახასიათებელი ექსპონენტები*.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ფუქსის განტოლებას აქვს სამი განსაკუთრებული წერტილი s_1, s_2 და s_3 . შესაბამისი განტოლება იქნება:

$$w'' + \left(\frac{A_1}{z - s_1} + \frac{A_2}{z - s_2} + \frac{A_3}{z - s_3} \right) w' + \left(\frac{B_1}{z - s_1} + \frac{B_2}{z - s_2} + \frac{B_3}{z - s_3} \right) \frac{w}{(z - s_1)(z - s_2)(z - s_3)} = 0, \quad (1.1.5)$$

სადაც $A_k = 1 - (\rho_1^{(k)} + \rho_2^{(k)})$ და $B_k = \rho_1^{(k)} \rho_2^{(k)} (s_k - s_{k-1})(s_k - s_{k+1})$.

აღნიშნულ განტოლებას ეწოდება *რიმანის განტოლება*, ხოლო გამოსახულება

$$w = p \left(\begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ \rho_1^{(1)} & \rho_1^{(2)} & \rho_1^{(3)} \\ \rho_2^{(1)} & \rho_2^{(2)} & \rho_2^{(3)} \end{matrix}, z \right)$$

იქნება რიმანის სქემა შესაბამისი განტოლებისათვის.

z ცვლადის წილად-წრფივი გარდაქმნით:

$$z = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

სადაც $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, შესაძლებელია განტოლების სამი, s_1 , s_2 და s_3 , განსაკუთრებული წერტილი გადავიდეს სამ განსხვავებულ, τ_1 , τ_2 და τ_3 , წერტილში, რომლის შესაბამისი რიმანის სქემა იქნება:

$$p \left(\begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ \rho_1^{(1)} & \rho_1^{(2)} & \rho_1^{(3)} \\ \rho_2^{(1)} & \rho_2^{(2)} & \rho_2^{(3)} \end{matrix}, z \right) = p \left(\begin{matrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \rho_1^{(1)} & \rho_1^{(2)} & \rho_1^{(3)} \\ \rho_2^{(1)} & \rho_2^{(2)} & \rho_2^{(3)} \end{matrix}, t \right),$$

აქედან ჩანს, რომ ცვლადი არის t , ხოლო წერტილები არიან:

$$\tau_1 = \frac{\alpha s_1 + \beta}{\gamma s_1 + \delta}, \tau_2 = \frac{\alpha s_2 + \beta}{\gamma s_2 + \delta}, \tau_3 = \frac{\alpha s_3 + \beta}{\gamma s_3 + \delta}.$$

რადგან წილადწრფივი ასახვით შესაძლებელია ნებისმიერი სამი წერტილი გადავიდეს $0, 1, \infty$ წერტილში, ამიტომ, ბუნებრივია (1.1.5) განტოლებაში განსაკუთრებულ წერტილებად ავიღოთ ეს წერტილები [23], [39].

1.2. რეგულარულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სივრცის სტრუქტურა

განვიხილოთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y. \quad (1.2.1)$$

დავუშვათ $B(z)$ მატრიცული ფუნქცია ჰოლომორფულია $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ დისკრეტული სიმრავლის დამატებაზე, ხოლო S კი $B(z)$ -ის განსაკუთრებულ წერტილთა სიმრავლეა. ასეთ შემთხვევაში ცნობილია, რომ (1.2.1) სისტემას, $z_0 \in X_m = \mathbb{CP}^1 \setminus S$ წერტილის მიდამოში, ყოველთვის აქვს n წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემა $y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)$ და თითოეული გაგრძელებადია ნებისმიერი წირის გასწვრივ. თუ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ -ით აღვნიშნავთ შეკრულ მარტივ წირებს, რომლებიც იწყებიან და მთავრდებიან z_0 რეგულარულ წერტილში, ერთხელ შემოუვლიან $s_1, s_2, \dots, s_m$

წერტილებს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით და მთლიანად მდებარეობენ X_m მრავალსახეობაზე, მაშინ $Y = \{y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)\}$ ამონახსნთა სისტემა გადავა სხვა $\tilde{Y}$ ამონახსნში, რომელიც Y -ს უკავშირდება ტოლობებით $Y = G_j \tilde{Y}$, სადაც G_j , $j = 1, \dots, m$, გადაუგვარებელი მუდმივი მატრიცებია. G_j , $j = 1, \dots, m$, მატრიცებს *მონოდრომიის მატრიცები* ეწოდებათ, ხოლო ქვეჯგუფს, რომელსაც ისინი წარმოქმნიან $GL_n(\mathbb{C})$ -ში, *მონოდრომიის ჯგუფი* ეწოდება [4], [8], [21-22]. G_j , $j = 1, \dots, m$ მონოდრომიის მატრიცები დამოკიდებულია γ_j , $j = 1, \dots, m$, წირების ჰომოტოპიის კლასებზე და ამრიგად, (1.2.1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა განსაზღვრავს ჰომომორფიზმს

$$\chi : \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus S, z_0) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad \chi[\gamma_j] = G_j, \quad 1, \dots, m, \quad (1.2.2)$$

$\mathbb{CP}^1 \setminus S$ კომპლექსური მრავალსახეობის ფუნდამენტურ, $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus S, z_0)$, ჯგუფსა და n -ური რიგის კომპლექსურ გადაუგვარებელ მატრიცთა ჯგუფს შორის. ე. ი. $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus S, z_0)$ ჯგუფის ანასახი, χ ჰომომორფიზმის დროს, არის (1.2.1) სისტემის შესაბამისი *მონოდრომიის ჯგუფი* [4],[22].

$z = 0$ წერტილში, (1.2.1) სისტემის ფუნდამენტურ მატრიცას $Y(z)$ აქვს სახე

$$Y(z) = M(z)z^E,$$

სადაც $M(z)$ მატრიცული ფუნქციაა ნული წერილის გაჩხვლევით მიდამოში 0 , გარდა ამისა, z^E მატრიცის a_{ij} ელემენტებს აქვთ სახე:

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^n z^{\rho_l} P_{ij}^l(\ln(z)), \quad (1.2.3)$$

სადაც ρ_l -ები არიან E მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები, $P_{ij}^l(\ln(z))$ მრავალწევრია $\ln(z)$ -ის მიმართ, რომლის ხარისხი არ აღემატება $n - 1$ -ს. ფუნდამენტური მატრიცის გამოსახულებაში გვაქვს მატრიცული ექსპონენტა:

$$z^E = \exp(E \ln(z)) = I + E \ln(z) + \dots + \frac{E^n \ln^n(z)}{n!} + \dots \quad [\text{იხ. [21]}]$$

რეგულარული განსაკუთრებული წერტილის მქონე სისტემის ამონახსნთა სივრცეზე ნორმირება განსაზღვრება შენდევნაირად: ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ამონახსნი $y(\tilde{z})$ შესაძლებელია დაიწეროს სასრული ლოგარითმული ჯამის საშუალებით:

$$y(\tilde{z}) = \sum_{i,j \in \sigma} f_{ij}(z) \tilde{z}^{\rho_i} \ln(\tilde{z})^{b_j},$$

სადაც f_{ij} არის ლორანის მწკრივი, რომლის მთავარი ნაწილი სასრული რაოდენობის წევრებისაგან შედგება; ρ_i აკმაყოფილებს პირობას $0 \leq \operatorname{Re}(\rho_i) < 1$; b_j მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია. $y(\tilde{z})$ ამონახსნის ნორმირება ნულში ნიშნავს, მთელ $i, j \in \sigma$ სიმრავლეზე, f_{ij} მწკრივების ნორმირების მინიმუმს, ხოლო $f_{ij}(z)$ ფუნქციის ნორმირება ნულში კი ნიშნავს, $z = 0$ წერტილში, ფუნქციის ნულის რიგის ან ფუნქციის პოლუსის რიგის, აღებული მინუსი ნიშნით, მნიშვნელობას ე. ი. $y(\tilde{z})$ ამონახსნის ნორმირება ნულში არის, $z = 0$ წერტილში, $f_{ij}(z)$ მწკრივების ნულის რიგების ან პოლუსის რიგების, აღებული მინუსი ნიშნით, მნიშვნელობებისაგან შედგენილი სიმრავლის მინიმუმი [4]. $\tilde{z}$ აღნიშავს, $z = 0$ წერტილის გაჩხვლევითი მიდამოს უნივერსალური დაფარვის ლოკალურ კოორდინატთა სისტემას (რომელიც შეესაბამება z -ს).

განსაზღვრება (ლეველის (Levelt) ბაზისი) [4]. (1.2.1) სისტემის ამონახსნთა X სივრცის $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ ბაზისს, რომლისთვისაც 0 არის რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი, ეწოდება *ლეველის ბაზისი*, თუ ამონახსნთა სივრცეზე განსაზღვრულია φ ფუნქცია:

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

რომელსაც ეწოდება *ნორმირება* (ვალუაცია) და აკმაყოფილებს პირობებს:

1. φ ნორმირება, (e) ბაზისის ელემენტებზე, ღებულობს თავის ყველა შესაძლო $\psi_1, \dots, \psi_m$ მნიშვნელობებს, $k_1, \dots, k_m$ ჯერადობების გათვალისწინებით;
2. $\varphi(e_{i+1}) \leq \varphi(e_i)$, $i = 1, \dots, n - 1$;

3. ამ ბაზისში, σ^* მონოდრომიის ოპერატორის შესაბამის G მატრიცას აქვს ზედა სამკუთხა სახე.

თუ (1.2.1) სისტემის ფუნდამენტური მატრიცაა Y , მაშინ $\sigma^* Y = YG$. ამასთან, თუ σ^* მონოდრომიის ოპერატორს აქვს ერთი საკუთრივი მნიშვნელობა, მაშინ შესაბამის ლეველის ბაზისს *ლეველის სუსტი ბაზისი*.

საზოგადოდ, ამონახსნთა X სივრცე იშლება პირდაპირ ჯამად - $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_s$, სადაც $X_1, \dots, X_s$ შეესაბამებიან σ^* ოპერატორის წყვილ-წყვილად განსხვავებულ $\lambda^1, \dots, \lambda^s$ საკუთრივ მნიშვნელობებს. σ^* ოპერატორის შეზღუდვა X_i -ზე აღვნიშნოთ სიმბოლოთი σ_i^* . განვიხილოთ თითოეული X_i -ის შესაბამისი ლეველის ბაზისი. ბაზისს, რომელიც მიიღება X_i -ის, $i = 1, \dots, s$, შესაბამისი ლეველის ბაზისების გაერთიანებით, ეწოდება *ლეველის სუსტი ბაზისი*.

ვთქვათ $\varphi(e_l) = \varphi^l$. $A = \text{diag}(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მთელ რიცხვებიანი დიაგონალური მატრიცი, რომლის დიაგონალური ელემენტები არიან ამ ბაზისის ნორმირებები. მაშინ მატრიც-ფუნქციები, $z^A G z^{-A}$ და $z^A E z^{-A}$, ჰოლომორფულია $z = 0$ წერტილში, ხოლო $z^A \tilde{z}^E z^{-A}$ მატრიცული ფუნქციის ნორმირება, $z = 0$ წერტილში, ტოლია ნულის, სადაც

$$E = \frac{1}{2\pi i} \ln(G).$$

მართლაც, მატრიცებს G და E , აქვთ ზედა სამკუთხა სახე, (e) ბაზისის ნორმირებისათვის შესრულებულია უტოლობა $k \leq m$, $\varphi^m \leq \varphi^k$. განვიხილოთ ნამრავლი $z^A C z^{-A}$, სადაც $C = (c_{km})$ ზედა სამკუთხა მატრიცაა, მაშინ ამ $z^A C z^{-A}$ ნამრავლის ელემენტებია $\tilde{c}_{km}$:

$$\tilde{c}_{km} = c_{km} z^{\varphi^k - \varphi^m}, \quad k \leq m,$$

$$\tilde{c}_{km} = 0, \quad k > m.$$

თუ C -ს ნაცვლად განვიხილავთ მატრიცებს, $C = G$ და $C = E$, მივიღებთ ზემოთ თქმულის დამტკიცებას. მეორე მხრივ,

$$\tilde{z}^E = \exp(E \ln(\tilde{z})) = I + E \ln(\tilde{z}) + \dots + \frac{E^n \ln^n(\tilde{z})}{n!} + \dots,$$

$\varphi(\tilde{z}^E) \geq 0$, $z^A \tilde{z}^E z^{-A}$ მატრიცის ყველა დიაგონალური ელემენტი ტოლია $\tilde{z}^{\rho_i}$, $i = 1, \dots, n$ და $\varphi(\tilde{z}^{\rho_i}) = 0$.

თეორემა 1.2.1 [4], [22]. (1.2.1) სისტემის ამონახსნთა X სივრცის ფუნდამენტური $Y_e(\tilde{z})$ მატრიცისათვის, რომელიც აგებულია ლეველის (e) ბაზისში, $z = 0$ წერტილის გაჩვენებული $\dot{O}$ მიდამოში, სამართლიანია ტოლობა:

$$Y_e(\tilde{z}) = U(z) z^A \tilde{z}^E, \quad (1.2.4)$$

სადაც $U(z)$ არის ჰოლომორფული და ნული წერტილის $\dot{O}$ მიდამოში შეზღუდული მატრიცული ფუნქცია.

დამტკიცება: ვთქვათ $r = \max_i \{\operatorname{Re}(\rho_i)\}$, $0 < \varepsilon < (1 - r)/2$. ჰოლომორფულობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{z \rightarrow 0} U(z) \tilde{z}^{r+2\varepsilon} = 0.$$

გვაქვს ტოლობები

$$U(z) \tilde{z}^{r+2\varepsilon} = Y_e(\tilde{z}) \tilde{z}^{-E} z^{-A} \tilde{z}^{r+2\varepsilon} = N_1(\tilde{z}) N_2(\tilde{z}),$$

სადაც

$$N_1(\tilde{z}) = Y_e(\tilde{z}) \tilde{z}^{-A+\varepsilon I} \text{ და } N_2(\tilde{z}) = z^A \tilde{z}^{-E} z^{-A} \tilde{z}^{r+\varepsilon}.$$

რადგან $N_1(\tilde{z})$ მატრიცის j -ური სვეტი არის

$$e_j(\tilde{z}) \tilde{z}^{-\varphi(e_j)+\varepsilon},$$

ამის გამო, ნორმირების განსაზღვრებიდან მივიღებთ

$$\lim_{z \rightarrow 0} N_1(\tilde{z}) = 0.$$

მაგრამ, r -ის შერჩევის საშუალებით მივიღებთ, რომ მატრიცა $\tilde{z}^{-E+rI}$ მიიღებს (1.2.3) სახეს (ρ_i -ი შეიცვლება $r - \rho_i \geq 0$ -ით). ამის გამო, $\varphi(z^A \tilde{z}^{E+rI} z^{-A}) = 0$. აქედან მივიღებთ, რომ

$$\lim_{z \rightarrow 0} N_2(\tilde{z}) = \lim_{z \rightarrow 0} z^A \tilde{z}^{E+I} z^{-A} \tilde{z}^E = 0.$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ z^E მატრიცის a_{ij} ელემენტებს აქვთ სახე

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^n z^{\rho_l} P_{ij}^l(\ln(z)), \quad (1.2.5)$$

სადაც ρ_l -ები არიან E მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები, $P_{ij}^l(\ln(z))$ მრავალწევრია $\ln(z)$ -ის მიმართ, რომლის ხარისხიც არ აღემატება $n - 1$ -ს.

თეორემა 1.2.2 [4], [22]. (1.2.1) სისტემა, $z = 0$ რეგულარული განსაკუთრებული წერტილით, არის ფუქსის ტიპის სისტემა $z = 0$ წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც (1.2.1) სისტემის ამონახსნთა X სივრცის $Y_e(\tilde{z})$ ფუნდამენტური მატრიცისათვის, რომელიც აგებულია ლეველის (e) ბაზისში, სამართლიანია წარმოდგენა

$$Y_e(\tilde{z}) = U(z) z^A \tilde{z}^E,$$

სადაც $U(z)$ მატრიცა ჰოლომორფულად შებრუნებადია ნულის გაჩხვლეტილ მიდამოში $\dot{0}$.

დამტკიცება: ჯერ დავამტკიცოთ საკმარისობა. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$L(z) = A + z^A E z^{-A}, \quad L(0) = \lim_{z \rightarrow 0} (A + z^A E z^{-A}).$$

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ (რომელიც სამართლიანია როგორც ლეველის, ისე ლეველის სუსტი ბაზისისათვის) $L(z)$ მატრიც-ფუნქცია ჰოლომორფულია ნულის გაჩხვლეტილ $\dot{0}$ მიდამოში, ზედა სამკუთხაა, რომლის დიაგონალი ემთხვევა $A + E$ მატრიცის დიაგონალს. $L(z)$ მატრიცის დიაგონალური ელემენტები აღვნიშნოთ სიმბოლოებით:

$$\beta^j = \varphi^j + \rho^j, \quad j = 1, \dots, n,$$

მათ ეწოდებათ (1.2.1) სისტემის *მახასიათებლები* ნულში.

რადგან მატრიცა $Y_e(\tilde{z})$ არის მატრიცული განტოლების

$$\frac{dY_e}{dz} = B(z)Y_e, \quad (1.2.6)$$

ამონახსნი, ამიტომ

$$B(z) = \frac{dY_e}{dz} Y_e^{-1} = \frac{dU}{dz} U^{-1} + \frac{U}{z} L(z) U^{-1} \quad (1.2.7)$$

აქედან გამომდინარე, $zB(z)$ მატრიცა ჰოლომორფულია $z = 0$ წერტილში და (1.2.1) სისტემა არის ფუქსის 0 წერტილში. საკმარისობა ნაჩვენებია.

ახლა დავამტკიცოთ აუცილებლობა. განვიხილოთ ლეველის ბაზისი. ამ შემთხვევაში E მატრიცას აქვს $E = \text{diag}(E_1, \dots, E_s)$ ბლოკურ დიაგონალური სახე, სადაც, თავის მხრივ, ნებისმიერი i -თვის, სრულდება ტოლობა

$$E_i = \rho^i I + N_i, \quad (1.2.8)$$

N_i ზედა სამკუთხა ნილპოტენტური მატრიცაა. R -ით აღვნიშნოთ მატრიცა $R = \text{diag}(\rho^1 I, \dots, \rho^s I)$. მატრიცები R და E კომუტირებენ. აქედან გამომდინარე, ამ მატრიცების გადამრავლება დადის ბლოკების გადამრავლებაზე, ხოლო R მატრიცის ყოველი ბლოკი არის სკალარული მატრიცი.

A მატრიცის ნორმირება შესაძლებელია დაიწეროს ისეთი $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$ ბლოკური სახით, რომ ყოველ ბლოკს ექნება სახე

$$A_i = \begin{pmatrix} \psi_i^1 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_i^2 I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \psi_i^{m_i} I \end{pmatrix}, \quad (1.2.9)$$

სადაც $\psi_i^1 > \dots > \psi_i^{m_i}$.

$L(z)$ და $L(0)$ მატრიცები იმ ზომის ბლოკებად დავყოთ, როგორც არის E მატრიცის შემთხვევაში, ხოლო E_i , $L_i(z)$, $L_i(0)$ მატრიცები კი იმ ზომის ბლოკებად დავყოთ, როგორც არის A_i მატრიცის შემთხვევაში, მივიღებთ:

$$E_i = \begin{pmatrix} E_{11}^i & E_{12}^i & \dots & E_{1m_i}^i \\ 0 & E_{22}^i & \dots & E_{2m_i}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{m_i m_i}^i \end{pmatrix},$$

$$L_i(z) = \begin{pmatrix} \psi_i^1 I + E_{11}^i & z^{\psi_i^1 - \psi_i^2} E_{12}^i & \dots & z^{\psi_i^1 - \psi_i^{m_i}} E_{1m_i}^i \\ 0 & \psi_i^2 I + E_{22}^i & \dots & z^{\psi_i^2 - \psi_i^{m_i}} E_{2m_i}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \psi_i^{m_i} I + E_{m_i m_i}^i \end{pmatrix}, \quad (1.2.10)$$

$$L_i(0) = \begin{pmatrix} \psi_i^1 I + E_{11}^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_i^2 I + E_{22}^i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \psi_i^{m_i} I + E_{m_i m_i}^i \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ (1.2.6) სისტემა არის ფუქსის ტიპის ნულ წერტილში, მაშინ $B(z) = B_0(z)/z$, სადაც $B_0(z)$ პოლომორფულია ნულში. (1.2.6) და (1.2.7)-დან, ამ შემთხვევებში მივიღებთ:

$$B_0(z)U(z) = z \frac{dU}{dz} + U(z)L(z), \quad B_0(0)U(0) = U(0)L(0) \quad (1.2.11)$$

აუცილებლობას დავამტკიცებთ საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით. დავუშვათ $\det U(0) = 0$ და განვიხილოთ $U(0)$ მატრიცის $\text{Ker} U(0)$ ბირთვი. ე. ი. ყველა ვექტორი $\mathbb{C}^n$ -დან, რომლებიც $U(0)$ მატრიცას გადაჰყავს ნულში. ბოლო (1.2.11) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $L(0)$ წრფივი ასახვა $\text{Ker} U(0)$ -ს გადასახავს თავის თავში. $c \in \text{Ker} U(0)$ და c -თი აღვნიშნოთ $L(0)$ ასახვის საკუთრივი ვექტორი, მაშინ $L(0)c = c\beta_1^l$, სადაც $\beta_1^l = \varphi^l + \psi_1^l$ რომელიმე i -სა და l -თვის. იგივე $L(0)$ მატრიცისათვის (1.2.10)-დან მივიღებთ, რომ c ვექტორს აქვს შემდეგი ბლოკური სტრუქტურა:

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ c_i \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ c_i^l \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_i^l = \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_t \end{pmatrix},$$

სადაც t არის $L_i(0)$ მატრიცის $\psi_i^l I + E_{ll}^i$ ბლოკის განზომილება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, c ვექტორის არანულოვანი კომპონენტები მდებარეობენ იგივე ნომრის სტრიქონებში, რა ნომერიც აქვთ მითითებულ $L(0)$ მატრიცის ბლოკს.

$L(0)$ მატრიცის ბლოკური სახიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\tilde{z}^{A+R} c = \tilde{z}^{L(0)}, \quad c = \tilde{z}^{\beta_i^l} c.$$

განვიხილოთ $y_c = Y_e c$ ამონახსნი. c ვექტორის სახიდან გამომდინარეობს, რომ $\varphi(y_c) = \psi_i^l$. ვაჩვენებთ, რომ $\varphi(y_c) > \psi_i^l$ და მივალთ წინააღმდეგობამდე (რომლისგანაც გამომდინარეობს, რომ წინადადება $U(0)$ მატრიცის გადაგვარებულობის შესახებ, არის მცდარი).

$\tilde{E}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მატრიცა $E - R$. (1.2.8)-დან გამომდინარეობს, რომ მატრიცა $\tilde{E} = \text{diag}(N_1, \dots, N_s)$ ნილპოტენტურია. გავითვალისწინოთ, რომ E და R მატრიცები კომუტირებენ, ვექტორ-ფუნქცია $\tilde{z}^{-\beta_i^l} y_c$ წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \tilde{z}^{-\beta_i^l} y_c &= Y_e \tilde{z}^{-\beta_i^l} c = U(z) z^A \tilde{z}^E \tilde{z}^{-A-R} c = U(z) z^A \tilde{z}^{\tilde{E}} z^{-A} c = U(z) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \ln^k \tilde{z} (z^A \tilde{z}^{\tilde{E}} z^{-A})^k \right) c = \\ &= U(z) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \ln^k \tilde{z} (L(z) - A - R)^k \right) c = U(z) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \ln^k \tilde{z} (L(0) - A - R + O(z))^k \right) c = \\ &= U(z) \left(I + O(z \ln^{n-1} \tilde{z}) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \ln^k \tilde{z} (L(0) - A - R + O(z))^k \right) c = \end{aligned}$$

$$= U(z)c + O(z \ln^{n-1} \bar{z})c = U(0)c + O(z \ln^{n-1} \bar{z})c = O(z \ln^{n-1} \bar{z}),$$

რადგან

$$(L(0) - A - R)c = 0, U(0)c = 0.$$

ამის გამო, ნებისმიერი $\lambda < \psi_i^1 + 1$ რიცხვისათვის მივიღებთ:

$$y_c(\bar{z})\bar{z}^{-\lambda} = y_c(\bar{z})\bar{z}^{-\psi_i^1-1+\varepsilon} = y_c(\bar{z})\bar{z}^{-\rho^i-\psi_i^1-1+\varepsilon} = O(z \ln^{n-1} \bar{z})\bar{z}^{\rho^i-1+\varepsilon},$$

სადაც $\varepsilon > 0$ და $\operatorname{Re}(\rho^i - 1 + \varepsilon) > -1$. ამის გამო, $y_c(\bar{z})\bar{z}^{-\lambda} \rightarrow 0$, როდესაც $z \rightarrow 0$. აქედან გამომდინარე გვაქვს, $\varphi(y_c) \geq \psi_i^1 + 1$. რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას $\varphi(y_c) = \psi_i^1$. მიღებული წინააღმდეგობა ნიშნავს, რომ წინადადება $U(0)$ მატრიცის გადაგვარებულობის შესახებ, არ არის მართებული, ე. ი. $U(z)$ ჰოლომორფულად შებრუნებადია ნულში.

ნებისმიერი ლეველის ბაზისისათვის, ამ თეორემის მტკიცება გამომდინარეობს თეორემა 1.2.1-დან და იმ ფაქტიდან, რომ წარმოდგენაში

$$Y'(\bar{z}) = U'(z)z^{A'}\bar{z}^{E'},$$

ლეველის ბაზისისათვის (ამ შემთხვევაში ყველა მატრიცა აღვნიშნეთ შტრიხებით, რომ ეს შემთხვევა განგვესხვავებინა ლეველის სუსტი ბაზისის შესაბამისი შემთხვევისაგან) სამართლიანია უტოლობა $\operatorname{tr} A' \geq \operatorname{tr} A$. მართლაც, ბოლო უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\det U'(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციის ნულის რიგი, წერტილში ნული, არ აღემატება $\det U(z)$ ნულის რიგს (რადგან $Y' = YS$ და $\det Y' = \det Y \det S$, $\det S \neq 0$), მაგრამ დამტკიცებულის გამო, $\det U(0) \neq 0$, ე. ი. $U'(z)$ მატრიცა ჰოლომორფულად შებრუნებადია ნულში.

ფუქსის სისტემის შემთხვევაში, (1.2.4) დაშლაში მონაწილე რიცხვებს $\beta^j = \varphi^j + \rho^j$, $j = 1, \dots, n$, ეწოდებათ საბაზისო ამონახსნის ასიმპტოტიკის მახასიათებლები ნულ წერტილში (ამის გამო მათ ეწოდებათ (1.2.1) სისტემის მახასიათებლები ნულ წერტილში).

(1.2.11) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_0(z)}{z} y \quad (1.2.12)$$

ფუქსის სისტემის მახასიათებლები ნულ წერტილში ემთხვევიან $B_0(0)$ მატრიცის საკუთრივ მნიშვნელობებს.

შენიშვნა. ფუქსის სისტემის მონოდრომიის მატრიცების პოვნა, სისტემის კოეფიციენტების საშუალებით, ე. წ. არარეზონანსულ შემთხვევებში (ზემოთ მოყვანილ სისტემას ეწოდება არა რეზონანსული, თუ $B_0(0)$ მატრიცის არცერთი საკუთრივი მნიშვნელობა არ განსხვავდება ნატურალური რიცხვით. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე. ი. თუ რომელიმე ორი საკუთრივი მნიშვნელობის სხვაობა ნატურალური რიცხვია, სისტემას ეწოდება *რეზონანსული* ნულში) არაა რთული.

წინადადება 1.2.1. [22] თუ (1.2.12) ფუქსის სისტემა არის არარეზონანსული ნულში, მაშინ ამ სისტემის მონოდრომიის მატრიცები მსგავსია $\exp(2\pi i B_0(0))$ მატრიცის.

დამტკიცება. განვიხილოთ კვლავ (1.2.4) დაშლა ლეველის სუსტ (e) ბაზისში. (1.2.9) წარმოდგენაში ყოველი A_i სკალარია ე. ი. $\psi_i^1 = \dots = \psi_i^{m_i}$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, სხვაობა

$$\beta_i^1 - \beta_i^{m_i} = \psi_i^1 + \rho^i - \psi_i^{m_i} - \rho^i = \psi_i^1 - \psi_i^{m_i}$$

არის ნატურალური რიცხვი. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ β_i^j რიცხვები არიან $B_0(0)$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები, ამიტომ (1.2.12) სისტემა გამოვა რეზონანსული ნულში. აქედან გამომდინარე, A და E კომუტირებენ, ამიტომ $L(0) = A + E$ ტოლობიდან და (1.2.11)-დან მივიღებთ:

$$B_0(0) = U(0)(A + E)U^{-1}(0),$$

$$\exp(2\pi i B_0(0)) = U(0)\exp(2\pi i(A + E))U^{-1}(0) = U(0)GU^{-1}(0).$$

თეორემა 1.2.1-ის საკმარისობის დამტკიცებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ თუ (1.2.1) სისტემის რომელიმე (არა აუცილებლად ლეველის ბაზისის შესაბამისი) Y_e ფუნდამენტური მატრიცა წარმოდგენილია (1.2.4) ფორმით, სადაც $U(z)$ ნულში ჰოლომორფულად შებრუნებადია, A რაიმე მთელრიცხვებიანი დიაგონალური მატრიცაა,

E კი ნებისმიერი მატრიცაა და მატრიცული ფუნქცია $z^A E z^{-A}$ ჰოლომორფულია ნულში, მაშინ სისტემა (1.2.1) არის ფუქსის ტიპის.

ლეველის თეორია გამოვიყენოთ სკალარული, n რიგის განტოლების შემთხვევაში, რომელიც პარაგრაფ 1.1-ში განვიხილეთ. ყოველ ფუქსის განტოლებას, $z = 0$ განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში აქვს სახე:

$$z^n u^{(n)} + z^{n-1} r_1(z) u^{(n-1)} + \dots + r_n(z) u = 0. \quad (1.2.13)$$

ამ განტოლებასთან ერთად განვიხილოთ ეილერის განტოლება:

$$z^n u^{(n)} + z^{n-1} r_1(0) u^{(n-1)} + \dots + r_n(0) u = 0. \quad (1.2.14)$$

ეილერის განტოლების ამონახსნი მიიღება შემდეგნაირად: განვიხილოთ *მახასიათებელი* განტოლება

$$\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + \dots + \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + i + 1) r_i(0) + \dots + r_n(0) = 0. \quad (1.2.15)$$

ყოველ k_i ჯერადობის მქონე λ_i ფესვს შეესაბამება ეილერის განტოლების, k_i რაოდენობის ამონახსნი $\tilde{z}^{\lambda_i} \ln^l(\tilde{z})$, $l = 0, \dots, k_i - 1$. (1.2.15) განტოლების λ_i ფესვები არიან ეილერის განტოლების ამონახსნის *ასიმპტოტიკის მაჩვენებლები* ნულში. ფუქსის განტოლება შეიძლება განვიხილოთ როგორც შესაბამისი *ეილერის განტოლების ჰოლომორფული დეფორმაცია* (რომლისთვისაც $r_i(0)$ რიცხვები იცვლებიან $r_i(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციებით). (1.2.15) განტოლების ფესვები არიან (1.2.13) განტოლების ამონახსნის ასიმპტოტიკის მაჩვენებლები.

ლეველის თეორია უცვლელად გადადის ფუქსის სკალარულ განტოლებაზე. ერთადერთი განსხვავება არის ის, რომ (1.2.4) წარმოდგენაში, ფუქსის სკალარული განტოლებისათვის, რომელსაც გადავწერთ

$$Y_n(\tilde{z}) = U_n(\tilde{z}) \tilde{z}^A \tilde{z}^E$$

სახით, მატრიცები არიან $1 \times n$ ზომის ე. ი. ვექტორებია. Y_n მატრიცის $e_1, \dots, e_n$ ელემენტები არიან (1.2.13) განტოლების ამონახსნთა სივრცის ლეველის (სუსტი)

ბაზისის შემადგენელი ელემენტები, ხოლო $U_n(\tilde{z})$ მატრიცის ელემენტები ჰოლომორფულია ნულში.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$y^1 = u, y^2 = zu', \dots, y^n = z^{n-1}u^{(n-1)}.$$

(1.2.13) განტოლებიდან ფუქსის სისტემაზე გადასვლა ხდება

$$B_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -r_n & -r_{n-1} & -r_{n-2} & -r_n & \dots & (n-1) - r_1 \end{pmatrix} \quad (1.2.16)$$

კოეფიციენტების მატრიცით. მტკიცდება, რომ (1.2.13) განტოლებისა და სისტემების (1.2.12) ლეველის მახასიათებლები ემთხვევიან, სადაც $B_0(z)$ მოცემულია (1.2.16) სახით [4], [21]. გარდა ამისა, (1.2.13) ფუქსის განტოლების β^j ლეველის მახასიათებლები ემთხვევიან (1.2.15) მახასიათებელი განტოლების ფესვებს [4].

თავი II. რეგულარულ განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაცია და მისი კანონიკური გაგრძელება

2.1. ჰოლომორფული ფიბრაცია ბმულობით, დამხმარე დებულებები და განმარტებები

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ სტანდარტულ ფაქტებს მრავალსახეობაზე, კოციკლების საშუალებით მთვარი და ვექტორული ფიბრაციების აგების შესახებ და მათ მუდმივად გამოვიყენებთ მომავალში, მსჯელობების დროს [5],[7-8], [14-15], [24], [35].

P მთავარი ფიბრაცია, *G* ჯგუფის სტრუქტურით, ეწოდება ოთხეულს $P = (P_E, B, \pi, G)$, სადაც

1. P_E და B მრავალსახეობებია; G ლის ჯგუფია, რომელიც მარჯვნიდან მოქმედებს P_E მრავალსახეობაზე, ხოლო ასახვა $\pi : P_E \rightarrow B$, არის სურექცია;
2. B სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის, არსებობს x ელემენტის მიდამო U და არსებობს ჰომეომორფიზმი, $f_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, ისე, რომ

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{f_U} & U \times G \\ \pi \searrow & & \swarrow pr \\ & U & \end{array}$$

დიაგრამა კომუტაციურია. გარდა ამისა, სრულდება ე. წ. ეკვივარიანტულობის თვისება - $f_U(\tilde{x}g) = f_U(\tilde{x})g$, $\forall \tilde{x} \in \pi^{-1}(U)$ და $\forall g \in G$.

P_E -ს ეწოდება ფიბრაციის ტოტალური სივრცე, B -ს ფიბრაციის ბაზა, π -ს პროექცია, $\pi^{-1}(x)$ -ს ფიბრაციის ფენა, $\pi^{-1}(x) \cong G$. მეორე თვისება ნიშნავს იმას, რომ P ლოკალურად ტრივიალურია.

თუ ყველა მრავალსახეობა და ყველა ასახვა, რომელიც მონაწილეობს ფიბრაციის განსაზღვრებაში, გლუვია (ანალიზურია, ჰოლომორფულია), მაშინ P ფიბრაციას ეწოდება გლუვი (ანალიზური, ჰოლომორფული) ფიბრაცია.

ვთქვათ $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, განხილეთ კომპუტაციური დიაგრამა

$$\begin{array}{ccccc}
 (U_i \cap U_j) \times G & \xleftarrow{f_i} & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{f_j} & (U_i \cap U_j) \times G \\
 & \searrow \text{pr} & \downarrow \pi & \swarrow \text{pr} & \\
 & & U_i \cap U_j & &
 \end{array}$$

$$f_j \circ f_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times G \rightarrow (U_i \cap U_j) \times G$$

ასახვას (x, e) წერტილი გადაჰყავს $(x, g^*(x))$ წერტილში. ეკვივარიანტულობის თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $x \in B$ და $g \in G$ სამართლიანია თანადობა $(x, g) = (x, e)g \rightarrow (x, g^*(x))g = (x, g^*(x)g)$. $g_{ji}(x)$ -ით აღვნიშნოთ $g^*(x)$. ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ

$$f_j \circ f_i^{-1}(x, g) \equiv (x, g_{ji}(x)g), \text{ სადაც } g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G.$$

ასახვის აგებიდან გამომდინარეობს, რომ $g_{ij}(x) = (g_{ji}(x))^{-1}$, ყოველი x -თვის, $x \in U_i \cap U_j$.

რადგან $f_j \circ f_i^{-1} \circ f_i \circ f_j^{-1} = \text{id}$, ამიტომ $(x, g) = f_j \circ f_i^{-1} \circ f_i \circ f_j^{-1}(x, g) = f_j \circ f_i^{-1}(x, g_{ij}g) = (x, g_{ij}g_{ij}g)$, ე. ი. $g_{ji}(x)g_{ij}(x) = e$.

თუ $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, რადგან $f_j \circ f_i^{-1} \circ f_i \circ f_k^{-1} \circ f_k \circ f_j^{-1} = \text{id}$, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}
 (x, g) &= f_j \circ f_i^{-1} \circ f_i \circ f_k^{-1} \circ f_k \circ f_j^{-1}(x, g) = f_j \circ f_i^{-1} \circ f_i \circ f_k^{-1}(x, g_{kj}g) = f_j \circ f_i^{-1}(x, g_{ik}g_{kj}g) = \\
 &= (x, g_{ji}g_{ik}g_{kj}g).
 \end{aligned}$$

საბოლოოდ გვექნება $g_{ji}g_{ik}g_{kj} = e$. ამრიგად, თუ P მთავარი ფიბრაციისათვის $\{U_i\}$ არის B ბაზის დაფარვა და $\{f_i\}$ ფიქსირებული ტრივიალიზაციაა U_i -ზე, მაშინ შეიძლება ავაგოთ ასახვები რომლებსაც გააჩნია თვისებები

$$g_{ij}(x) = (g_{ji}(x))^{-1} \text{ და } g_{ij}(x)g_{jk}(x)g_{ki}(x) = e$$

და პირიქით, ნებისმიერი B მრავალსახეობის $\{U_i\}$ დაფარვით და ნებისმიერი ასახვებით, რომელთაც აქვთ აღნიშნული ორი თვისება, შესაძლებელია აიგოს მთავარი $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_E, B, \pi', G)$ ფიბრაცია.

$\{g_{ij}\}$ ასახვების ოჯახს ეწოდება P ფიბრაციის კოციკლი. კოციკლი ცალსახად არ განისაზღვრავს ფიბრაციას. ის დამოკიდებულია დაფარვებსა და $\{f_i\}$ ლოკალური ტრივიალიზაციების არჩევაზე.

n რანგის F ვექტორული ფიბრაცია ეწოდება სამეულს $F = (F_E, B, \pi)$, სადაც

1. F_E და B მრავალსახეობებია ; ასახვა $\pi : F_E \rightarrow B$, არის სურექცია;
2. B სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის, სიმრავლე $\pi^{-1}(x)$ წრფივი სივრცეა;
3. B სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის, არსებობს x ელემენტის მიდამო U და არსებობს ჰომეომორფიზმი, $\tilde{f}_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$, ისე, რომ

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{f}_U} & U \times \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) \\ & \searrow \pi \quad \swarrow pr & \\ & U & \end{array}$$

დიაგრამა კომუტაციურია და ასახვა $\tilde{f}_U^x : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ არის წრფივი სივრცეების იზომორფიზმი. $\tilde{f}_U^x$ - არის $\tilde{f}_U$ ასახვის შეზღუდვა $\pi^{-1}(x)$ -ზე.

F_E -ს ეწოდება ფიბრაციის ტოტალურ სივრცე, B -ს ფიბრაციის ბაზა, π -ს პროექცია, $\pi^{-1}(x)$ -ს ფიბრაციის ფენა, $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$. მესამე თვისება ნიშნავს იმას, რომ F ლოკალურად ტრივიალურია.

თუ ყველა ასახვა, რომელიც მონაწილეობს ვექტორული ფიბრაციის განსაზღვრებაში, უწყვეტია (გლუვია, ანალიზურია და ა. შ.), მაშინ F ვექტორულ ფიბრაციას ეწოდება ტოპოლოგიურად უწყვეტი (გლუვი, ანალიზური და ა. შ.) ფიბრაცია. ჩვენ ვიხილავთ ისეთ შემთხვევებს, როდესაც ასახვები არის გლუვი და ანალიზური.

განვიხილოთ ფიბრაციის აგების კონსტრუქცია არაკომპაქტურ რიმანის ზედაპირზე, თავისი ფუნდამენტური ჯგუფის წარმოდგენის საშუალებით.

ვთქვათ რიმანის სფეროზე მოცემულია სასრული რაოდენობის წერტილები $s_1, s_2, \dots, s_m$, აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ -ით და განვიხილოთ წარმოდგენა:

$$\chi : \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus S, z_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

$$\chi(\gamma_i) = G_i, \forall i = 1, \dots, m,$$

სადაც γ_i არის წირი, რომლის საწყისი და საბოლოო წერტილი არის z_0 და შემოუვლის მხოლოდ ერთ s_i წერტილს, საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, $i \in \{1, \dots, m\}$. განვიხილოთ მრავალსახეობა $X_m = \mathbb{CP}^1 \setminus S$ და ამ მრავალსახეობის დაფარვა ბმული და ცალადბმული, ღია სიმრავლეებით ისე, რომ თუ ორი მათგანის თანაკვეთა არაცარიელია, მაშინ მათი თანაკვეთაც ბმული და ცალადბმულია. X_m -თვის ყოველთვის შესაძლებელია ასეთი დაფარვის მონახვა. თითოეული U_i ღია სიმრავლიდან ავირჩიოთ ერთი წერტილი და η_i გზით შევაერთოთ არჩეულ წერტილთან z_0 წერტილი. ეს გზები დავაფიქსიროთ. თუ $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ განვიხილოთ გზა, რომელიც მდებარეობს სიმრავლეში $U_i \cup U_j$ და აერთებს U_i და U_j სიმრავლეებში მონიშნულ წერტილებს ე. ი. η_i და η_j მარყუჟების განსხვავებულ ბოლოებს. ეს გზა აღვნიშნოთ δ_{ij} -ით. განვიხილოთ $\eta_i \delta_{ij} \eta_j^{-1}$ მარყუჟი. ყოველ ასეთ მარყუჟს შეესაბამება ჰომოტოპიის კლასი და $\chi(\eta_i \delta_{ij} \eta_j^{-1}) = g_{ij}$ გადაუგვარებელი მატრიცა. ფიქსირებული η_i და η_j გზებისათვის g_{ij} მატრიცა არ არის დამოკიდებული δ_{ij} -ზე, რადგან ცალადბმული სიმრავლეებია როგორც დამფარავი სიმრავლეები, ასევე მათი თანაკვეთები.

$U_i \cap U_j$ სიმრავლის თითოეულ ელემენტს შევუსაბამოთ g_{ij} მატრიცა. ამ გზით მივიღებთ მუდმივ ასახვას $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$.

აგებიდან გამომდინარეობს, რომ $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ და რადგან $\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki}$ ნულის ჰომოტოპიურია, ანუ z_0 წერტილში მოჭიმვადია, მივიღებთ რომ $g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1$, ე. ი. g_{ij} მატრიცები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც გადასვლის ფუნქციები. ამრიგად, ავაგეთ კოციკლები, რაც თავის მხრივ ნიშნავს, რომ შეგვიძლია, ზოგადი კონსტრუქციის მიხედვით, ავაგოთ

მთავარი ფიზრაცია. კერძოდ, თუ $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, მაშინ $U_i \cap U_j$ სიმრავლეზე საჭიროა წერტილების გაიგევება: თუ $(z, v) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$, მაშინ ელემენტი (z, v) გავაიგივოთ ელემენტთან $(z, g_{ij}v)$, თუ ამგვარ გაიგივებას მოვახდენთ, მაშინ g_{ij} კოციკლების პირობები $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ და $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ ნიშნავს, რომ ასეთი გაიგივება კორექტულია და მიიღება მრავალსახეობა F , ბუნებრივი პროექცია $\pi : F \rightarrow \mathbb{CP}^1 \setminus S$ და სამეული $(F, \mathbb{CP}^1 \setminus S, \pi)$ იქნება n რანგის ვექტორული ფიზრაცია.

ვთქვათ ასახვა $s : \mathbb{CP}^1 \setminus S \rightarrow F$ არის კვეთა ე. ი. $\pi \circ s = \text{id}$. კვეთა ვექტორული ფუნქციის განზოგადებება. მართლაც, თუ U_i ღია სიმრავლეზე, s იქნება ფუნქცია, განსაზღვრული U_i -ზე, მნიშვნელობებით $\mathbb{CP}^1$ -ში. ნამდვილი კვეთის შემთხვევაში კი მოგვიწევს ვექტორული ფუნქციების გაიგივება, გარკვეული კანონზომიერებით, ყოველი U_i და U_j ღია სიმრავლეებისათვის, რომლებისთვისაც $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. თუ $\mathbb{CP}^1$ -ის სტანდარტულ ბაზისში ჩავწერთ s კვეთას, მაშინ ყოველ U_i -ში გვექნება მისი დაშლა $y_i = (y_i^1, y_i^2, \dots, y_i^n)$.

g_{ij} -ს მუდმივობის გამო, კვეთების დიფერენცირებადობის წესი შეგვიძლია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: განვიხილოთ s კვეთა, U_i -ზე, ჩავწეროთ იგი სტანდარტულ ბაზისში და s -ის ∇_s დიფერენციალად გამოვაცხადოთ y_i ვექტორის დიფერენციალი dy_i , ე. ი. $\nabla_s \leftrightarrow dy_i$.

კონსტრუქციის შემდეგი ნაბიჯია თითოეული ასეთი დიფერენციალის გაიგივება ისე, რომ იგი გამოდგეს s გლობალური კვეთის დიფერენციალად. გაიგივება კვლავ g_{ij} კოციკლების საშუალებით უნდა მოხდეს და შესრულდეს ტოლობა $dy_j = g_{ij}dy_i$.

თუ ეს ტოლობა შესრულდა, მაშინ s კვეთის ნაწილებისაგან შესაძლებელი იქნება გლობალური კვეთის მიღება, რომელიც კორექტულად განსაზღვრული დიფერენციალი იქნება ე. ი. იმისათვის, რომ კვეთის დიფერენციალი ვიპოვოთ, საჭიროა კვეთის დიფერენციალი ვიპოვოთ ლოკალურად, შემდეგ მიღებული 1-ფორმები გავაიგივოთ, ხოლო ბოლოს კი შევამოწმოთ, აკმაყოფილებენ თუ არა ისინი გაიგივების კორექტულობის პირობას. რადგან g_{ij} კოციკლები მუდმივებია, კორექტულობის პირობა გამომდინარეობს $g_{ij}dy_j = dg_{ij}y_j$ ტოლობიდან, საიდანაც თავის მხრივ გამოდის, რომ g_{ij}

კოციკლი კორექტულად აიგივებს (აწებებს) dy_i და dy_j დიფერენციალებს U_i ო U_j სიმრავლეზე

$$g_{ji} dy_j = dy_i.$$

S კვეთის შესაბამისი დიფერენციალი აღვნიშნოთ ∇_s -ით. იმ კვეთებს, რომლებისთვისაც სრულდება ტოლობა $\nabla_s = 0$, ეწოდებათ *ჰორიზონტალური* კვეთები.

ფიბრაციისათვის კვეთების ჰორიზონტალურობა ნიშნავს $dy_i = 0$ ტოლობის შესრულებას. ამრიგად, *მოცემულია ∇ ბმულობა ნიშნავს, რომ მოცემულია კვეთის დიფერენცირების წესი, რაც ჩვენს შემთხვევაში, $dy_i = 0$ დიფერენციალური განტოლების მოცემის ექვივალენტურია.*

2.2. რიმანის სფეროზე, რეგულარული განტოლების, გლობალურ ამონახსნთა სივრცის, რიცხვითი მახასიათებლები

განვიხილოთ $\mathbb{CP}^1$ -ზე, გაფართოებულ კომპლექსურ სიბრტყეზე, n რანგის F ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაცია, ∇ მერომორფული ბმულობით. ბმულობის განსაკუთრებული წერტილები აღვნიშნოთ $s_1, s_2, \dots, s_m$ -ით. ვიგულისხმობთ, რომ ეს წერტილები, ∇ -სათვის, რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებია და ∞ წერტილი ბმულობის ჰოლომორფულობის წერტილია.

ყოველი s_i , $i = 1, \dots, m$, განსაკუთრებული წერტილისათვის განვიხილოთ ამ წერტილის მიდამო $\dot{O}$ და F ფიბრაციის რაიმე ტრივიალიზაცია $\dot{O}$ -ზე. ლოკალური კვეთების შესაბამის ბაზისში, ∇ ბმულობა განსაზღვრავს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. განვიხილოთ განტოლებათა ეს სისტემა:

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y. \quad (2.2.1)$$

პარაგრაფ 1.2.-ში განხილული ლოკალური თეორია, შეიძლება, გამოყენებულ იქნას (2.2.1) სისტემის მიმართ წერტილის O_i მიდამოში. შედეგად მივიღებთ შესაბამის მატრიცებს, ნორმირებებს, მაჩვენებლებს და ა. შ. ისინი ყველა დამოკიდებული იქნება i ინდექსზე და მათ აღვნიშნავთ Y_i (Y_e – ს ნაცვლად) U_i , A_i , E_i , ρ_i^j , φ_i^j , β_i^j , Y_i სიმბოლოებით, რითაც მივუთითებთ მათ დამოკიდებულებას ინდექსზე.

A_i და E_i მატრიცები და ρ_i^j , φ_i^j , β_i^j რიხვები არ არიან დამოკიდებულნი O_i -ზე ფიბრაციის ტრივიალიზაციის არჩევაზე, მაშინ როდესაც Y_i და U_i მატრიცები მარცხნიდან მრავლდებიან ჰოლომორფულად შებრუნებად მატრიცულ $\Gamma(z)$ ფუნქციაზე, $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ ჰოლომორფული კვეთების ლოკალური ბაზისიდან $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)\Gamma^{-1}$ ბაზისზე გადასვლისას. $\{\beta_i^j\}$ რიხვებს ეწოდებათ ∇ ბმულობის მაჩვენებლები s_i წერტილში.

განვიხილოთ F ტრივიალური ფიბრაციის შემთხვევა. ამ ფიბრაციის გლობალური ჰოლომორფული კვეთების ბაზისში ∇ ბმულობა განსაზღვრავს განტოლებათა სისტემას

$$dy = \omega y,$$

მთელ გაფართოებულ კომპლექსურ სიბრტყეზე.

B_i -ით აღვნიშნოთ ω მატრიცული დიფერენციალური 1-ფორმის ნაშთი s_i წერტილში. თუ სისტემა ფუქსის ტიპისაა, მაშინ

$$\omega = \sum_{i=1}^m \frac{B_i dz}{z - s_i}$$

ფორმა მერომორფულია $\mathbb{CP}^1$ რიმანის სფეროზე და აქედან გამომდინარე, კოეფიციენტთა (მატრიცების) ჯამი ნულია, ამიტომ z კოორდინატთა სისტემაში ფუქსის ტიპის სისტემა ღებულობს სახეს

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{B_i}{z - s_i} \right) y, \quad \sum_{i=1}^m B_i = 0.$$

შემდეგი თეორემები აკავშირებს სისტემის, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ, ლოკალურ ლეველის ფილტრაციებს (უფრო ზუსტად მაჩვენებლებს), სხვადასხვა განსაკუთრებულ წერტილებში.

თეორემა 2.2.1 [4], [22]. (2.2.1) სისტემის, რომელსაც აქვს სასრული რაოდენობის განსაკუთრებული წერტილები $s_1, s_2, \dots, s_m$, ამონახსნთა X სივრცის ყველა მაჩვენებლების ჯამი არის მთელი რიცხვი და ის არ აღემატება ნულს:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i^j \leq 0.$$

სისტემა, სასრული რაოდენობის რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებით, არის ფუქსის ტიპის $\mathbb{CP}^1$ -ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\Sigma = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i^j = 0.$$

განვიხილოთ ფუქსის განტოლება, $s_1, s_2, \dots, s_m$ სასრული რაოდენობის განსაკუთრებული წერტილებით $\mathbb{CP}^1$ -ზე,

$$u^{(n)} + q_1(z)u^{(n-1)} + \dots + q_n(z)u = 0. \quad (2.2.2)$$

დებულება 2.2.1 (დამტკიცება იხ. [4]-ში) რიმანის სფეროზე, (2.2.2) n რიგის, m სასრული რაოდენობის განსაკუთრებული წერტილის მქონე, ფუქსის სკალარული დიფერენციალური განტოლება დამოკიდებულია

$$N_{eq} = \frac{(m-2)n(n+1)}{2} + n \quad (2.2.3)$$

თავისუფალ პარამეტრზე, ხოლო მისი შესაბამისი მონოდრომიის წარმოდგენა კი დამოკიდებულია

$$N_{mon} = n^2(m-2) + 1 \quad (2.2.4)$$

პარამეტრზე.

ამ დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ მონოდრომიის წარმოდგენით, ფუქსის განტოლების (სკალარული) აღდგენა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც მონოდრომიისა და განტოლების თავისუფალ პარამეტრთა რაოდენობა ერთმანეთს ემთხვევა. ასეთ განტოლებებს უწოდებენ *აქსესორული პარამეტრებისაგან თავისუფალ განტოლებებს*. მის კერძო შემთხვევას განვიხილავთ მე-4 თავში.

თეორემა 2.2.2 [4], [21-22] (ფუქსის თანაფარდობა). რიმანის სფეროზე, სასრული რაოდენობის განსაკუთრებული $s_1, s_2, \dots, s_m$ წერტილების მქონე, ფუქსის სკალარული (2.2.2) განტოლების β_i^j მაჩვენებლებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i^j = \frac{(m-2)n(n-1)}{2}, \quad (2.2.5)$$

კვლავ განვიხილოთ რიმანის სფეროზე, F ვექტორული ფიბრაცია, ∇ მერომორფული ბმულობით, რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებითა და საკოორდინატო $\{U_i\}$, $\{f_i\}$, $\{g_{ij}\}$, $\{\omega^i\}$ აღწერით.

განსაზღვრება. F ფიბრაციის ხარისხი $c_1(F)$ ეწოდება დეტერმინანტული ფიბრაციის $|F|$ ბმულობის $|\nabla|$ ნაშთების ჯამს. დეტერმინანტული ფიბრაცია ეწოდება ერთგანზომილებიან ფიბრაციას, რომლის განმსაზღვრელი კოციკლები არიან $\{\det g_{ij}\}$ სკალარული ფუნქციები, $|\nabla|$ -ს ბმულობის ფორმები, ლოკალურად, არიან $\{\text{tr} \omega^i\}$.

შედეგი 2.2.1. რიმანის სფეროზე, მერომორფული ბმულობის მქონე F ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაციის Σ მაჩვენებლების ჯამისათვის სრულდება უტოლობა

$$\Sigma = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i^j \leq c_1(F).$$

ბმულობა, რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებით, არის ლოგარითმული (ფუქსის) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\Sigma = c_1(F).$$

ფუქსის თანადობის გათვალისწინებით, ჰიპერგეომეტრიული განტოლება პარაგრაფ 1.1-დან, რომლის განსაკუთრებული წერტილებია $0, 1, \infty$ და მაჩვენებლები ამ წერტილებში შესაბამისად არიან რიცხვები: $\beta_0^1 = \beta_1^1 = 0$, $\beta_0^2 = 1 - \gamma$, $\beta_1^2 = \gamma - \alpha - \beta$, $\beta_\infty^1 = \alpha$, $\beta_\infty^2 = \beta$, $\gamma \in \mathbb{C}$ მიიღებს შემდეგ კანონიკურ სახეს

$$u'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1-z)} u' - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)} u = 0.$$

ეს უკანასკნელი არის აქსესორული პარამეტრებისაგან თავისუფალი განტოლება [23-24].

დებულება 2.2.2 [23], [39]. რიმანის სფეროზე, ნებისმიერი მეორე რიგის ფუქსის განტოლება სამი განსაკუთრებული წერტილით, შესაძლებელია მივიყვანოთ ჰიპერგეომეტრიულ განტოლებაზე, z არგუმენტის წილად-წრფივი გარდაქმნითა და u უცნობი ფუნქციის, $u = z^\alpha(z-1)^\beta u$, გარდაქმნის საშუალებით.

2.3. განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ფიბრაცია

განვიხილოთ რეგულარულ განტოლებათა სისტემების თეორიის შებრუნებული ამოცანა, რაც ნიშნავს

$$\chi : \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_m\}, z_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \quad (2.3.1)$$

მონოდრომიების საშუალებით ფუქსის სისტემის აგებას, მოცემული $s_1, s_2, \dots, s_m$ განსაკუთრებული წერტილებითა და მოცემული χ მონოდრომიის წარმოდგენით [4], [7], [10].

განვიხილოთ B ბაზის დაფარვა ბმული და ცალადბმული მიდამოებით $\{U_i\}$, რომლების თანაკვეთაც ასევე ბმული და ცალადბმული სიმრავლეა. ყოველ მიდამოში განვიხილოთ წერტილი z_0^i და შევაერთოთ z_0 წერტილთან η_i გზით. ყოველი არაცარიელი თანაკვეთის მქონე U_i და U_j სიმრავლეების z_0^i და z_0^j წერტილები შევაერთოთ ისეთი δ_{ij} გზით,

რომელიც მთლიანად მდებარეობს $U_i \cup U_j$ სიმრავლეში. g_{ij} სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მატრიცა:

$$g_{ij} = \chi(\eta_i \circ \delta_{ij} \circ \eta_j^{-1}),$$

სადაც $\xi \circ \zeta$ აღნიშნავს გზას, რომელიც მიიღება თანმიმდევრობით ჯერ ξ და შემდეგ ζ გზებზე მოძრაობების შედეგად (ითვლება, რომ ξ გზის ბოლო და ζ გზის დასაწყისი ერთმანეთს ემთხვევა), ხოლო ξ^{-1} აღნიშნავს გზას, რომელზეც მოძრაობის მიმართულებაც არის ξ გზაზე მოძრაობის მიმართულების საწინააღმდეგო. ξ გზის ჰომოტოპიის კლასი აღვნიშნოთ $[\xi]$ სიმბოლოთი, ხოლო იმ მუდმივი მარყუჟის ჰომოტოპიის კლასი, რომლის საწყისი და საბოლოო წერტილიც არის z_0 წერტილი, აღვნიშნოთ სიმბოლოთი e .

განსაზღვრებიდან გამომდინარე $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ და $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = I$ - იმ შემთხვევაში თუ $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

მართლაც მივიღებთ:

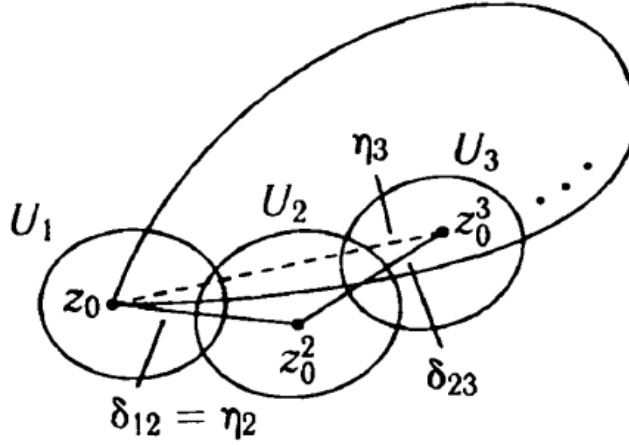
$$\begin{aligned} g_{ij}g_{jk}g_{ki} &= \chi(\eta_i \circ \delta_{ij} \circ \eta_j^{-1})\chi(\eta_j \circ \delta_{jk} \circ \eta_k^{-1})\chi(\eta_k \circ \delta_{ki} \circ \eta_i^{-1}) = \\ &= \chi(\eta_i \circ \delta_{ij} \circ \eta_j^{-1} \circ \eta_j \circ \delta_{jk} \circ \eta_k^{-1} \circ \eta_k \circ \delta_{ki} \circ \eta_i^{-1}) = \chi(\eta_i \circ \delta_{ij} \circ \delta_{jk} \circ \delta_{ki} \circ \eta_i^{-1}) = \chi(e) = I, \end{aligned}$$

რადგან მარყუჟი $\delta_{ij} \circ \delta_{jk} \circ \delta_{ki}$ მუდმივი მარყუჟის ჰომოტოპიურია.

განვიხილოთ F ვექტორული ფიბრაცია B -ზე, რომელიც აგებულია $\{U_i\}$ დაფარვითა და მუდმივი კოციკლებით $\{g_{ij}\}$. F ვექტორულ ფიბრაციაზე შემოვიღოთ ჰოლომორფული ბმულობა ∇ , რომელიც, F ვექტორული ფიბრაციის ამ საკოორდინატო აღწერაში, მოიცემა ნულოვანი $\omega_i = 0$ ფორმებით.

დებულება 2.3.1. [4], [7], [22]. ∇ ბმულობა იძლევა (2.2.1) მონოდრომიის წარმოდგენას.

დამტკიცება: განვიხილოთ γ მარყუჟი, რომელიც მთლიანად მოთავსებულია B -ში და ამ მარყუჟის სასრული დაფარვა $U_1, \dots, U_M$ (მარყუჟი კომპაქტური სიმრავლეა და ასეთი დაფარვა ყოველთვის არსებობს). ვიგულისხმობთ, რომ $z_0 \in U_1$ და $\eta_1 = z_0$. γ მარყუჟის გასწვრივ, მონოდრომია არის $G_\gamma = (g_{1M}g_{MM-1} \dots g_{21})^{-1}$.



სურათი - 2.3.1.

ჩვენს შემთხვევაში:

$$\begin{aligned}
 (g_{1M}g_{MM-1} \dots g_{21})^{-1} &= g_{21}^{-1} \dots g_{MM-1}^{-1}g_{1M}^{-1} = g_{12} \dots g_{M-1M}g_{M1} = \\
 &= \chi(\eta_1 \circ \delta_{12} \circ \eta_2^{-1}) \dots \chi(\eta_{M-1} \circ \delta_{M-1M} \circ \eta_M^{-1})\chi(\eta_M \circ \delta_{M1} \circ \eta_1^{-1}) = \\
 &= \chi(\eta_1 \circ \delta_{12} \circ \eta_2^{-1} \circ \dots \circ \eta_{M-1} \circ \delta_{M-1M} \circ \eta_M^{-1} \circ \eta_M \circ \delta_{M1} \circ \eta_1^{-1}) = \\
 &= \chi(\eta_1 \circ \delta_{12} \circ \dots \circ \delta_{M-1M} \circ \delta_{M1} \circ \eta_1^{-1}) = \chi([\gamma]),
 \end{aligned}$$

რადგან მარყუჟი $\delta_{12} \circ \dots \circ \delta_{M-1M} \circ \delta_{M1}$ არის γ მარყუჟის ჰომოტოპიური.

დებულება 2.3.2 [22]. ნებისმიერი ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაცია, რიმანის გაჩხვლეტილ სფეროზე B , ჰოლომორფული ბმულობით, რომელსაც აქვს მონოდრომიის წარმოდგენა (2.3.1) ექვივალენტურია ფიბრაციის (F, ∇) .

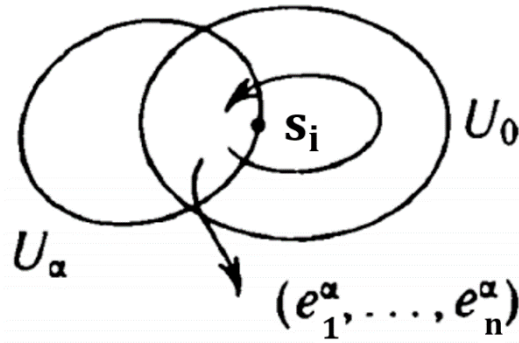
დამტკიცება: ვაჩვენებთ, რომ ნებისმიერი ორი ფიბრაცია (F^1, ∇^1) და (F^2, ∇^2) , რომლებიც აკმაყოფილებენ დებულების პირობებს, არიან ექვივალენტურები.

განვიხილოთ B ბაზის დაფარვა ისეთი U_i ცალადბმული სიმრავლეებით, რომლებზეც ორივე ფიბრაცია ტრივიალურია და შევადგოთ z_0 წერტილი (რომელიც ეკუთვნის U_0 სიმრავლეს) ყოველ U_j მიდამოსთან γ_j გზით. ყოველი ფიბრაციისათვის, U_0 -ზე განვიხილოთ ერთიდაიგივე მონოდრომიების მქონე ლოკალური ჰორიზონტალური კვეთების ბაზისი ${}^0\phi^i = ({}^0\phi_1^i, \dots, {}^0\phi_n^i)$, $i = 1, 2$ (ისეთი ბაზისი, რომლისთვისაც ნებისმიერი γ წირის გასწვრივ ანალიზური გაგრძელების შედეგი მიგვიყვანს ბაზისთან $({}^0\phi^i)G_\gamma^{-1}$, ერთიდაიგივე G_γ მატრიცით, როგორც $i = 1$ თვის, ასევე $i = 2$ თვის).

$({}^\alpha\phi^i)$ -ით აღვნიშნოთ $({}^0\phi^i)$ ბაზისის გაგრძელების შედეგი U_α მიდამოში, γ_α წირის გასწვრივ. არაცარიელი თანაკვეთის მქონე U_α და U_β მიდამოებისათვის გვაქვს: $({}^\alpha\phi^i)g_{\alpha\beta}^i = ({}^\beta\phi^i)$, $g_{\alpha\beta}^i$ მუდმივი მატრიცებია (ჰორიზონტალური კვეთების, ნებისმიერი ორი ბაზისის კოორდინატების მატრიცები აკმაყოფილებენ ერთიდაიგივე წრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემასა და ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მუდმივი მატრიცით). რადგან საწყისი ბაზისების მონოდრომიები $i = 1$ -სა და $i = 2$ -თვის ემთხვევიან, ამიტომ $g_{\alpha\beta}^1 = g_{\alpha\beta}^2$.

რადგან (F^1, ∇^1) და (F^2, ∇^2) ფიბრაციებს აქვთ $(\{U_i\}, \{g_{ij}\})$ ერთნაირი საკოორდინატო აღწერა, ∇^1 და ∇^2 ბმულობის ნულოვან ფორმებთან ერთად, ამიტომ ისინი ექვივალენტურებია.

ექვტორული ფიბრაციის გაგრძელება [10], [33]. შემდეგი ეტაპი არის აგებული ფიბრაციის გაგრძელება მთელ რიმანის სფეროზე, ∇' ლოგარიტმული ბმულობის მქონე ფიბრაციამდე, რომელიც ემთხვევა საწყის ბმულობას $s_1, s_2, \dots, s_m$ განსაკუთრებული წერტილების მიღმა.



სურათი - 2.3.2.

განვიხილოთ U_α მიდამო, რომლის საზღვარსაც ეკუთვნის წერტილი s_i . განვიხილოთ ჰორიზონტალური კვეთების ბაზისი $(e_1^\alpha, \dots, e_n^\alpha)$. რადგან ∇ ბმულობის მონოდრომია, აგების მიხედვით, ემთხვევა (2.3.1)-ს, ამიტომ საკმარისად პატარა δ_i მარყუჟის გასწვრივ, რომელიც შემოუვლის s_i განსაკუთრებულ წერტილს, საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ანალიზური გაგრძელების შედეგად, საწყისი ბაზისი გადავა ბაზისში $(e_1^\alpha, \dots, e_n^\alpha)G_i$, სადაც G_i მატრიცა არის მნოდრომიის მატრიცის მსგავსი s_i წერტილში. განვიხილოთ $(z - s_i)^{-E_i}$ ფუნქცია U_α მიდამოში, უფრო ზუსტად, ამ ფუნქციის რომელიმე შტო.

კვეთა $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) = (e_1^\alpha, \dots, e_n^\alpha)(z - s_i)^{-E_i}$, სადაც $E_i = (1/2\pi i)\ln(G_i)$ მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები ნორმალიზებულიებია ე. ი. საკუთრივი მნიშვნელობების ნორმირებები ეკუთვნიან სიმრავლეს $[0, 1)$, არის F ვექტორული ფიბრაციის, s_i წერტილის $O_i \setminus \{s_i\}$ გაჩხვლეტილ მიდამოში არსებული, ჰოლომორფული კვეთების ბაზისის შემადგენელი (ე. ი. F ვექტორული ფიბრაცია არის ჰოლომორფულად ტრივიალური $O_i \setminus \{s_i\}$ -ზე).

აქედან გამომდინარე, δ_i მარყუჟის გასწვრივ გაგრძელების შემთხვევაში, ეს ბაზისი გადავა საკუთარ თავში. $(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ კვეთა უკვე აღარ იქნება ჰორიზონტარლური და ამ ბაზისში ∇ ბმულობის ფორმას აქვს სახე

$$\omega^\xi = E_i \frac{dz}{z - s_i}. \quad (2.3.2)$$

გავაგრძელოთ F ვექტორული ფიბრაცია s_i წერტილში შემდეგნაირად: განვიხილოთ ცილინდრი $O_i \times \mathbb{C}^n$ (ტრივიალური ვექტორული ფიბრაცია O_i -ზე) კვეთების ბაზისით $(\phi_1, \dots, \phi_n)$, სადაც $\phi_i = (z, e_i)$ და e_i არის $\mathbb{C}^n$ -ს სტანდარტული ბაზისის ელემენტი.

დავაწებოთ $O_i \times \mathbb{C}^n$ ცილინდრი F_E ფიბრაციის სივრცესთან, ყოველი i -თვის $O_i \setminus \{s_i\}$ სიმრავლეზე, ξ_i^0 გავაიგივოთ ϕ_i -სთან და გავაგრძელოთ გაიგივება $(O_i \setminus \{s_i\}) \times \mathbb{C}^n$ -ზე წრფივად. მივიღებთ ფიბრაციას $B \cup O_i$ -ზე. რანაირია მიღებულის ფიბრაციის საკოორდინატო აღწერა s_i წერტილის მიდამოში?

U_0 -ით აღვნიშნოთ O_i მიდამო. თუ საწყის ბაზისად $(e^\alpha) = (e_1^\alpha, \dots, e_n^\alpha)$ არჩეულია ბაზისი, რომელიც შეესაბამება F ფიბრაციის საწყის ლოკალურ ტრივიალიზაციებს ე. ი. თუ $U_\alpha \cap U_\beta$, მაშინ $(e^\alpha)g_{\alpha\beta} = (e^\beta)$, მაშინ აგების მიხედვით $g_{0\alpha} = (z - s_i)^{E_i}$. ნებისმიერი სხვა U_β მიდამოსათვის, რომელიც შეიცავს s_i წერტილს თავის ჩაკეტვაში, $g_{0\beta}(z)$ არის $g_{0\alpha}(z)$ -ის ანალიზური გაგრძელების შედეგი, U_β სიმრავლეში არსებული δ_i გზის გასწვრივ. ამ გაგრძელების შედეგად, U_α -ში დაბრუნებისას, პირდაველად არჩეული $(z - s_i)^{E_i}$ შტოს ნაცვლად ვღებულობთ შტოს $(z - s_i)^{E_i} G_i$, რაც უზრუნველყოფს ფიბრაციის გაგრძელების კორექტულობას.

ჰორიზონტალური კვეთების ნებისმიერი სხვა $(\tilde{e}^\alpha)$ ბაზისი, (e^α) ბაზისთან დაკავშირებულია შემდეგნაირად $(\tilde{e}^\alpha) = (e^\alpha)S_i$ და δ_i გზის გასწვრივ ანალიზური გაგრძელების შემთხვევაში $(\tilde{e}^\alpha)$ ბაზისი გადავა $(\tilde{e}^\alpha)\tilde{G}_i$ ბაზისში, სადაც $\tilde{G}_i = S_i^{-1}G_iS_i$. ავირჩიოთ ისეთი ბაზისი, რომლისთვისაც $\tilde{G}_i$ მატრიცა არის ზედა სამკუთხა. Λ_i სიმბოლოთი აღვნიშნოთ დიაგონალური მატრიცა, რომლის დიაგონალზე იმყოფებიან მთელი რიცხვები λ_i^j , $j = 1, \dots, n$ და $\lambda_i^j \geq \lambda_i^{j+1}$, $j = 1, \dots, n - 1$. ასეთ მატრიცებს ვუწოდოთ დასაშვები მატრიცები.

განვიხილოთ $O_i \setminus \{s_i\}$ სიმრავლეზე F ფიბრაციის ლოკალური კვეთების ბაზისი $(\xi^{\Lambda_i}) = (\tilde{e}^\alpha)(z - s_i)^{-\tilde{E}_i}(z - s_i)^{-\Lambda_i}$ და გავაგრძელოთ F ფიბრაცია s_i წერტილში ზემოთ აღწერილის მიხედვით, შევცვალოთ (ξ^0) კვეთების ბაზისი (ξ^{Λ_i}) ბაზისით, ω^{Λ_i} ბმულობის ფორმა, (2.4.4)-ის გამო, მიიღებს სახეს:

$$\omega^{\Lambda_i} = (\Lambda_i + (z - s_i)^{\Lambda_i} \tilde{E}_i (z - s_i)^{-\Lambda_i}) \frac{dz}{z - s_i}. \quad (2.3.3)$$

რადგან მატრიცა $(z - s_i)^{\Lambda_i} \tilde{E}_i (z - s_i)^{-\Lambda_i}$ ჰოლომორფულია s_i წერტილში, ამიტომ ფორმას აქვს ლოგარითმული განსაკუთრებულობა ამ წერტილში.

გადასვლის ფუნქციას $\tilde{g}_{0\alpha}$ აქვს სახე:

$$\tilde{g}_{0\alpha} = (z - s_i)^{\Lambda_i} (z - s_i)^{\tilde{E}_i} S_i^{-1} = (z - s_i)^{\Lambda_i} S_i^{-1} (z - s_i)^{\tilde{E}_i}.$$

განვიხილოთ ერთობლიობა $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$, რომლებიც შედგებიან დასაშვები მატრიცებისაგან და ამ ერთობლიობას ვუწოდოთ დასაშვები ერთობლიობა. გავაგრძელოთ F ფიბრაცია ყოველ s_i წერტილში შესაბამისი Λ_i მატრიცის საშუალებით. მივიღებთ ჰოლომორფულ ვექტორულ ფიბრაციას F^Λ მთელ რიმანის სფეროზე, ლოგარითმული ბმულობით ∇^Λ . ყველა ასეთი ფიბრაციების ოჯახი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $\mathcal{F}$.

ფიბრაციას F^0 ბმულობით ∇^0 (ფიბრაციის გაგრძელება, რომელიც აგებულია $\Lambda_1 = \dots = \Lambda_n = 0$ ერთობლიობით) ეწოდება (F, ∇) საწყისი ფიბრაციის *კანონიკური გაგრძელება*.

(F, ∇) საწყისი ფიბრაციის გაგრძელება $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$ დამოკიდებულია $S_1, \dots, S_n$ მატრიცებზე (მონოდრომიის მატრიცის ზედა სამკუთხა მატრიცის სახემდე მიყვანის საშუალებაზე), F ფიბრაციის საწყის საკოორდინატო აღწერასა და $(z - s_i)^{E_i}$ მრავალსახა ფუნქციის შტოს არჩევაზე. ბოლო ორი დამოკიდებულება არა არსებითია, რადგან ისინი დამოკიდებულები არიან $S_1, \dots, S_n$ მატრიცების ცვლილებაზე. რაც შეეხება ფიბრაციის დამოკიდებულებას $S_1, \dots, S_n$ მატრიცებზე, ეს დამოკიდებულება მნიშვნელოვანია. ორი ფიბრაცია, რომლებიც არიან აგებულები ერთიდაიგივე დასაშვები ერთობლიობით, მაგრამ სხვადასხვა S_i მატრიცებით შსაძლებელია, რომ არ იყვნენ ექვივალენტურები.

ყოველივე ზემოთ თქმული არ უკავშირდება კანონიკურ გაგრძელებას, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ საწყის (2.3.1) წარმოდგენაზე.

დებულება 2.3.3 [4]. სიმრავლე $\mathcal{F}$ შეიცავს რიმანის სფეროზე, ყველა ჰოლომორფულ ვექტორულ ფიბრაციას, ჰოლომორფული ბმულობით, მოცემული განსაკუთრებული წერტილებითა და მოცემული მონოდრომიით.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი ფიბრაცია F' ლოგარითმული ბმულობით ∇' , მოცემული განსაკუთრებული წერტილებითა და (2.3.1) მონოდრომიით, $(F', \nabla')|_B = (F, \nabla)$. s_i წერტილის O_i მიდამოში, (ξ) ლოკალური ჰოლომორფული კვეთების ბაზისში, ∇' ბმულობა იძლევა წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ფუქსის სისტემას (2.2.1).

O_i -სა და U_α -ს თანაკვეთაზე, რომლის ჩაკეტვაც შეიცავს s_i წერტილს, განვიხილოთ ამ სისტემის ამონახსნთა ლეველის ფუნდამენტური მატრიცა:

$$Y(z) = U(z)(z - s_i)^{A_i}(z - s_i)^{E_i}.$$

$O_i \cap U_\alpha$ სიმრავლეზე, ჰორიზონტალური კვეთების (ϕ^α) ბაზისს აქვს სახე $(\phi^\alpha) = (\xi)Y(z)$. F' ფიბრაციის (ξ) ლოკალური ტრივიალიზაციებიდან გადავიდეთ $(\xi') = (\xi)U(z)$ -ზე (რადგან სისტემის ფუქსურობიდან გამომდინარეობს $U(z)$ ჰოლომორფულად შებრუნებადია O_i -ში, ამიტომ ბაზისის ელემენტები (ξ') კვლავ იქნებიან ჰოლომორფული კვეთები), მივიღებთ

$$(\xi') = (s^\alpha)(z - s_i)^{-E_i}(z - s_i)^{-A_i},$$

ე. ი. F' ფიბრაცია, O_i -ზე, ექვივალენტურია F ვექტორული ფიბრაციის გაგრძელების, რომელიც აგებულია დასაშვები მატრიცებით $\Lambda_i = A_i$ (და რომელიმე S_i მატრიცებით).

რადგან რიმანის სფეროზე ფუქსის სისტემა, მოცემული განსაკუთრებული წერტილებითა და მონოდრომიებით, შესაძლებელია განვიხილოთ როგორც რომელიმე ტრივიალური ფიბრაციის ბმულობა, როგორც შედეგი მივიღებთ შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2.3.1 [4] მონოდრომიის წარმოდგენა (2.3.1) შესაძლებელია რეალიზებული იყოს როგორც რიმანის სფეროზე, $s_1, s_2, \dots, s_m$ მოცემული განსაკუთრებული წერტილების მქონე, რომელიმე ფუქსის სისტემის წარმოდგენა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ფიბრაციების $\mathcal{F}$ სიმრავლე, რომელიც აგებულია (2.3.1) წარმოდგენით, შეიცავს ერთ მაინც ჰოლომორფულად ტრივიალურ ფიბრაციას.

2.4. მატრიცული ფუნქციის ფაქტორიზაცია და ჰოლომორფული ფიბრაციების კლასიფიკაცია რიმანის სფეროზე

განვიხილოთ Γ მარტივი, გლუვი, ჩაკეტილი კონტური კომპლექსურ რიცხვთა სიბრავლეში, რომელიც შემოსაზღვრავს D_+ არეს, D_- -ით აღვნიშნოთ $D_+ \cup \Gamma$ სიბრავლის დამატება, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ გაფართოებულ კომპლექსურ რიცხვთა სივრცეში და ჩავთვალოთ, რომ $0 \in D_+$, ხოლო $\infty \in D_-$, ე. ი.

$$D_- = (D_+ \cup \Gamma)^c = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{D_+ \cup \Gamma\}.$$

განსაზღვრება. [5-6], [25]. $a(t)$ მატრიც-ფუნქციის ვინერ-ჰოპფის (Wiener-Hopf) *მარჯვენა ფაქტორიზაცია* ეწოდება წარმოდგენას:

$$a(t) = r_-(t)d_r(t)r_+(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2.4.1)$$

$r_{\pm}(t)$ არიან უწყვეტი მატრიც-ფუნქციები Γ წირზე, ანალიზურად გაგრძელებადები და შებრუნებადები $D_{\pm}$ არეში, $d_r(t) = \text{diag}(t^{\rho_1}, \dots, t^{\rho_n})$, სადაც $\rho_1, \dots, \rho_n$ მთელი რიცხვებია, რომლებიც ცალსახად განისაზღვრებიან $a(t)$ მატრიც-ფუნქციების საშუალებით. ამ მთელ რიცხვებს ეწოდებათ $a(t)$ მატრიც-ფუნქციის *მარჯვენა კერძო ინდექსები*. ისინი შეიძლება დავალაგოთ ნებისმიერი თანმიმდევრობით, ამის გამო, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_n$ (ან $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_n$).

ანალოგიურად განისაზღვრება მატრიცული ფუნქციის, ვინერ-ჰოპფის მარცხენა ფაქტორიზაცია. კერძოდ, $a(t)$ მატრიც-ფუნქციის ვინერ-ჰოპფის *მარცხენა ფაქტორიზაცია* ეწოდება წარმოდგენას:

$$a(t) = l_+(t)d_l(t)l_-(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2.4.2)$$

$l_{\pm}(t)$ არიან უწყვეტი მატრიც-ფუნქციები Γ წირზე, ანალიზურად გაგრძელებადები და შებრუნებადები $D_{\pm}$ არეში, $d_l(t) = \text{diag}(t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n})$, სადაც $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ მთელი რიცხვებია, რომლებიც ცალსახად განისაზღვრებიან $a(t)$ მატრიც-ფუნქციის საშუალებით. ამ მთელ რიცხვებს ეწოდებათ $a(t)$ მატრიც-ფუნქციის *მარცხენა კერძო ინდექსები* და შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ (ან $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$).

თუ ყველა კერძო ინდექსი ნულის ტოლია, მაშინ ფაქტორიზაციას ეწოდება კანონიკური.

მატრიცული ფუნქციის (2.4.1), (2.4.2) სახით წარმოდგენის ამოცანა, მათემატიკის რამდენიმე მიმართულებაში, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად წარმოიშვა. ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში, კანონიკური ფორმის დასადგენად ანალოგიური შედეგი მიიღო გ. ბირკჰოფმა (J.Birkhoff), სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემების თეორიაში, ნ. მუსხელიშვილმა და ნ. ვეკუამ, წრფივი შეუღლების ამოცანის დასახასიათებლად უსასრულობაში, შემოიტანეს კერძო ინდექსების ცნება [29]. ა. გროთენდიკმა (A.Grothendieck) სფეროზე, ანალიზური ფიბრაციის წრფივი ფიბრაციების ჯამად წარმოდგენის შესაძლებლობა აჩვენა და თითოეული წრფივი ფიბრაციის ჩერნის რიცხისაგან შედგენილი მთელ-რიცხვა ვექტორი აღმოჩნდა ამ ფიბრაციის სრული ანალიზური ინვარიანტი. ამის გამო, სამეცნიერო ლიტერატურაში (2.4.1), (2.4.2) წარმოდგენას მატრიც-ფუნქციის ბირკჰოფის ფაქტორიზაციასაც უწოდებენ. ანალიზურ ფუნქციათა თეორიაში კი ანალოგიური შედეგი, ყველაზე ადრე, მიღებული ჰქონდა ფრანგ ინჟინერს სავაჟს (L.Souvage) ([6], იქვე იხილეთ მოკლე ისტორიული მიმოხილვა).

$a(t)$ მატრიც-ფუნქციის დეტერმინანტის კოშის ინდექსი, $\text{ind}_\Gamma \det(a(t))$, განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\text{ind}_\Gamma \det(a(t)) = \frac{1}{2\pi} [\arg \det(a(t))]_\Gamma,$$

სადაც $[\arg \det(a(t))]_\Gamma$ აღნიშნავს $\det(a(t))$ -ის არგუმენტის ნაზრდს, Γ კონტურზე, დადებითი მიმართულებით (საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით), შემოვლისას.

მატრიცული ფუნქციის ფაქტორიზაციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{i=1}^n \rho_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{ind}_\Gamma \det(a(t)),$$

მატრიცულ ფუნქციას უწოდებენ *მდგრადს*, თუ მისი კერძო ინდექსები არ იცვლება ამ მატრიცის მცირე შეშფოთების დროს. ცნობილია, რომ მატრიცული ფუნქციის მდგრადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი $|\rho_1 - \rho_n| \leq 1$ უტოლობის შესრულება.

განვიხილოთ ვექტორული ფიბრაცია $\mathcal{O}(k)$, რომლის რანგი არის 1, ხოლო საკოორდინატო აღწერა არის შემდეგი:

$$U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}, g_{0\infty}(z) = z^k, g_{0\infty} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^*, \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = GL(1, \mathbb{C}).$$

დებულება 2.4.1 ფიბრაცია $\mathcal{O}(k)$ ტრივიალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც $k = 0$.

დამტკიცება. თუ ფიბრაცია $\mathcal{O}(k)$ ტრივიალურია, მაშინ არსებობს უწყვეტი ფუნქციები $h_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ და $h_\infty : \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ისეთი, რომ $h_0(z) = g_{0\infty}(z)h_\infty(z) = z^k h_\infty(z)$, როდესაც $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$h(z) = \ln(h_0(z)) - \ln(h_\infty(z)) = \ln\left(\frac{h_0(z)}{h_\infty(z)}\right) = \ln(g_{0\infty}(z)) = \ln\left(\frac{z^k h_\infty(z)}{h_\infty(z)}\right) = \ln(z^k) = k \ln(z),$$

ლოგარითმი მრავალსახა ფუნქციაა, $h_0(z), h_\infty(z) \neq 0$ ე. ი. $\ln(h_0(z))$ -სა და $\ln(h_\infty(z))$ -ს არა აქვთ განშტოების წერტილი $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ სიმრავლეზე, ამის გამო მათზე, როგორც ფუნქციაზე, რომ ვილაპარაკოთ საჭიროა მათგან გამოვყოთ შტოები, რადგან $h(z) = \ln(g_{0\infty}(z)) = k \ln(z)$, ამიტომ ამ ფუნქციიდან შტოს გამოყოფა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში თუ $k = 0$. ამის გამო, თუ $k \neq 0$, მაშინ ფიბრაცია ანალიზურად არა ტრივიალურია.

თუ $k = 0$, მაშინ ფიბრაცია $\mathcal{O}(k)$ არის პირდაპირი ნამრავლი და ამის გამო ის ტრივიალურია.

განსაზღვრება. ვთქვათ F და F' არიან p და q რანგის ფიბრაციები B -ზე, $\{U_i\}$ დაფარვაა და $\{g_{ji}\}$ და $\{g'_{ji}\}$ კოციკლებია. $p + q$ რანგის ფიბრაციას, რომელიც მოიცემა $\{g_{ji}^\oplus\}$ კოციკლებით,

$$g_{ji}^{\oplus} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(pq, \mathbb{R}(\mathbb{C})), \quad g_{ji}^{\oplus}(x) = \begin{pmatrix} g_{ji}(x) & 0 \\ 0 & g'_{ji}(x) \end{pmatrix},$$

ეწოდება F და F' ფიბრაციების პირდაპირი ჯამი და აღინიშნება სიმბოლოთი $F \oplus F'$.

pq რანგის ვექტორულ ფიბრაციას, რომელიც მოიცემა $\{g_{ji}^{\otimes}\}$ კოციკლებით

$$g_{ji}^{\otimes} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(pq, \mathbb{R}(\mathbb{C})),$$

სადაც მატრიცა $g_{ji}^{\otimes}$ შედგება $H_{kl}(x)$ ბლოკებისგან, $k = 1, \dots, p$ და $l = 1, \dots, q$,

$$H_{kl}(x) = \begin{pmatrix} h_{k1}(x)h'_{1l}(x) & \dots & h_{kp}(x)h'_{1l}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{k1}(x)h'_{ql}(x) & \dots & h_{kp}(x)h'_{ql}(x) \end{pmatrix},$$

($h_{kl}(x)$ და $h'_{kl}(x)$ რომლებიც არიან, შესაბამისად, g_{ji} და g'_{ji} მატრიცების ელემენტები), ეწოდება F და F' ვექტორული ფიბრაციების *ტენზორული ან კრონეკერის ნამრავლი* და აღინიშნება სიმბოლოთი $F \otimes F'$.

F' ფიბრაციას ეწოდება F ფიბრაციის *ქვეფიბრაცია*, თუ B ბაზის რომელიმე $\{U_i\}$ დაფარვის შესაბამისი $\{g_{ji}\}$ და $\{g'_{ji}\}$ კოციკლებისათვის სრულდება ტოლობა:

$$g_{ji}(x) = \begin{pmatrix} g'_{ji}(x) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

ამ განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(l) = \mathcal{O}(k+l)$ და $\mathcal{O}(k_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k_n)$ მოიცემა კოციკლებით:

$$g_{ji}^{\oplus}(z) = \text{diag}(z^{k_1}, \dots, z^{k_n}).$$

ჰოპფის ფიბრაციის შემთხვევაში, $S^2 = \mathbb{CP}^1$ ბაზაზე განვიხილოთ ორი კოორდინატი $z = z_2/z_1$, როდესაც $z_1 \neq 0$ (ნულის მიდამოს კოორდინატი) და $t = z_1/z_2$, როდესაც $z_2 \neq 0$ (უსასრულობის მიდამოს კოორდინატი). განვიხილოთ S^2 სფეროს დაფარვა (ან, რაც იგივეა, განვიხილოთ გაფართოებული კომპლექსური სიბრტყის $\mathbb{CP}^1$ დაფარვა) ორი მიდამოთი $U_0 = \{z \mid z \in \mathbb{C}\}$ და $U_{\infty} = \{t \mid t \in \mathbb{C}\}$. ამ მიდამოების შემთხვევაში ჰოპფის

ფიბრაციის ტრივიალიზაციები არიან, შესაბამისად, ასახვები $f_0 : (z_1, z_2) \rightarrow (z, \exp(i \arg(z_1)))$ და $f_\infty : (z_1, z_2) \rightarrow (t, \exp(i \arg(z_2)))$. t და z კოორდინატებს შორის, $t, z \in U_0 \cap U_\infty$, არსებობს კავშირი $t = 1/z$, ამის გამო, ასახვა $f_\infty \circ f_0^{-1}$ წერტილს $(z, \exp(i \arg(z_1)))$ გადაიყვანს წერტილში $(z, \exp(i \arg(z_2)))$. რადგან

$$\exp(i \arg(z_2)) = \exp(i \arg(zz_1)) = \exp(i \arg(z)) \exp(i \arg(z_1)),$$

ამიტომ $g_{\infty 0}(z) = \exp(i \arg(z))$.

საბოლოოდ, ჰოპფის ფიბრაციის საკოორდინატო აღწერა იქნება შემდეგი:

$$U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}, g_{\infty 0}(z) = \exp(i \arg(z)), g_{\infty 0} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S^1.$$

შევნიშნოთ, რომ ჰოპფის ფიბრაცია მიიღება ფიბრაციისგან $\mathcal{O}^*(-1)$, რომლის საკოორდინატო აღწერა არის შემდეგი:

$$U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}, g_{\infty 0}(z) = z, g_{\infty 0} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^*, \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

$\mathbb{C}^*$ სტრუქტურული ჯგუფის რედუქციით, $z \rightarrow \exp(i \arg(z))$, S^1 -ში.

$\mathcal{O}^*(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, არის ფიბრაცია, რომლის საკოორდინატო აღწერა არის შემდეგი:

$$U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}, g_{\infty 0}(z) = z^k, g_{\infty 0} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^*, \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

როდესაც $k = -1$, $g_{\infty 0}(z) = (g_{0\infty}(z))^{-1} = z^{-k} = z^1 = z$.

ბირკჟოფ-გროთენდიკის თეორემა იძლევა რიმანის სფეროზე, ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაციის აღწერას.

თეორემა 2.4.1 (ბირკჟოფ-გროთენდიკი) [31] რიმანის სფეროზე ნებისმიერი ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაცია E ექვივალენტურია ერთგანზომილებიანი ფიბრაციების პირდაპირი ჯამისა:

$$E \cong \mathcal{O}(k_1) \oplus \mathcal{O}(k_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k_n), \quad (2.4.3)$$

სადაც k_i რიხვები არიან მთელი რიცხვები, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ და ფიბრაცია $\mathcal{O}(k)$ მოიცემა შემდეგი საკოორდინატო აღწერით

$$\mathcal{O}(k) = (\mathbb{C}, \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}, g_{0\infty} = z^k),$$

$k_1, k_2, \dots, k_n$ მთელი რიცხვების ერთობლიობას ეწოდება *ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი*. k_i არის შესაბამისი წრფივი ფიბრაციის ჩერნის რიცხვი და $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$, სადაც k არის E ფიბრაციის ჩერნის რიცხვი.

D_0 -ით, D_∞ -ითა და K -თი აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავლეები, რიმანის სფეროზე:

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}, D_\infty = \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} : |z| \geq r\}, K = D_0 \cap D_\infty, r < R.$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც E ფიბრაცია მოიცემა შემდეგი საკოორდინატო აღწერით:

$$E = (D_0, D_\infty, g_{0\infty} = M(z)),$$

სადაც $M(z)$ მატრიცული ფუნქციაა.

დებულება 2.4.2 ფიბრაცია $E = (D_0, D_\infty, g_{0\infty} = M(z))$ ექვივალენტურია ერთგანზომილებიანი ფიბრაციების (2.4.3) პირდაპირი ჯამის.

მართლაც, ეს პირდაპირ ჩანს ფიბრაციების პირდაპირი ჯამის განმსაზღვრელი კოციკლის სტრუქტურიდან და $M(z)$ მატრიცული ფუნქციის ფაქტორიზაციის შესაძლებლობიდან.

განსაზღვრება. ვიტყვი, რომ F ვექტორულ ფიბრაციაზე მოცემულია ბმულობა, თუ ამ ფიბრაციის ნებისმიერი ლოკალური ტრივიალიზაციებისათვის, $\{U_i\}$, $\{f_i\}$, $\{g_{ji}\}$, მოცემულია მატრიცული დიფერენციალური 1-ფორმების ოჯახი $\{\omega^i\}$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$\omega^i = dg_{ij}g_{ij}^{-1} + g_{ij}\omega^j g_{ij}^{-1}. \quad (2.4.4)$$

თეორემა 2.4.2. [4] გლუვ (ჰოლომორფულ) F ვექტორულ ფიბრაციაზე შესაძლებელია განვსაზღვროთ ბრტყელი, გლუვი (ჰოლომორფული) ბმულობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ფიბრაციის მომცემი კოციკლები $\{g_{ji}\}$ შესაძლებელია ისე ავიღოთ, რომ თითოეული მათგანი იყოს მუდმივი ე. ი. $g_{ji} \equiv \text{const}$.

დამტკიცება. თუ ფიბრაცია მოცემულია მუდმივი კოციკლებით, მაშინ მასში გლუვი (ჰოლომორფული) ბმულობის განსაზღვრა მარტივია: ამისათვის საკმარისია ყოველი U_i მიდამოსათვის და f_i ტრივიალიზაციისათვის, რომელიც განსაზღვრავს მუდმივ კოციკლს, შესრულდეს პირობა $\omega^i = 0$. ამ შემთხვევაში შესრულდება ტოლობა

$$\omega^i = dg_{ij}g_{ij}^{-1} + g_{ij}\omega^j g_{ij}^{-1}$$

და ამის გამო, ფიბრაციაზე განსაზღვრულია ბმულობა (გლუვი თუ ფიბრაცია გლუვია და ჰოლომორფული თუ ფიბრაცია ჰოლომორფულია), რომელიც არის ბრტყელი.

განვიხილოთ F ფიბრაცია ∇ ბრტყელი ბმულობითა და ლოკალური ტრივიალიზაციებით $\{U_i\}$, $\{f_i\}$, $\{g'_{ij}\}$, $\{U_i\}$ - U_i ცალადბმულებია. ყოველ U_i მიდამოზე განვსაზღვროთ n რაოდენობის, ყოველ წერტილში წრფივად დამოუკიდებელი, ჰორიზონტალური კვეთები $\phi_1^i, \dots, \phi_n^i$ (გლუვები, თუ ფიბრაცია გლუვია და ჰოლომორფულია, თუ ფიბრაცია ჰოლომორფულია). ამ ფიბრაციისათვის ავაგოთ ახალი ლოკალური ტრივიალიზაციები შემდეგ წესის მიხედვით:

$$\tilde{f}_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, \quad \tilde{f}_i(\phi_j^i(x)) = (x, e_j).$$

e_j არის $\mathbb{R}^n$ -ში სტანდარტული ბაზისის j ნომრის ელემენტი (ჰოლომორფულ შემთხვევაში $\mathbb{R}^n$ შეიცვლება $\mathbb{C}^n$ -თი), დანარჩენი ელემენტებისათვის, წრფივობის თვისების გამო, მივიღებთ: ყოველი $\tilde{x} \in \pi^{-1}(U_i)$ ელემენტისათვის

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^n c^j \phi_j^i(\pi(\tilde{x})).$$

რადგან სრულდება ტოლობა (2.4.4) და ყოველი i -თვის $\omega^i \equiv 0$ (განსაზღვრების თანახმად, ლოკალური ჰორიზონტალური კვეთების ბაზისში ბმულობის ფორმა ყოველთვის ნულია), მივიღებთ, რომ $dg_{ij} = 0$ ე. ი. $g_{ji} \equiv \text{const}$.

თავი III. რეგულარულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული
ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი

3.1. განტოლებათა სისტემის ტრანსფერ-მატრიცი

განვიხილოთ ფუქსის ტიპის წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{B_j}{z - s_j} \right) y. \quad (3.1.1)$$

სასრული რაოდენობის $s_1, \dots, s_m$ განსაკუთრებული წერტილებით, $B_1, \dots, B_m$ არიან $n \times n$ განზომილების მუდმივი მატრიცები. დავუშვათ, რომ ∞ არ არის (3.1.1) სისტემის განსაკუთრებული წერტილი, მაშინ

$$\sum_{j=1}^m B_j = 0.$$

ერთი მხრივ (3.1.1) განტოლებათა სისტემა გვაძლევს მონოდრომიის წარმოდგენას

$$\chi : \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, \dots, s_m\}, z_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}). \quad (3.1.2)$$

სადაც g_i არის მარყუქი, რომლის საწყისი და საბოლოო წერტილი არის z_0 და შემოუვლის მხოლოდ ერთ s_i განსაკუთრებულ წერტილს. g_i მარყუქის ჰომოტოპიის კლასი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $[g_i]$. $[g_1], \dots, [g_m]$ ქმნიან ჯგუფს $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, \dots, s_m\}, z_0)$ და აკმაყოფილებენ პირობას $[g_1] \dots [g_m] = e$.

ვთქვათ $E_i = \frac{1}{2\pi i} \ln \chi([g_i])$, რომლის საკუთრივი ρ_i^j რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას

$$0 \leq \rho_i^j < 1, \quad (3.1.3)$$

ფუქსის განტოლებათა სისტემის (3.1.1) ამონახსნისათვის სამართლიანია თეორემა 1.2.2, კერძოდ, (3.1.1) სისტემა s_i განსაკუთრებულ წერტილში არის ფუქსის მაშინ და მხოლოდ

მაშინ, როდესაც s_i წერტილის რომელიმე მიდამოში $Y_i(z)$ სისტემის ფუნდამენტურ მატრიცას აქვს სახე

$$Y_i(z) = U_i(z)(z - s_i)^{\Lambda_i}(z - s_i)^{E_i}, \quad (3.1.4)$$

სადაც $U_i(z)$ ჰოლომორფულად შებრუნებადია s_i წერტილში, Λ_i მთელი რიცხვებისაგან შედგენილი დიაგონალური მატრიცაა, რომლის ელემენტებიც λ_i^j აკმაყოფილებენ პირობას $\lambda_i^1 \geq \dots \geq \lambda_i^n$, ხოლო E_i ზედა სამკუთხა მატრიცაა, რომლის საკუთრივი რიცხვები აკმაყოფილებენ (3.1.3) პირობას.

მეორე მხრივ, ცნობილია, რომ რიმანის სფეროზე, ნებისმიერი E ჰოლომორფული ფიბრაცია იშლება წრფივი ფიბრაციების ჯამად (იხილეთ თეორემა 2.4.1).

$$E \cong E(k_1) \oplus E(k_2) \oplus \dots \oplus E(k_n).$$

ამოცანის ფორმულირება: შესაძლებელია თუ არა, რომ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემიდან განვსაზღვროთ ინდუცირებული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი და თუ ეს შესაძლებელია, ავაგოთ ალგორითმი $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ მთელ კოორდინატებიანი ვექტორის საპოვნელად.

თეორემა 3.1.1 [16] არსებობს რაციონალური მატრიც-ფუნქცია $T(z)$ ისეთი, რომ (3.1.1) სისტემა ყალიბურად ექვივალენტურია იგივე $s_1, \dots, s_m$ განსაკუთრებული წერტილების მქონე ისეთი

$$\frac{d\tilde{y}}{dz} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\tilde{B}_j}{z - s_j} \right) \tilde{y}, \quad (3.1.5)$$

სისტემის, რომლისთვისაც ∞ აცილებადი განსაკუთრებული წერტილია და რომლის ვალუაციები ემთხვევა წინასწარ მოცემულ მთელ რიცხვთა ვექტორს. აქ

$$\sum_{j=1}^m \frac{\tilde{B}_j}{z - s_j} = T(z) \left(\sum_{j=1}^m \frac{B_j}{z - s_j} \right) T^{-1}(z) + \frac{dT(z)}{dz} T^{-1}(z),$$

სადაც $\tilde{B}_j, j = 1, \dots, m$, არის მუდმივი მატრიცა.

დამტკიცება. ვთქვათ T_1 არის გადაუგვარებელი მატრიცა ისეთი, რომ $B'_1 = T_1 B_1 T_1^{-1}$ არის B_1 მატრიცის ჟორდანის კანონიკური ფორმის მატრიცა. $y_1 = T_1 y$ გარდაქმნით ჩვენ მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\frac{dy_1}{dz} = \left(\frac{B'_1}{z - s_1} + B'(z) \right) y_1, \quad (3.1.6)$$

სადაც $B(z)$ არის მერომორფული მატრიც-ფუნქცია. გადაუგვარებელ მატრიცას, რომელსაც მატრიცა მიჰყავს ჟორდანის კანონიკურ მატრიცაზე, ვუწოდებთ T_1 ტიპის გარდაქმნას. (3.1.6) სისტემა არის ფუქსის ტიპის. ვთქვათ $\lambda_1^1, \dots, \lambda_{l_1}^1$ არიან B_1 მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები, რომლების ჯერადობებიც შესაბამისად არის $p_1^1, \dots, p_{l_1}^1$. განვიხილოთ $(k_1^j, \dots, k_n^j)$ მთელი რიცხვებისაგან შედგენილ ვექტორთა ნებისმიერი ოჯახი და გავუტოლოთ $([Re(\lambda_1^j)], \dots, [Re(\lambda_{l_j}^j)])$ ვექტორს, სადაც $(\lambda_1^j, \dots, \lambda_{l_j}^j)$ არის B_j მატრიცის მახასიათებელი ფესვებისაგან შედგენილი ვექტორი, $j = 1, \dots, m$.

ვთქვათ $T_2(z) = (z - s_1)^D$ სადაც

$$D = \text{diag} \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{q_1^1}, 0, 0, \dots, 0 \right),$$

თუ $[Re(\lambda_1^1)] < k_1^1$ და

$$D = \text{diag} \left(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q_1^1}, 0, 0, \dots, 0 \right),$$

თუ $[Re(\lambda_1^1)] > k_1^1$, ხოლო $1 \leq q_1^1 \leq p_1^1$. ასეთ მატრიც-ფუნქციას ვუწოდოთ $T_2(z)$ ტიპის გარდაქმნა.

$y_2(z) = T_2(z)y_1$ გარდაქმნით ჩვენ მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\frac{dy_2}{dz} = \left(\frac{B_1''}{z - s_1} + B''(z) \right) y_2, \quad (3.1.7)$$

სადაც B_1'' ზედა სამკუთხა მატრიცის დიაგონალური ელემენტები იქნებიან

$$D = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1 \pm 1, \lambda_1 \pm 1, \dots, \lambda_1 \pm 1}_{q_1^1}, \lambda_2, \dots, \lambda_l),$$

ხოლო სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dz} &= \left(\sum_{j=1}^m \frac{T_2(z) B_j'' T_2^{-1}(z)}{z - s_j} + \frac{dT_2(z)}{dz} T_2^{-1}(z) \right) y_2 = \left(\sum_{j=1}^m \frac{B_j''(z)}{z - s_j} + \frac{D}{z - s_1} \right) y_2 = \\ &= \left(\frac{B_1''(z) + D}{z - s_1} + \sum_{j=2}^m \frac{B_j''(z)}{z - s_j} \right) y_2. \end{aligned}$$

$T_2(z)$ ტიპის გარდაქმნას B_1'' მატრიცისათვის გამოვიყენებთ მანამ, სანამ საკუთრივი მნიშვნელობა $[\text{Re}(\lambda_1^1)]$ გაუტოლდება k_1^1 -ს.

სასრული რადენობის მოქმედებები შემდეგ მივიღებთ, რომ B_1'' ზედა სამკუთხა მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ ტოლობას $[\text{Re}(\lambda_1^1)] = k_1^1$. ზემოთ აღწერილი კონსტრუქცია შესაძლებელია გამოვიყენოთ ყველა სინგულარული წერტილისათვის და ყველა მახასიათებელი ფესვისათვის. T_1 და T_2 ტიპის გარდაქმნების გადამრავლების შედეგად მიიღება რაციონალური მატრიც-ფუნქცია $T(z)$, რომელსაც ვუწოდებთ ტრანსფერ-მატრიცას.

თეორემა 3.1.2 [16] არსებობს $T(z)$ ტრანსფერ-მატრიცის გამოსათვლელი ალგორითმი.

დამტკიცება: დავაფიქსიროთ განსაკუთრებული წერტილი s_1 , შესაბამისი მატრიცი B_1 და ჩავატაროთ მსჯელობა. დანარჩენი განსაკუთრებული წერტილებისთვისაც ანალოგიურად ჩატარდება მსჯელობა.

პრიველი ნაბიჯი არის განსახილველი მატრიცის ჟორდანის კანონიკურ ფორმაზე მიყვანა. ამ შემთხვაში B_1 მატრიცა მივიყვანოთ B'_1 ჟორდანის კანონიკურ ფორმაზე. არსებობს გადაუგვარებელი T_1 მატრიცა ისეთი, რომ სრულდება ტოლობა $B'_1 = T_1 B_1 T_1^{-1}$. განვიხილოთ გარდაქმნა $y_1 = T_1 y$, მაშინ საწყისი სისტემისაგან მიიღება სისტემა:

$$\frac{dy_1}{dz} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{T_1 B_j T_1^{-1}}{z - s_j} \right) y_1 = \left(\sum_{j=1}^m \frac{B'_j}{z - s_j} \right) y_1,$$

რომელიც ისევ ფუქსის განტოლებათა სისტემაა იგივე განსაკითრებული წერტილებითა და ახალი მატრიცებით $T_1 B_1 T_1^{-1}, \dots, T_1 B_m T_1^{-1} = B'_1, \dots, B'_m$.

განვიხილოთ B_1 მატრიცის მახასიათებელი ფესვები $\lambda_1^1, \dots, \lambda_{l_1}^1$, მათ შორის შეიძლება იყოს ტოლი ფესვები. განვიხილოთ λ_1^1 ფესვი. მისი ჯერადობა იყოს p_1^1 . საჭიროა λ_1^1 -ის რეალური ნაწილის მთელი ნაწილი $[\operatorname{Re}(\lambda_1^1)]$, რომ განვსაზღვროთ უცნობთა მომდევნო გარდაქმნა.

$([\operatorname{Re}(\lambda_1^1)], \dots, [\operatorname{Re}(\lambda_{l_1}^1)])$ ვექტორს ვუტოლებთ $(k_1^1, \dots, k_n^1)$ ვექტორს, სადაც $(k_1^1, \dots, k_n^1)$ წინასწარ მოცემული, მთელი რიცხვებისაგან შედგენილი, ნებისმიერი ვექტორია. ამის მისაღწევად $([\operatorname{Re}(\lambda_1^1)], \dots, [\operatorname{Re}(\lambda_{l_1}^1)])$ ვექტორის კომპონენტებს თანმიმდევრობით ვზრდით ან ვამცირებთ 1-ით. ამის გამო, მომდევნო გარდაქმნის მატრიცას აქვს სახე $T_2(z) = (z - s_1)^D$, სადაც $D = \operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0)$ ან $D = \operatorname{diag}(-1, 0, \dots, 0)$, ხოლო ზოგად შემთხვევაში $D = \operatorname{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{q_1^1}, 0, 0, \dots, 0)$ ან $D = \operatorname{diag}(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q_1^1}, 0, 0, \dots, 0)$ და $1 \leq q_1^1 \leq p_1^1$.

განვიხილოთ გარდაქმნა $y_2 = T_2(z) y_1$ და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\frac{dT_2(z)}{dz} T_2^{-1}(z) = \frac{D}{z - s_1}, \text{ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dz} &= \left(\sum_{j=1}^m \frac{T_2(z) B_j'' T_2^{-1}(z)}{z - s_j} + \frac{dT_2(z)}{dz} T_2^{-1}(z) \right) y_2 = \left(\sum_{j=1}^m \frac{B_j''(z)}{z - s_j} + \frac{D}{z - s_1} \right) y_2 = \\ &= \left(\frac{B_1''(z) + D}{z - s_1} + \sum_{j=2}^m \frac{B_j''(z)}{z - s_j} \right) y_2, \end{aligned}$$

იგივე განსაკუთრებული წერტილებით, ხოლო მატრიცები უკვე აღარ არიან მუდმივები, არიან მატრიც ფუნქციები $T_2(z)B'_1T_2^{-1}(z) + D; T_2(z)B'_2T_2^{-1}(z); \dots; T_2(z)B'_mT_2^{-1}(z) = B''_1(z) + D; B''_2(z); \dots; B''_m(z)$.

ამ განტოლებათა სისტემის მატრიცა არის

$$B(z) = \frac{B''_1(z) + D}{z - s_1} + \sum_{j=2}^m \frac{B''_j(z)}{z - s_j},$$

და ის ექვივალენტურია შემდეგი ფუნქსის ტიპის განტოლებათა სისტემის

$$\frac{df}{dz} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{A_j}{z - s_j} \right) f,$$

სადაც: $A_1 = \text{res}_{s_1} B(z); A_2 = \text{res}_{s_2} B(z), \dots, A_m = \text{res}_{s_m} B(z)$.

ალგორითმი მხოლოდ ორი, T_1 და T_2 ტიპის, გარდაქმნებისაგან შედგება. პირველი შემთხვევაში გარდაქმნის მატრიცა T_1 მუდმივი მატრიცაა, გარდაქმნა ცვლის მხოლოდ განტოლებათა სისტემის მატრიცებს და გავარკვეით რანაირად იცვლება ისინი.

მეორე შემთხვევაში, გარდაქმნის მატრიცა $T_2(z)$ მატრიც-ფუნქციაა და ორ სხვადასხვა ვარიანტს შეიცავს. შევისწავლოთ თითოეული შემთხვევა ცალ-ცალკე და ვნახოთ რანაირ გავლენას ახდენენ განსაკუთრებული წერტილები განტოლებათა სისტემის მატრიცის ცვლილებაზე. ამისათვის საჭიროა გამოვთვალოთ $A_1; A_2; \dots; A_m$ მატრიცები.

დებულება 3.1.1 [19] თუ $D = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{q_1}, 0, 0, \dots, 0)$, მაშინ $T_2(z) = (z - s_1)^D$ გარდაქმნის

შედეგად მიღებული ფუნქსის ტიპის განტოლებათა სისტემის განსაკუთრებული წერტილების შესაბამისი მატრიცების ანალიზური სახე არის შემდეგი:

$$\begin{aligned}
A_1 = & \begin{pmatrix} \lambda_1^1 + 1 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \lambda_1^1 + 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 \\ \hline & q_1^1 & & p_1^1 - q_1^1 & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & \lambda_{l_1}^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_{l_1}^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{l_1}^1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_{l_1}^1 \end{pmatrix} + \\
& + \sum_{j=2}^m \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -\frac{b_{(q_1^1+1)1}^j}{s_j - s_1} & \cdot & -\frac{b_{(q_1^1+1)q_1^1}^j}{s_j - s_1} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{b_{n1}^j}{s_j - s_1} & \cdot & -\frac{b_{nq_1^1}^j}{s_j - s_1} & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1.8}
\end{aligned}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} b_{11}^j & \cdot & b_{1q_1^1}^j & b_{1(q_1^1+1)}^j(s_j - s_1) & \cdot & b_{1n}^j(s_j - s_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{q_1^1}^j & \cdot & b_{q_1^1 q_1^1}^j & b_{q_1^1(q_1^1+1)}^j(s_j - s_1) & \cdot & b_{q_1^1 n}^j(s_j - s_1) \\ \frac{b_{(q_1^1+1)1}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \frac{b_{(q_1^1+1)q_1^1}^j}{s_j - s_1} & b_{(q_1^1+1)(q_1^1+1)}^j & \cdot & b_{(q_1^1+1)n}^j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{b_{n1}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \frac{b_{nq_1^1}^j}{s_j - s_1} & b_{n(q_1^1+1)}^j & \cdot & b_{nn}^j \end{pmatrix}, \tag{3.1.9}$$

ყოველი j -თვის, $j \in \{2, \dots, m\}$.

დამტკიცება.

გამოსათვლელია მატრიცები $A_j = \operatorname{res}_{s_j} B(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} B(z) dz$; $j \in \{1, \dots, m\}$

ამისათვის კი საჭიროა გამოითვალოს შემდეგი სახის ინტეგრალები:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz; \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_t|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz \text{ და}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz, \text{ სადაც } s_1 \neq s_j \neq s_t; j, t \in \{2, \dots, m\}.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z-s_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{B_1''(z) + D}{z-s_1} dz - \text{ეს ინტეგრალი ცალკე}$$

გამოვითვალოთ $j \in \{1, \dots, m\}$.

პირველ რიგში განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც D დიაგონალური მატრიცის დიაგონალზე მხოლოდ ერთადერთი 1-იანია, ე. ი. დანარჩენი დიაგონალური ელემენტები 0-ის ტოლია. ამ შემთხვევაში D მატრიცა მიიღებს სახეს: $D = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$.

ამის შემდეგ, დიაგონალური მატრიცა, დიაგონალზე სასრული რაოდენობის 1-ებით, განვიხილოთ როგორც თითო-თითო 1-ების მქონე დიაგონალური მატრიცების ერთობლიობა და მისთვის დასამტკიცებელი ფორმულა მიიღება დამტკიცებული ფორმულის ერთობლივად, თანმიმდევრობით გამოყენებების შედეგად.

როდესაც $D = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$, მივიღებთ:

$$T_2(z) = (z - s_1)^D = \begin{pmatrix} z - s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; T_2^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z - s_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; B_j'(z) = \begin{pmatrix} b_{11}^j & b_{12}^j & \dots & b_{1n}^j \\ b_{21}^j & b_{22}^j & \dots & b_{2n}^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^j & b_{n2}^j & \dots & b_{nn}^j \end{pmatrix}.$$

ყოველი ფიქსირებული j თვის $j \in \{2; \dots; m\}$ განვიხილოთ მატრიც-ფუნქცია:

$$\frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} = \begin{pmatrix} \frac{b_{11}^j}{z-s_j} & \frac{b_{12}^j(z-s_1)}{z-s_j} & \frac{b_{1n}^j(z-s_1)}{z-s_j} \\ \frac{b_{21}^j}{(z-s_1)(z-s_j)} & \frac{b_{22}^j}{z-s_j} & \frac{b_{2n}^j}{z-s_j} \\ \frac{b_{n1}^j}{(z-s_1)(z-s_j)} & \frac{b_{n2}^j}{z-s_j} & \frac{b_{nn}^j}{z-s_j} \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის ელემენტები არიან შემდეგი ტიპის რაციონალური ფუნქციები:

$$\frac{z-s_1}{z-s_j} \text{ ან } \frac{1}{(z-s_1)(z-s_j)}.$$

გამოსხულებების გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{z-s_1}{z-s_j} = \frac{z-s_j+s_j-s_1}{z-s_j} = 1 + \frac{s_j-s_1}{z-s_j} = 1 + (s_j-s_1)\frac{1}{z-s_j}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-s_1)(z-s_j)} &= \frac{(z-s_1)-(z-s_j)}{(s_j-s_1)(z-s_1)(z-s_j)} = \frac{1}{(s_j-s_1)} \left(\frac{1}{z-s_j} - \frac{1}{z-s_1} \right) = \\ &= \frac{1}{(s_j-s_1)(z-s_j)} - \frac{1}{(s_j-s_1)(z-s_1)}. \end{aligned}$$

ამ გამარტივების შემდეგ განსახილველი მატრიც-ფუნქციის ელემენტები მიიღებენ სახეს:

$$\begin{aligned} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b_{11}^j}{z-s_j} & b_{12}^j + b_{12}^j(s_j-s_1)\frac{1}{z-s_j} & b_{1n}^j + b_{1n}^j(s_j-s_1)\frac{1}{z-s_j} \\ \frac{b_{21}^j}{(s_j-s_1)(z-s_j)} - \frac{b_{21}^j}{(s_j-s_1)(z-s_1)} & \frac{b_{22}^j}{z-s_j} & \frac{b_{2n}^j}{z-s_j} \\ \frac{b_{n1}^j}{(s_j-s_1)(z-s_j)} - \frac{b_{n1}^j}{(s_j-s_1)(z-s_1)} & \frac{b_{n2}^j}{z-s_j} & \frac{b_{nn}^j}{z-s_j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

დავიწყოთ $A_j = \operatorname{res}_{s_j} B(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} B(z) dz$ მატრიცების გამოთვლა.

ჯერ გამოვთვალოთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z) B_j' T_2^{-1}(z)}{z - s_j} dz; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_t|=r\}} \frac{T_2(z) B_j' T_2^{-1}(z)}{z - s_j} dz \text{ და}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{T_2(z) B_j' T_2^{-1}(z)}{z - s_j} dz, \text{ სადაც } s_1 \neq s_j \neq s_t. \text{ ვიპოვოთ თითოეული თანმიმდევრობით.}$$

ყოველი ფიქსირებული x -თვის შემოვიღოთ აღნიშვნა $\{z: |z - x| = r\} = B(x, r)$, მივიღებთ:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z) B_j' T_2^{-1}(z)}{z - s_j} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(s_j, r)} \frac{T_2(z) B_j' T_2^{-1}(z)}{z - s_j} dz = \frac{1}{2\pi i}$$

$$\begin{pmatrix} \int_{B(s_j, r)} \frac{b_{11}^j}{z - s_j} dz & \int_{B(s_j, r)} (b_{12}^j + \frac{b_{12}^j(s_j - s_1)}{z - s_j}) dz & \int_{B(s_j, r)} (b_{1n}^j + \frac{b_{1n}^j(s_j - s_1)}{z - s_j}) dz \\ \int_{B(s_j, r)} (\frac{b_{21}^j}{(s_j - s_1)(z - s_j)} - \frac{b_{21}^j}{(s_j - s_1)(z - s_1)}) dz & \int_{B(s_j, r)} \frac{b_{22}^j}{z - s_j} dz & \int_{B(s_j, r)} \frac{b_{2n}^j}{z - s_j} dz \\ \int_{B(s_j, r)} (\frac{b_{n1}^j}{(s_j - s_1)(z - s_j)} - \frac{b_{n1}^j}{(s_j - s_1)(z - s_1)}) dz & \int_{B(s_j, r)} \frac{b_{n2}^j}{z - s_j} dz & \int_{B(s_j, r)} \frac{b_{nn}^j}{z - s_j} dz \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} b_{11}^j 2\pi i & b_{12}^j(s_j - s_1) 2\pi i & b_{1n}^j(s_j - s_1) 2\pi i \\ \frac{b_{21}^j}{s_j - s_1} 2\pi i & b_{22}^j 2\pi i & b_{2n}^j 2\pi i \\ \frac{b_{n1}^j}{s_j - s_1} 2\pi i & b_{n2}^j 2\pi i & b_{nn}^j 2\pi i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}^j & b_{12}^j(s_j - s_1) & b_{1n}^j(s_j - s_1) \\ \frac{b_{21}^j}{s_j - s_1} & b_{22}^j & b_{2n}^j \\ \frac{b_{n1}^j}{s_j - s_1} & b_{n2}^j & b_{nn}^j \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(s_1,r)} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz = \frac{1}{2\pi i}$$

$$\begin{pmatrix} \int_{B(s_1,r)} \frac{b_{11}^j}{z-s_j} dz & \int_{B(s_1,r)} (b_{12}^j + \frac{b_{12}^j(s_j-s_1)}{z-s_j}) dz & \int_{B(s_1,r)} (b_{1n}^j + \frac{b_{1n}^j(s_j-s_1)}{z-s_j}) dz \\ \int_{B(s_1,r)} (\frac{b_{21}^j}{(s_j-s_1)(z-s_j)} - \frac{b_{21}^j}{(s_j-s_1)(z-s_1)}) dz & \int_{B(s_1,r)} \frac{b_{22}^j}{z-s_j} dz & \int_{B(s_1,r)} \frac{b_{2n}^j}{z-s_j} dz \\ \int_{B(s_1,r)} (\frac{b_{n1}^j}{(s_j-s_1)(z-s_j)} - \frac{b_{n1}^j}{(s_j-s_1)(z-s_1)}) dz & \int_{B(s_1,r)} \frac{b_{n2}^j}{z-s_j} dz & \int_{B(s_1,r)} \frac{b_{nn}^j}{z-s_j} dz \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -\frac{b_{21}^j}{s_j-s_1} 2\pi i & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{b_{n1}^j}{s_j-s_1} 2\pi i & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -\frac{b_{21}^j}{s_j-s_1} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{b_{n1}^j}{s_j-s_1} & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_t|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(s_t,r)} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz = \frac{1}{2\pi i}$$

$$\begin{pmatrix} \int_{B(s_t,r)} \frac{b_{11}^j}{z-s_j} dz & \int_{B(s_t,r)} (b_{12}^j + \frac{b_{12}^j(s_j-s_1)}{z-s_j}) dz & \int_{B(s_t,r)} (b_{1n}^j + \frac{b_{1n}^j(s_j-s_1)}{z-s_j}) dz \\ \int_{B(s_t,r)} (\frac{b_{21}^j}{(s_j-s_1)(z-s_j)} - \frac{b_{21}^j}{(s_j-s_1)(z-s_1)}) dz & \int_{B(s_t,r)} \frac{b_{22}^j}{z-s_j} dz & \int_{B(s_t,r)} \frac{b_{2n}^j}{z-s_j} dz \\ \int_{B(s_t,r)} (\frac{b_{n1}^j}{(s_j-s_1)(z-s_j)} - \frac{b_{n1}^j}{(s_j-s_1)(z-s_1)}) dz & \int_{B(s_t,r)} \frac{b_{n2}^j}{z-s_j} dz & \int_{B(s_t,r)} \frac{b_{nn}^j}{z-s_j} dz \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

ახლა გამოვთვალოთ ინტეგრალები $\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} dz, j \in \{1, \dots, m\}.$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z)}{z - s_1} dz + \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{D}{z - s_1} dz \right)$$

$= 0 + 0 = 0,$ როდესაც $j \in \{2, \dots, m\}.$ ე. ი. გამოსათვლელი რჩება მხოლოდ ერთი ინტეგრალი:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} dz.$$

ვწახოთ $\frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1}$ მატრიცის სახე:

$$B_1' = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \lambda_{l_1}^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & \lambda_{l_1}^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{l_1}^1 & 1 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_{l_1}^1 \end{pmatrix}.$$

ამი გამო მივიღებთ შენდეგ მატრიცას $\frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} = \frac{B_1''(z) + D}{z - s_1} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^1 + 1}{z - s_1} & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1^1}{z - s_1} & \frac{1}{z - s_1} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \frac{1}{z - s_1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \frac{\lambda_1^1}{z - s_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\lambda_{l_1}^1}{z - s_1} & \frac{1}{z - s_1} & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_{l_1}^1}{z - s_1} & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \frac{1}{z - s_1} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \frac{\lambda_{l_1}^1}{z - s_1} \end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ მატრიცა $\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{B_1''(z) + D}{z - s_1} dz.$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{B_1''(z) + D}{z - s_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(s_1, r)} \frac{B_1''(z) + D}{z - s_1} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} (\lambda_1^1 + 1)2\pi i & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 2\pi i & 2\pi i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_1^1 2\pi i & 2\pi i \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 2\pi i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{l_1}^1 2\pi i & 2\pi i & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{l_1}^1 2\pi i & 2\pi i & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{l_1}^1 2\pi i & 2\pi i \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_{l_1}^1 2\pi i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^1 + 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \lambda_{l_1}^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & 0 & \lambda_{l_1}^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & \lambda_{l_1}^1 & 1 \\ & & & & & & & 0 & \lambda_{l_1}^1 \end{pmatrix}.$$

საბოლოოდ, $A_j = \operatorname{res}_{s_j} B(z)$; $j \in \{1, \dots, m\}$ მატრიცები მიიღებენ სახეს:

$$A_1 = \operatorname{res}_{s_1} B(z) = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 + 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \lambda_{l_1}^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & 0 & \lambda_{l_1}^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & \lambda_{l_1}^1 & 1 \\ & & & & & & & 0 & \lambda_{l_1}^1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{j \in \{2, \dots, m\}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -\frac{b_{21}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{b_{n1}^j}{s_j - s_1} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad (3.1.10)$$

$$A_j = \operatorname{res}_{s_j} B(z) = \begin{pmatrix} b_{11}^j & b_{12}^j(s_j - s_1) & \cdot & b_{1n}^j(s_j - s_1) \\ \frac{b_{21}^j}{s_j - s_1} & b_{22}^j & \cdot & b_{2n}^j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{b_{n1}^j}{s_j - s_1} & b_{n2}^j & \cdot & b_{nn}^j \end{pmatrix}, \quad (3.1.11)$$

ყოველი j -თვის, $j \in \{2, \dots, m\}$.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა ე. ი. როდესაც დიაგონალური მატრიცის დიაგონალზე იმყოფებიან გარკვეული რაოდენობის 1-ები. ამ შემთხვევაში დიაგონალური მატრიცის სახე იქნება შემდეგი $D = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{q_1^1}, 0, 0, \dots, 0)$.

როდესაც $D = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{q_1^1}, 0, 0, \dots, 0)$, მივიღებთ:

თუ თანმიმდევრობით გამოვიყენებთ უკვე დამტკიცებულ $q = 1$ შემთხვევაში მიღებულ (3.1.10) და (3.1.11) ფორმულებს, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
A_1 = \operatorname{res}_{s_1} B(z) = & \begin{pmatrix} \lambda_1^1 + 1 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \lambda_1^1 + 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} \lambda_{l_1}^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{l_1}^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{l_1}^1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_{l_1}^1 \end{pmatrix} \\
& + \sum_{j \in \{2, \dots, m\}} \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -\frac{b_{(q_1^1+1)1}^j}{s_j - s_1} & \cdot & -\frac{b_{(q_1^1+1)q_1^1}^j}{s_j - s_1} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{b_{n1}^j}{s_j - s_1} & \cdot & -\frac{b_{nq_1^1}^j}{s_j - s_1} & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.12)
\end{aligned}$$

$$A_j = \operatorname{res}_{s_j} B(z) = \begin{pmatrix} b_{11}^j & \cdot & b_{1q_1^1}^j & b_{1(q_1^1+1)}^j(s_j - s_1) & \cdot & b_{1n}^j(s_j - s_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{q_1^1}^j & \cdot & b_{q_1^1 q_1^1}^j & b_{q_1^1(q_1^1+1)}^j(s_j - s_1) & \cdot & b_{q_1^1 n}^j(s_j - s_1) \\ \frac{b_{(q_1^1+1)1}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \frac{b_{(q_1^1+1)q_1^1}^j}{s_j - s_1} & b_{(q_1^1+1)(q_1^1+1)}^j & \cdot & b_{(q_1^1+1)n}^j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{b_{n1}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \frac{b_{nq_1^1}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b_{n(q_1^1+1)}^j & \cdot & b_{nn}^j \end{pmatrix}, \quad (3.1.13)$$

ყოველი j -თვის, $j \in \{2, \dots, m\}$.

დებულება 3.1.2 [19] $\text{თუ } D = \text{diag}(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q_1^1}, 0, 0, \dots, 0), \text{ მაშინ } T_2(z) = (z - s_1)^D$

გარდაქმნის შედეგად მიღებული ფუნქსიის ტიპის განტოლებათა სისტემის განსაკუთრებული წერტილების შესაბამისი მატრიცების ანალიზური სახე არის შემდეგი:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 - 1 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \lambda_1^1 - 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & \lambda_1^1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & \lambda_1^1 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{q_1^1} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{p_1^1 - q_1^1} & & & & & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & & & & & \lambda_{l_1}^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & \lambda_{l_1}^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{l_1}^1 & 1 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_{l_1}^1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{j=2}^m \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & -\frac{b_{1(q_1^1+1)}^j}{s_j - s_1} & \cdot & -\frac{b_{1n}^j}{s_j - s_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & -\frac{b_{q_1^1(q_1^1+1)}^j}{s_j - s_1} & \cdot & -\frac{b_{q_1^1 n}^j}{s_j - s_1} \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.14)$$

$$A_j = \operatorname{res}_{s_j} B(z) = \begin{pmatrix} & & & \frac{b_{1(q_1^1+1)}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \frac{b_{1n}^j}{s_j - s_1} \\ & b_{11}^j & \cdot & b_{1q_1^1}^j & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & b_{q_1^1}^j & \cdot & b_{q_1^1 q_1^1}^j & \cdot & \cdot \\ & & & \frac{b_{q_1^1(q_1^1+1)}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \frac{b_{q_1^1 n}^j}{s_j - s_1} \\ b_{(q_1^1+1)1}^j(s_j - s_1) & \cdot & b_{(q_1^1+1)q_1^1}^j(s_j - s_1) & b_{(q_1^1+1)(q_1^1+1)}^j & \cdot & b_{(q_1^1+1)n}^j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}^j(s_j - s_1) & \cdot & b_{nq_1^1}^j(s_j - s_1) & b_{n(q_1^1+1)}^j & \cdot & b_{nn}^j \end{pmatrix}, \quad (3.1.15)$$

ყოველი j -თვის, $j \in \{2, \dots, m\}$.

დამტკიცება. ამ დებულების მტკიცება მსგავსია დებულება 3.1.1-ის მტკიცების, ამის გამო, ზოგი ტოლობას პირდაპირ დავწერთ.

$$\text{გამოსათვლელია მატრიცები } A_j = \operatorname{res}_{s_j} B(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} B(z) dz ; j \in \{1, \dots, m\}$$

ამისათვის კი საჭიროა გამოითვალოს შემდეგი სახის ინტეგრალები:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z) B_j' T_2^{-1}(z)}{z - s_j} dz ; \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_t|=r\}} \frac{T_2(z) B_j' T_2^{-1}(z)}{z - s_j} dz \text{ და}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{T_2(z) B_j' T_2^{-1}(z)}{z - s_j} dz, \text{ სადაც } s_1 \neq s_j \neq s_t ; j, t \in \{2, \dots, m\}.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B'_1T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{B''_1(z) + D}{z - s_1} dz - \text{ეს ინტეგრალი ცალკე}$$

გამოვითვალთ $j \in \{1, \dots, m\}$.

პირველ რიგში, ფორმულა დავამტკიცოთ იმ შემთხვევისთვის, როდესაც დიაგონალური მატრიცის დიაგონალზე მხოლოდ ერთი ცალი -1 წერია.

ამის შემდეგ დიაგონალური მატრიცა, დიაგონალზე სასრული რაოდენობის -1 -ებით, განვიხილოთ როგორც თითო-თითო -1 -ების მქონე დიაგონალური მატრიცების ერთობლიობა და მისთვის დასამტკიცებელი ფორმულა მიიღება დამტკიცებული ფორმულის ერთობლივად, თანმიმდევრობით გამოყენებების შედეგად.

როდესაც $D = \text{diag}(-1, 0, \dots, 0)$, მივიღებთ:

$$T_2(z) = (z - s_1)^D = \begin{pmatrix} \frac{1}{z - s_1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}; T_2^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z - s_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}; B'_j(z) = \begin{pmatrix} b_{11}^j & b_{12}^j & \cdot & b_{1n}^j \\ b_{21}^j & b_{22}^j & \cdot & b_{2n}^j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}^j & b_{n2}^j & \cdot & b_{nn}^j \end{pmatrix}.$$

ყოველი ფიქსირებული j თვის $j \in \{2; \dots; m\}$ განვიხილოთ მატრიც-ფუნქცია:

$$\frac{T_2(z)B'_jT_2^{-1}(z)}{z - s_j} = \begin{pmatrix} \frac{b_{11}^j}{z - s_j} & \frac{b_{12}^j}{(z - s_1)(z - s_j)} & \cdot & \frac{b_{1n}^j}{(z - s_1)(z - s_j)} \\ \frac{b_{21}^j(z - s_1)}{z - s_j} & \frac{b_{22}^j}{z - s_j} & \cdot & \frac{b_{2n}^j}{z - s_j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{b_{n1}^j(z - s_1)}{z - s_j} & \frac{b_{n2}^j}{z - s_j} & \cdot & \frac{b_{nn}^j}{z - s_j} \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის ელემენტები არიანშემდეგი ტიპის რაციონალური ფუნქციები:

$$\frac{z-s_1}{z-s_j} \approx \frac{1}{(z-s_1)(z-s_j)}.$$

გამოსხულებების გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{z-s_1}{z-s_j} = \frac{z-s_j+s_j-s_1}{z-s_j} = 1 + \frac{s_j-s_1}{z-s_j} = 1 + (s_j-s_1) \frac{1}{z-s_j}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-s_1)(z-s_j)} &= \frac{(z-s_1)-(z-s_j)}{(s_j-s_1)(z-s_1)(z-s_j)} = \frac{1}{(s_j-s_1)} \left(\frac{1}{z-s_j} - \frac{1}{z-s_1} \right) = \\ &= \frac{1}{(s_j-s_1)(z-s_j)} - \frac{1}{(s_j-s_1)(z-s_1)}. \end{aligned}$$

ამ გამარტივების შემდეგ განსახილველი მატრიც-ფუნქციის ელემენტები მიიღებენ სახეს:

$$\begin{aligned} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b_{11}^j}{z-s_j} & \frac{b_{12}^j}{(s_j-s_1)} \frac{1}{(z-s_j)} - \frac{b_{12}^j}{(s_j-s_1)} \frac{1}{(z-s_1)} & \frac{b_{1n}^j}{(s_j-s_1)} \frac{1}{(z-s_j)} - \frac{b_{1n}^j}{(s_j-s_1)} \frac{1}{(z-s_1)} \\ b_{21}^j + b_{21}^j(s_j-s_1) \frac{1}{z-s_j} & \frac{b_{22}^j}{z-s_j} & \cdot & \frac{b_{2n}^j}{z-s_j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}^j + b_{n1}^j(s_j-s_1) \frac{1}{z-s_j} & \frac{b_{n2}^j}{z-s_j} & \cdot & \frac{b_{nn}^j}{z-s_j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

დავიწყოთ $A_j = \operatorname{res}_{s_j} B(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} B(z) dz$ მატრიცების გამოთვლა.

ჯერ გამოვთვალოთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_t|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz \text{ და}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz, \text{ სადაც } s_1 \neq s_j \neq s_t. \text{ ვიპოვოთ თითოეული თანმიმდევრობით.}$$

ყოველი ფიქსირებული x -თვის შემოვიღოთ აღნიშვნა $\{z: |z - x| = r\} = B(x, r)$, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B(s_j,r)} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} b_{11}^j 2\pi i & \frac{b_{12}^j}{s_j - s_1} 2\pi i & \cdot & \frac{b_{1n}^j}{s_j - s_1} 2\pi i \\ b_{21}^j (s_j - s_1) 2\pi i & b_{22}^j 2\pi i & \cdot & b_{2n}^j 2\pi i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n}^j (s_j - s_1) 2\pi i & b_{n2}^j 2\pi i & \cdot & b_{nn}^j 2\pi i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^j & \frac{b_{12}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \frac{b_{1n}^j}{s_j - s_1} \\ b_{21}^j (s_j - s_1) & b_{22}^j & \cdot & b_{2n}^j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}^j (s_j - s_1) & b_{n2}^j & \cdot & b_{nn}^j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B(s_1,r)} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b_{12}^j}{s_j - s_1} 2\pi i & \cdot & -\frac{b_{1n}^j}{s_j - s_1} 2\pi i \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b_{12}^j}{s_j - s_1} & \cdot & -\frac{b_{1n}^j}{s_j - s_1} \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_t|=r\}} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B(s_t,r)} \frac{T_2(z)B_j'T_2^{-1}(z)}{z-s_j} dz = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ახლა გამოვთვალოთ ინტეგრალები $\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} dz, j \in \{1, \dots, m\}.$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z)}{z - s_1} dz + \int_{\{z: |z-s_j|=r\}} \frac{D}{z - s_1} dz \right)$$

$= 0 + 0 = 0$, როდესაც $j \in \{2, \dots, m\}$. ე. ი. გამოსათვლელი რჩება მხოლოდ ერთი ინტეგრალი:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} dz,$$

ვნახოთ $\frac{T_2(z)B_1'T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1}$ მატრიცის სახე:

$$B_1' = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_1^1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 \\ & & \cdot & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{l_1}^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{l_1}^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{l_1}^1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_{l_1}^1 \end{pmatrix} - \text{ამ შემთხვევაში, წინა შემთხვევისაგან}$$

განსხვავებით, პირდაპირ გარდაქმნის ჩატარება გამოიწვევს მხოლოდ s_1 განსაკუთრებულ წერტილი პოლუსის რიგი შეცვლას. B_1' მატრიცა არის ჟორდანის კანონიკური სახის მატრიცა, ეს ფაქტი იძლევა საშუალებას, რომ თავიდან ავირიდოთ s_1 წერტილში პოლუსის რიგის შეცვლა, გარდაქმნას ჩავატარებთ მატრიცით:

$$H = \text{diag}(X(p_1^1), I(n - p_1^1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{სადაც } X(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ არის } n \text{ განზომილებიანი მატრიცა, ხოლო } I(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

კი n განზომილებიანი იგივეური მატრიცაა. ამ H მატრიცით გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\tilde{B}'_1 = HB'_1H^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1^1 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & \lambda_1^1 \\ & & & & & & \lambda_{l_1}^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda_{l_1}^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{l_1}^1 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_{l_1}^1 \end{pmatrix} . \quad - \text{ ამის შემდეგ, მიღებული}$$

მატრიცისათვის $\tilde{B}'_1$ იგივენაირად ჩავატარებთ მსჯელობას.

$$\text{განსახილველი მატრიცა არის არის შემდეგი სახის } \frac{T_2(z)\tilde{B}'_1T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} = \frac{\tilde{B}''_1(z) + D}{z - s_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^1 - 1}{z - s_1} & 0 & \cdot & 0 & 0 & & & & \\ & 1 & \frac{\lambda_1^1}{z - s_1} & \cdot & 0 & 0 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ & 0 & 0 & \cdot & \frac{\lambda_1^1}{z - s_1} & 0 & & & \\ & 0 & 0 & \cdot & \frac{1}{z - s_1} & \frac{\lambda_1^1}{z - s_1} & & & \\ & & & & & & \frac{\lambda_{l_1}^1}{z - s_1} & \frac{1}{z - s_1} & \cdot & 0 \\ & & & & & & 0 & \frac{\lambda_{l_1}^1}{z - s_1} & \cdot & 0 \\ & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & 0 & 0 & \cdot & \frac{1}{z - s_1} \\ & & & & & & & & & & \frac{\lambda_{l_1}^1}{z - s_1} \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & \cdot & \frac{\lambda_{l_1}^1}{z - s_1} \end{pmatrix} \cdot$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\{z: |z-s_1|=r\}} \frac{T_2(z) \tilde{B}'_1 T_2^{-1}(z) + D}{z - s_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{B(s_1, r)} \frac{\tilde{B}_1''(z) + D}{z - s_1} dz = \frac{1}{2\pi i}$$

$$\begin{pmatrix} (\lambda_1^1 - 1)2\pi i & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & \lambda_1^1 2\pi i & \cdot & 0 & 0 & 0 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ & 0 & 0 & \cdot & 2\pi i & \lambda_1^1 2\pi i & 0 & & \\ & 0 & 0 & \cdot & 0 & 2\pi i & \lambda_1^1 2\pi i & & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \lambda_{l_1}^1 2\pi i & 2\pi i & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & \lambda_{l_1}^1 2\pi i & 2\pi i & \cdot & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{l_1}^1 2\pi i & 2\pi i \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_{l_1}^1 2\pi i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^1 - 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & \lambda_1^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

საბოლოოდ, $A_j = \text{res}_{s_j} B(z)$; $j \in \{1, \dots, m\}$ მატრიცები მიიღებენ სახეს:

$$A_1 = \text{res}_{s_1} B(z) = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 - 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^1 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & \lambda_1^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{j \in \{2, \dots, m\}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b_{12}^j}{s_j - s_1} & \cdot & -\frac{b_{1n}^j}{s_j - s_1} \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.16)$$

$$A_j = \text{res}_{s_j} B(z) = \begin{pmatrix} b_{11}^j & \frac{b_{12}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \frac{b_{1n}^j}{s_j - s_1} \\ b_{21}^j(s_j - s_1) & b_{22}^j & \cdot & b_{2n}^j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}^j(s_j - s_1) & b_{n2}^j & \cdot & b_{nn}^j \end{pmatrix}, \quad (3.1.17)$$

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა ე. ი. როდესაც დიაგონალური მატრიცის დიაგონალზე იმყოფებიან გარკვეული რაოდენობის 1-ები. ამ შემთხვევაში დიაგონალური მატრიცის სახე იქნება შემდეგი: $D = \text{diag}(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q_1^1}, 0, 0, \dots, 0)$.

თუ თანმიმდევრობით გამოვიყენებთ უკვე დამტკიცებულ $q = 1$ შემთხვევაში მიღებულ (3.1.16) და (3.1.17) ფორმულებს, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$A_1 = \text{res}_{s_1} B(z) = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 - 1 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \lambda_1^1 - 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \lambda_1^1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & \lambda_1^1 & \cdot & 0 & 0 \\ \underbrace{0 \quad \cdot \quad 0}_{q_1^1} & \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdot \quad 1 \quad \lambda_1^1}_{p_1^1 - q_1^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{l_1}^1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{l_1}^1 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{l_1}^1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_{l_1}^1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{j \in \{2, \dots, m\}} \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & -\frac{b_{1(q_1^1+1)}^j}{s_j - s_1} & \cdot & -\frac{b_{1n}^j}{s_j - s_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & -\frac{b_{q_1^1(q_1^1+1)}^j}{s_j - s_1} & \cdot & -\frac{b_{q_1^1 n}^j}{s_j - s_1} \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.18)$$

$$A_j = \operatorname{res}_{s_j} B(z) = \begin{pmatrix} & b_{11}^j & \cdot & b_{1q_1^1}^j & \frac{b_{1(q_1^1+1)}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \frac{b_{1n}^j}{s_j - s_1} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & b_{q_1^1}^j & \cdot & b_{q_1^1 q_1^1}^j & \frac{b_{q_1^1(q_1^1+1)}^j}{s_j - s_1} & \cdot & \frac{b_{q_1^1 n}^j}{s_j - s_1} \\ b_{(q_1^1+1)1}^j(s_j - s_1) & \cdot & b_{(q_1^1+1)q_1^1}^j(s_j - s_1) & b_{(q_1^1+1)(q_1^1+1)}^j & \cdot & b_{(q_1^1+1)n}^j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}^j(s_j - s_1) & \cdot & b_{nq_1^1}^j(s_j - s_1) & b_{n(q_1^1+1)}^j & \cdot & b_{nn}^j \end{pmatrix}, \quad (3.1.19)$$

ყოველი j -თვის, $j \in \{2, \dots, m\}$.

ამით დებულება დამტკიცებულია.

თეორემა 3.1.3 [16-17] (3.1.5) სისტემის ვალუაციები სინგულარულ წერტილებში არიან ინვარიანტები T_1 ტიპის გარდაქმნების მიმართ.

დამტკიცება. ეს გამომდინარეობს (3.1.5) ფუქსის სისტემის ამონახსნთა სივრცის სტრუქტურის შესახებ არსებული ლეველის თეორემიდან. მართლაც, ამონახსნთა სივრცეზე მონოდრომიის მატრიცის მოქმედების შედეგად, ლეველის ბაზისის განსაზღვრებაში, 2) პირობაში მითითებული უტოლობა არ იცვლება, ეს კი ამტკიცებს თეორემას.

3.2. ინდუცირებული ფიბრაციის გახლეჩის ტიპის გამოთვლა

კვლავ განვიხილოთ ფუქსის ტიპის წრფივ განტოლებათა სისტემა სასრული რაოდენობის განსაკუთრებული წერტილებით, რომლებს შორისაც არ არის ∞ ე. ი.

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{B_i}{z - s_i} \right) y \quad (3.2.1)$$

სადაც

$$\sum_{i=1}^m B_i = 0.$$

(3.2.1) განტოლებათა სისტემის მონოდრომიის წარმოდგენაა:

$$\chi : \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, \dots, s_m\}, z_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}). \quad (3.2.2)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, χ მონოდრომიის წარმოდგენის საშუალებით, $\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, \dots, s_m\}$ მრავალსახეობაზე, შესაძლებელია აიგოს ვექტორული ფიბრაცია E ჰოლომორფული ბმულობით ∇ . ეს ვექტორული ფიბრაცია E გაგრძელებადია ყოველ s_i განსაკუთრებულ წერტილში. ამასთან, E ვექტორული ფიბრაციის ნებისმიერი გაგრძელება s_i წერტილში, რომელსაც აქვს არაუმეტეს ლოგარითმული განსაკუთრებულობის მქონე ბმულობა s_i წერტილში, მოიცემა C_i და Λ_i მატრიცების საშუალებით ისე, რომ სრულდება პირობები:

- a) $C_i^{-1} \chi([g_i]) C_i$ – ზედა სამკუთხა მატრიცაა,
- b) $\Lambda_i = \text{diag}(\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^n)$, $\lambda_i^1 \in \mathbb{Z}$, $\lambda_i^1 \geq \dots \geq \lambda_i^n$,

სადაც C_i არის მატრიცა, რომლის საშუალებითაც $\chi([g_i])$ მატრიცა მიიყვანება ზედა სამკუთხა სახეზე.

ყოველ s_i განსაკუთრებულ წერტილში, ვექტორული ფიბრაციის გაგრძელების შედეგად, მივიღებთ ვექტორულ ფიბრაციას რიმანის სფეროზე $\mathbb{CP}^1$. C -ით აღვნიშნოთ $C_1, \dots, C_m$ მატრიცების ერთობლიობა, Λ -ით კი $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ მატრიცების ერთობლიობა, სადაც $\lambda_i = (\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^n)$ არის Λ_i მატრიცის დიაგონალი, ხოლო $F^{C, \Lambda}$ -ით E ფიბრაციის შესაბამისი

გაგრძელება მთელ $\mathbb{CP}^1$ რიმანის სფეროზე. როდესაც $\lambda_i = (0, \dots, 0)$, ფიბრაციის გაგრძელება არაა დამოკიდებული $C_1, \dots, C_m$ მატრიცებზე და ამ გაგრძელებას, როგორც აღვნიშნეთ პარაგრაფ 2.3-ში, ეწოდება კანონიკური გაგრძელება. თუ C_i და Λ_i აკმაყოფილებენ a) და b) პირობას, $\forall i, i \in \{1, \dots, m\}$. ამ პირობებში, თეორემა 2.4.1-ის თანახმად, ვექტორული ფიბრაცია F ექვივალენტურია წრფივი ფიბრაციების პირდაპირი ჯამის:

$$F \cong \mathcal{O}(k_1^{C, \Lambda}) \oplus \mathcal{O}(k_2^{C, \Lambda}) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k_n^{C, \Lambda}).$$

ზოგადად, C -ისა და Λ -ს ცოდნის შემთხვევაში, $F^{C, \Lambda}$ ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპის გამოთვლა არაა შესაძლებელი. მაგრამ, თუ გვაქვს (3.2.2) მონოდრომიის მქონე თუნდაც ერთი რეგულარული სისტემა, რომლის ყველა განსაკუთრებული წერტილი პირველი რიგის პოლუსია, გარდა უსასრულობისა, მაშინ გახლეჩვის ტიპის მოძებნა შესაძლებელია ალგორითმულად, ოპერაციების სასრული რაოდენობის საშუალებით.

ქვემოთ მოყვანილ მსჯელობას ვიწყებთ (3.2.1) სისტემის ნებისმიერი განსაკუთრებული s_i წერტილისათვის და ვიმეორებთ მას ყოველი განსაკუთრებული წერტილისათვის ცალ-ცალკე. ამასთან, საბოლოო შედეგი დამოკიდებული არ არის საწყისი წერტილის არჩევაზე [3].

ვექტორები $([Re(\mu_1^1)], \dots, [Re(\mu_1^n)])$ და $\lambda_i = (\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^n)$ ერთმანეთს გავუტოლოთ, სადაც $(\mu_1^1, \dots, \mu_1^n)$ არის B_i მატრიცის მახასიათებელი ფესვებისაგან შედგენილი ვექტორი და ამას ვაკეთებთ უცნობთა წრფივი გარდაქმნების საშუალებით (იხილეთ პარაგრაფი 3.1.), რომლის მატრიცა არის ან მუდმივი გადაუგვარებელი T_j მატრიცა და

$$\det T_j \neq 0, \quad (3.2.3)$$

ან გარდაქმნის მატრიცას აქვს სახე

$$T_j(z) = (z - s_k)^{\text{diag}(0, \dots, 0, \pm 1, \dots, \pm 1, 0, \dots, 0)}, \quad (3.2.4)$$

სადაც s_k არის (3.2.1) სისტემის განსაკუთრებული წერტილი. ამ ქმედებების შედეგად, საბოლოოდ, მიიღება $T(z)$ მატრიცა, რომელიც არის უცნობთა წრფივი გარდაქმნების მატრიცების ნარავლი $T(z) = T_l(z) \dots T_1(z)$, სადაც $T_j(z)$ არის (3.2.3) ან (3.2.4) სახის

მატრიცა, ხოლო $T(z)$ ტრანსფერ-მატრიცის ფაქტორიზაციით ვპოულობთ $F^{C, \Lambda}$ ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპს.

დებულება 3.2.1 [19] $T(z)$ ტრანსფერ-მატრიცა არის რაციონალური მატრიცული ფუნქცია, რომლის განსაკუთრებული წერტილების სიმრავლე არის (3.2.1) სისტემის განსაკუთრებული წერტილების სიმრავლის ქვესიმრავლე.

დამტკიცება. მართლაც, $T(z) = T_l(z) \dots T_1(z)$ ნამრავლში, თითოეული $T_j(z)$ თანამრავლი არის ან მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცა, ან $T_j(z) = (z - s_k)^{\text{diag}(0, \dots, 0, \pm 1, \dots, \pm 1, 0, \dots, 0)}$ სახის, s_k არის (3.2.1) სისტემის განსაკუთრებული წერტილი ე. ი. $T(z)$ მატრიცისათვის s_k შეიძლება იყოს განსაკუთრებული წერტილი, მხოლოდ მაშინ, როდესაც $T_j(z) = (z - s_k)^{\text{diag}(0, \dots, 0, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)}$, ე. ი. თუ $T(z)$ მატრიცას აქვს განსაკუთრებული წერტილები, ისინი არიან (3.2.1) სისტემის განსაკუთრებული წერტილებს შორის.

მატრიცული ფუნქციის ფაქტორიზაციის ერთ-ერთ შესაძლო შემთხვევას, რომელიც *სავაჟის ლემის* სახელით არის ცნობილი, გამოვიყენებთ ქვემოთ მოყვანილი თეორემის დამტკიცების დროს.

ლემა 3.2.1 (სავაჟის ლემა) [21-22] $\mathbb{C}$ -ზე განსახდვრული ნებისმიერი მერომორფული $T(z)$ მატრიც-ფუნქციისათვის, რომელიც ჰოლომორფულად შებრუნებადია ნული წერტილის რომელიმე მიდამოში, არსებობს $\mathbb{C}$ -ზე ჰოლომორფულად შებრუნებადი $\Gamma(z)$ მატრიც-ფუნქცია და ∞ წერტილის მიდამოში ჰოლომორფულად შებრუნებადი $U(z)$ მატრიც ფუნქცია ისე, რომ

$$\Gamma(z)T(z) = z^K U(z), \quad (3.2.5)$$

სადაც $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$, $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

ლემა 3.2.1. შესაძლებელია გამოყვანილი იქნას მატრიცული ფუნქციის ფაქტორიზაციის თეორემიდან. მისი ორიგინალური დამტკიცება მოყვანილია [21]-ში.

თეორემა 3.2.1 [18] $F^{C, \Lambda}$ ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი ემთხვევა $T(z)$ ტრანსფერ-მატრიცის კერძო ინდექსებს.

დამტკიცება. თეორემას დავამტკიცებთ F^0 ვექტორული ფიბრაციის კანონიკური გაგრძელებისათვის. ამიტომ (3.1.5) სისტემას აქვს 0 ვალუაციები ყოველ სინგულარულ წერტილში. ვთქვათ $T(z)$ არის შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცა. ლემა 3.2.1-ის გამო, $T(z)$ მატრიცისათვის, განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში, გვაქვს (3.2.5) წარმოდგენა:

$$S_+(z)T(z) = z^D S_-(z),$$

სადაც $S_+(z)$ არის ჰოლომორფულად შებრუნებადი $\mathbb{C}$ -ში, $S_-(z)$ ჰოლომორფულად შებრუნებადია ∞ წერტილის რომელიმე U მიდამოში და D არის დიაგონალური მატრიცა, რომლის დიაგონალზე დგანან მთელი რიცხვები - $D = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$, $k_1 \geq \dots \geq k_n$. (3.1.4) წარმოდგენის გამო, შესაბამისი შტოს არჩევის შემდეგ, განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში, (3.2.1) სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტურ მატრიცას აქვს სახე:

$$\Psi(z) = U_j(z - s_j)^{E_j}$$

და შეგვიძლია ჩავთვალოთ, როგორც F^0 ვექტორულ ფიბრაციის განმსაზღვრელი კოციკლი, რომელიც შეესაბამება $\mathbb{CP}^1$ -ის დაფარვას, $\mathbb{C}$ -თი და ისეთი U ღია სიმრავლით, რომ $s_j \notin U$. მეორე მხრივ (3.2.1) და (3.1.5) სისტემების $F(z)$ და $\Psi(z)$ ამონახსნთა ფუნდამენტური მატრიცებისათვის სრულდება ტოლობა $\Psi(z) = T(z)F(z)$. ამიტომ მატრიც-ფუნქცია:

$$z^D = S_+(z)\Psi(z)F^{-1}(z)S_-^{-1}(z),$$

U -ზე, ექვივალენტურია F^0 -ის განმსაზღვრელი კოციკლის. რიმანის სფეროზე, ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაციის დაშლა, წრფივი ფიბრაციების პირდაპირ ჯამად (იხილეთ თეორემა 2.4.1), არის ერთადერთი და იგივეობა $T(z) = S_+^{-1}(z)z^D S_-(z)$ გვაძლევს თეორემის დამტკიცებას.

ამრიგად, ყოველ $F^{C, \Lambda}$ -ს შეესაბამება რაციონალური მატრიც-ფუნქცია. ამ რაციონალური მატრიც-ფუნქციის კერძო ინდექსები ემთხვევიან $F^{C, \Lambda}$ ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩის ტიპს. ე. ი. იმისათვის, რომ დავადგინოთ $F^{C, \Lambda}$ ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩის ტიპი, საჭიროა მოვახდინოთ რაციონალური მატრიც-ფუნქციის ფაქტორიზაცია.

თავი IV. მეორე რიგის, რეგულარულ განტოლებათა სიტემებისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაციები

4.1. ჰიპერგეომეტრიული განტოლებისაგან ინდუცირებული

ჰოლომორფული ფიბრაცია

რიმანის სფეროზე, მეორე რიგის ფუქსის განტოლება, სამი სინგულარული წერტილით 0, 1, ∞ , არის ჰიპერგეომეტრიული განტოლება:

$$z(z-1)y''(z) + (\gamma - (\alpha + \beta)z)y'(z) - \alpha\beta y(z) = 0. \quad (4.1.1)$$

როგორც აღვნიშნეთ, პარაგრაფ 2.2-ში, (4.1.1) არის აქსესორული პარამეტრებისაგან თავისუფალი განტოლება, რადგან (2.2.3) და (2.2.4) ფორმულებით მოცემული N_{eq} და N_{mon} რიცხვების სხვაობა 0-ის ტოლია, როდესაც განსაკუთრებული წერტილების რაოდენობა ტოლია სამის და განტოლების რიგი კი ორია. ეს, თავის მხრივ, იმას ნიშნავს, რომ (4.1.1) განტოლების მონოდრომიის წარმოდგენა განისაზღვრება ექსპონენტების საშუალებით. გარდა ამისა, არსებობს ფუქსის სისტემა, იგივე სინგულარული წერტილებითა და მონოდრომიებით. დებულება 2.2.2-ში მოყვანილი გარდაქმნის შემდეგ შესაბამისი სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha\beta & -\gamma \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \gamma - (\alpha + \beta) \end{pmatrix}}{z-1} \right) y, \quad (4.1.2)$$

რომელიც არის ფუქსის სისტემა, იმავე განსაკუთრებული წერტილებითა და მონოდრომიის მატრიცებით.

ცნობილია, რომ თუ წარმოდგენა დაუყვანადია, მაშინ [11] :

$$\sum_{i=1}^n (k_1^{C, \Lambda} - k_i^{C, \Lambda}) \leq \frac{1}{2} n(n-1)(m-2), \quad (4.1.3)$$

თეორემა 4.1.1 [17], [10]. ვთქვათ $\alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta$ არიან მთელი რიცხვები, მაშინ (4.1.1) და (4.1.2) განტოლებებისაგან ინდუცირებული ორგანზომილებიანი ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი k_1 და k_2 , $E(k_1) \oplus E(k_2) \rightarrow \mathbb{CP}^1$, E ვექტორული ფიბრაციის ჩერნის რიცხვის $c_1(E)$ საშუალებით გამოისახება შემდეგნაირად:

თუ $c_1(E)$ არის კენტი:

$$k_1 = \left\lfloor \frac{c_1(E)}{2} \right\rfloor + 1, \quad k_2 = \left\lfloor \frac{c_1(E)}{2} \right\rfloor, \quad (4.1.4)$$

თუ $c_1(E)$ არის ლუწი:

$$k_1 = k_2 = \frac{c_1(E)}{2}, \quad (4.1.5)$$

დამტკიცება. თუ რიცხვებიდან, $\alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta$ არცერთია მთელი, მაშინ (4.1.1) და (4.1.2) განტოლების მონოდრომიის წარმოდგენა დაუყვანადია, რომელისგანაც (4.1.3)-თან ერთად გამომდინარეობს, რომ ვექტორული ფიბრაციის, კანონიკური გაგრძელების კერძო ინდექსები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$k_1 - k_2 \leq 1, \quad (4.1.6)$$

აქედან გამომდინარე ფიბრაცია არის მდგრადი. ეს ნიშნავს, რომ E ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპია $(k_1, k_1 - 1)$ ან (k_1, k_1) . სხვანაირად, რომ ვთქვათ $c_1(E) = k_1 + k_2$, რომლისგანაც გამომდინარეობს (4.1.1) და (4.1.2).

შენიშვნა. ანალოგიური თეორემა სხვა მეთოდებით დამტკიცებულია [36]-ში.

4.2. ტრანსფერ-მატრიცის აგების ალგორითმის რეალიზაცია

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ, მესამე თავში მოყვანილი ძირითადი შედეგების რეალიზაციას მეორე რიგის ფუქსის სისტემებისათვის და განტოლებებისათვის.

კერძოდ, ავაგებთ ტრასფერ-მატრიცას, მოვახდენთ მის ფაქტორიზაციას და გამოვთვლით მეორე რიგის, ჰოლომორფული ფიბრაციის გახლეჩის ტიპს. ამასთან, განვიხილავთ კონკრეტული განსაკუთრებული წერტილის მქონე განტოლებას, რადგან პარაგრაფი 1.2-ში მოყვანილი რიმანის სქემისა და მასთან დაკავშირებული წილად-წრფივი გარდაქმნების თვისებების გამო, მიიღება ყველა სხვა შემთხვევა.

აქვე შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, თუ ∞ იქნება განსაკუთრებული წერტილებს შორის, განვიხილავთ რომელიმე a ელემენტს $a \in \mathbb{C} \setminus \{s_1, \dots, s_m\}$ და $\mathbb{CP}^1$ რიმანის სფეროზე განსაზღვრული წილად-წრფივი ასახვა

$$w = \frac{1}{z - a},$$

(3.1.1) სისტემას გადაიყვანს სისტემაში

$$\frac{dy}{dw} = \left(\frac{B_0}{w} + \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{w - (s_i - a)^{-1}} \right) y, \quad (4.2.1)$$

რომელისთვისაც ∞ უკვე არ არის განსაკუთრებული წერტილი, აქ B_0 არის ნაშთი ∞ წერტილში ე. ი.

$$B_0 + \sum_{i=1}^m B_i = 0$$

და მივიღებთ საწყისის ყალიბურად ექვივალენტურ სისტემას.

კონკრეტული მაგალითის შემთხვევაში ავაგოთ ტრასფერ-მატრიცა: განვიხილოთ ფუქსის ტიპის წრფივ განტოლებათა სისტემა, სამი განსაკუთრებული წერტილით - $\{2; 0; 1\}$.

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y,$$

განსაკუთრებული წერტილების შესაბამისი მატრიცები აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}; B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

პირველი ნაბიჯი არის მატრიცის ჟორდანის კანონიკურ სახეზე მიყვანა. განვიხილოთ B_1 მატრიცი და მივიყვანოთ ის ჟორდანის კანონიკურ სახეზე.

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ მატრიცა მსგავსია } B'_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ ჟორდანის მატრიცის, კერძოდ:}$$

$$\text{გარდაქმნის მატრიცათა ოჯახია } C = \begin{pmatrix} x & 2z \\ z & 0 \end{pmatrix} \quad x, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad C^{-1} = \frac{1}{-2z^2} \begin{pmatrix} 0 & -2z \\ -z & x \end{pmatrix}.$$

$B_1 = C^{-1}B'_1C$, მართლაც:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{-2z^2} \begin{pmatrix} 0 & -2z \\ -z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 2z \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3x}{4z} + \frac{1}{2} + \frac{3x}{4z} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$B_1 = C^{-1}B'_1C \text{ ო. } B'_1 = CB_1C^{-1}.$$

C გარდაქმნის მატრიცად განვიხილოთ $x = 0$ – ისა და $z = \frac{1}{2}$ – ის შესაბამისი მატრიცა

$$-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

ნაბიჯი 2:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; T_1^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

T_1 მატრიცა მუდმივია, ამის გამო, T_1 მატრიცით უცნობთა გარდაქმნის შედეგად, მიიღება სისტემა:

$$\underbrace{B_1; B_2; B_3}_{\text{გვაქვს მატრიცები}} \rightarrow y_1 = T_1 y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} y}_{\text{გვაქვს გარდაქმნა და ამ გარდაქმნის საშუალებით}} \rightarrow \underbrace{T_1 B_1 T_1^{-1}; T_1 B_2 T_1^{-1}; T_1 B_3 T_1^{-1}}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}};$$

გამოვთვალოთ მატრიცები:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_1 B_1 T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow T_1 B_2 T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_1 B_3 T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dy_1}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_1,$$

მიღებული მატრიცები აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$B'_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}; B'_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B'_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა არის ისევ ფუქსის ტიპის.

მეორე გარდაქმნის მატრიცის ასაგებად გვჭირდება B'_1 მატრიცის მახასიათებელი ფესვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილები. გამოვთვალოთ B'_1 მატრიცის მახასიათებელი ფესვები:

$$\det(B'_1 - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{2} - \lambda\right) \left(-\frac{3}{2} - \lambda\right) = \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)^2, \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{3}{2},$$

$$[\operatorname{Re}(\lambda_1)] = [\operatorname{Re}(\lambda_2)] = -2.$$

ამის გამო, მეორე გარდაქმნის მატრიცა განისაზღვრება შემდეგნაირად :

$$\begin{aligned} D = \operatorname{diag}(1; 1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; s_1 = 2 \Rightarrow (z - s_1)^D = (z - 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z - 2)^1 & 0 \\ 0 & (z - 2)^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z - 2 & 0 \\ 0 & z - 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ნაბიჯი 3:

$$T_2(z) = (z - s_1)^D = (z - 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - 2 & 0 \\ 0 & z - 2 \end{pmatrix} \text{ პ. ო.}$$

$$T_2(z) = \begin{pmatrix} z - 2 & 0 \\ 0 & z - 2 \end{pmatrix} \text{ და } T_2^{-1}(z) = \frac{1}{(z - 2)^2} \begin{pmatrix} z - 2 & 0 \\ 0 & z - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z - 2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z - 2} \end{pmatrix}.$$

$T_2(z)$ მატრიცა არ არის მუდმივი, ამის გამო, $T_2(z)$ მატრიცით უცნობთა გარდაქმნის შემდეგად, მიიღება სისტემა:

$$\underbrace{B'_1; B'_2; B'_3}_{\substack{\text{გვაქვს} \\ \text{მატრიცები}}} \rightarrow y_2 = \underbrace{T_2(z)y_1 = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} y_1}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და} \\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}}$$

$$\rightarrow \underbrace{T_2(z)B'_1T_2^{-1}(z); T_2(z)B'_2T_2^{-1}(z); T_2(z)B'_3T_2^{-1}(z) \text{ და } \frac{dT_2(z)}{dz}T_2^{-1}(z)}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}};$$

გამოვთვალოთ მატრიცები:

$$\begin{aligned} B'_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_2(z)B'_1T_2^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$B'_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T_2(z)B'_2T_2^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B'_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_2(z)B'_3T_2^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_2(z)}{dz} &= \begin{pmatrix} (z-2)' & 0' \\ 0' & (z-2)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ო. } \frac{dT_2(z)}{dz}T_2^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-2}. \end{aligned}$$

მიიღებული სისტემა არის შემდეგი სახის:

$$\begin{aligned}\frac{dy_2}{dz} &= \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-2} \right) y_2 = \\ &= \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_2.\end{aligned}$$

მეორე გარდაქმნის შემდეგ მიიღება ფუქსის ტიპის სისტემა, იგივე განსაკუთრებული წერტილებით.

$$\frac{dy_2}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_2,$$

სისტემის განსაკუთრებული წერტილების შესაბამის მატრიცები აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$B_1'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; B_2'' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B_3'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ვამოწმებთ, B_1'' მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილები მოთავსებულია თუ არა ინტერვალში $[0; 1)$, ამისათვის გამოვთვალოთ B_1'' მატრიცის მახასიათებელი ფესვები:

$$\det(B_1'' - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

$[\operatorname{Re}(\lambda_1)] = [\operatorname{Re}(\lambda_2)] = -1 \notin [0; 1)$ - ვაგრძელებთ მსჯელობას.

B_1'' მატრიცი მივიყვანოთ თავის მსგავს ჟორდანის მატრიცაზე. თუ დავაკვირდებით B_1'' მატრიცა თვითონ არის ჟორდანის მატრიცა. ამის გამო, მომდევნო გარდაქმნა იქნება შემდეგი:

ნაბიჯი 4:

$$T_3(z) = (z - s_1)^D = (z - 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \text{ ო. } T_3^{-1}(z) = \frac{1}{(z-2)^2} \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix}.$$

$T_3(z)$ მატრიცა არა არის მუდმივი, ამის გამო, $T_3(z)$ მატრიცით უცნობთა გარდაქმნის შემდეგად, მიიღება სისტემა:

$$\underbrace{B_1''; B_2''; B_3''}_{\substack{\text{გვაქვს} \\ \text{მატრიცები}}} \rightarrow y_3 = \underbrace{T_3(z)y_2 = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} y_2}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და} \\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}}$$

$$\rightarrow \underbrace{T_3(z)B_1''T_3^{-1}(z); T_3(z)B_2''T_3^{-1}(z); T_3(z)B_3''T_3^{-1}(z) \text{ და } \frac{dT_3(z)}{dz}T_3^{-1}(z)}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}} ;$$

გამოვთვალოთ მატრიცები:

$$B_1'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_3(z)B_1''T_3^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B_2'' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T_3(z)B_2''T_3^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_3'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_3(z)B_3''T_3^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dT_3(z)}{dz} = \begin{pmatrix} (z-2)' & 0' \\ 0' & (z-2)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ო. } \frac{dT_3(z)}{dz} T_3^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-2}.$$

მიღებული სისტემა იქნება შემდეგი:

$$\frac{dy_3}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-2} \right) y_3 =$$

$$= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_3.$$

გარდაქმნების შემდეგ მივიღით წრფივ განტოლებათა სისტემადე:

$$\frac{dy_3}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_3,$$

მიღებული მატრიცები აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$B_1''' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; B_2''' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B_3''' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ B_1''' მატრიცის მახასიათებელი ფესვები:

$$\det(B_1''' - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2, \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \text{ ე. ი. } [\operatorname{Re}(\lambda_1)]$$

$$= [\operatorname{Re}(\lambda_2)] = 0 \in [0; 1).$$

აქამდე ვატარებდით გარდაქმნას : მახასიათებელი ფესვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილების შეცვლა, ისე რომ მიღებული რიცხვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილები მოხვდნენ $[0; 1)$ ინტერვალში. პირველი მატრიცის შემთხვევაში, უკვე მივედით იმ შემთხვევაზე, რომ მიღებული რიცხვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილები არიან $[0; 1)$ ინტერვალში. ამის გამო, გადავდივართ მიღებულ განტოლებათა სისტემის მეორე მატრიცაზე.

სამი გარდაქმნის შემდეგ გვაქვს სისტემა:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y,$$

განსაკუთრებული წერტილების შესაბამისი მატრიცები აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$\ddot{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \ddot{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ddot{B}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\ddot{B}_2$ მატრიცი მიგვყვავს ჟორდანის კანონიკურ სახეზე.

$\ddot{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ მატრიცა მსგავსია $\ddot{B}'_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ჟორდანის მატრიცის, კერძოდ:

გარდაქმნის მატრიცათა ოჯახია $C = \begin{pmatrix} x & -\frac{3}{2}x \\ 0 & t \end{pmatrix}$, $x, t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $C^{-1} = \frac{1}{xt} \begin{pmatrix} t & \frac{3}{2}x \\ 0 & x \end{pmatrix}$,

$$B_2 = C^{-1}B'_2C.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{xt} \begin{pmatrix} t & \frac{3}{2}x \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -\frac{3}{2}x \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} & \frac{3}{2t} \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -\frac{3}{2}x \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C გარდაქმნის მატრიცად განვიხილოთ $x = 1$ -ისა და $z = 1$ -ის შესაბამისი მატრიცა

$$-\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ნაბიჯი 5:

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad T_4^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

T_4 მატრიცა მუდმივია, ამის გამო T_4 მატრიცით უცნობთა გარდაქმნის შედეგად, მიიღება სისტემა:

$$\underbrace{\ddot{B}_1; \ddot{B}_2; \ddot{B}_3}_{\substack{\text{გვაქვს} \\ \text{მატრიცები}}} \rightarrow y_4 = T_4 y_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_3}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და} \\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}} \rightarrow \underbrace{T_4 \ddot{B}_1 T_4^{-1}; T_4 \ddot{B}_2 T_4^{-1}; T_4 \ddot{B}_3 T_4^{-1}}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები};$$

გამოვთვალოთ მატრიცები:

$$\ddot{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_4 \ddot{B}_1 T_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T_4 \ddot{B}_2 T_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{B}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_4 \ddot{B}_3 T_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

შედეგად მიიღება სისტემა:

$$\frac{dy_4}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_4,$$

მიღებული მატრიცები აღვნიშნოთ შემდეგი სიმბოლოებით:

$$\ddot{B}'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \ddot{B}'_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ddot{B}'_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ $\ddot{B}'_2$ მატრიცის მახასიათებელი ფესვები:

$$\det(\ddot{B}'_2 - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)\lambda_1 = 2 \text{ და } \lambda_2 = 1 \text{ ე. ი.}$$

$[\operatorname{Re}(\lambda_1)] = 2 \notin [0; 1)$ და $[\operatorname{Re}(\lambda_2)] = 1 \notin [0; 1)$, ორივე მათგანი $[0; 1)$ ინტერვალს მიღმაა, ამის გამო, მეხუთე გარდაქმნის მატრიცა განისაზღვრება შემდეგნაირად :

$$D = \operatorname{diag}(-1; -1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; s_2 = 0 \Rightarrow (z - s_2)^D = (z - 0)^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

ნაბიჯი 6:

$$T_5(z) = (z - s_2)^D = (z - 0)^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (z - 0)^{-1} & 0 \\ 0 & (z - 0)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

$$\text{ქ.ო. } T_5^{-1}(z) = \frac{1}{\frac{1}{z^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} = z^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

$T_5(z)$ არაა მუდმივი, ამის გამო $T_5(z)$ მატრიცით უცნობთა გარდაქმნის შემდეგად, მიიღება სისტემა:

$$\underbrace{\ddot{B}'_1; \ddot{B}'_2; \ddot{B}'_3}_{\substack{\text{გვაქვს} \\ \text{მატრიცები}}} \rightarrow y_5 = T_5(z)y_4 = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} y_4}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და} \\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}}$$

$$\rightarrow \underbrace{T_5(z)\ddot{B}'_1 T_5^{-1}(z); T_5(z)\ddot{B}'_2 T_5^{-1}(z); T_5(z)\ddot{B}'_3 T_5^{-1}(z) \text{ და } \frac{dT_5(z)}{dz} T_5^{-1}(z)}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}};$$

გამოვთვალოთ მატრიცები:

$$\ddot{B}'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_5(z)\ddot{B}'_1 T_5^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{B}'_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T_5(z) \ddot{B}'_2 T_5^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{B}'_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_5(z) \ddot{B}'_3 T_5^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{dT_5(z)}{dz} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{z}\right)' & 0' \\ 0' & \left(\frac{1}{z}\right)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z^2} \end{pmatrix} \text{ ო.ო. } \frac{dT_5(z)}{dz} T_5^{-1}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z}.$$

მიღებული სისტემა იქნება შემდეგი სახის:

$$\begin{aligned} \frac{dy_5}{dz} &= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z-0} \right) y_5 = \\ &= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_5, \end{aligned}$$

მიღებული მატრიცების აღსანიშნავად გამოვიწყოთ შემდეგი სიმბოლოები:

$$\ddot{B}''_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \ddot{B}''_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ddot{B}''_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

გამოვთვალოთ $\ddot{B}_2''$ მატრიცის მახასიათებელი ფესვები:

$$\det(\ddot{B}_2'' - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(0-\lambda) = (\lambda-1)\lambda. \lambda_1 = 1 \text{ და } \lambda_2 = 0 \text{ ე. ი.}$$

$[\operatorname{Re}(\lambda_1)] = 1 \notin [0; 1)$ და $[\operatorname{Re}(\lambda_2)] = 0 \in [0; 1)$ - ერთი ფესვი არ იმყოფება $[0; 1)$ -ში, ამის გამო ვაგრძელებთ მსჯელობას. $\ddot{B}_2''$ უკვე მიყვანილია ჟორდანის სახეზე, ამიტომ ისევ ვატარებთ გარდაქმნას : მახასიათებელი ფესვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილები შევცვალოთ, ისე რომ მიღებული რიცხვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილები მოხვდნენ $[0; 1)$ ინტერვალში. ამის გამო მომდევნო გარდაქმნის მატრიცა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$D = \operatorname{diag}(-1; 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; s_2 = 0 \Rightarrow (z - s_2)^D = (z - 0)^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ნაბიჯი 7:

$$T_6(z) = (z - s_2)^D = (z - 0)^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (z-0)^{-1} & 0 \\ 0 & (z-0)^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ე. ი.}$$

$$T_6^{-1}(z) = \frac{1}{\frac{1}{z}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$T_6(z)$ მატრიცა არ არის მუდმივი, ამის გამო $T_6(z)$ მატრიცით უცნობთა გარდაქმნის შედეგად, მიიღება სისტემა:

$$\underbrace{\ddot{B}_1''; \ddot{B}_2''; \ddot{B}_3''}_{\substack{\text{გვაქვს} \\ \text{მატრიცები}}} \rightarrow y_6 = \underbrace{T_6(z)y_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_5}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და} \\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}}$$

$$\rightarrow \underbrace{T_6(z)\ddot{B}_1''T_6^{-1}(z); T_6(z)\ddot{B}_2''T_6^{-1}(z); T_6(z)\ddot{B}_3''T_6^{-1}(z) \text{ და } \frac{dT_6(z)}{dz}T_6^{-1}(z)}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}};$$

გამოვთვალოთ მატრიცები:

$$\ddot{B}_1'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_6(z) \ddot{B}_1'' T_6^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{B}_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow T_6(z) \ddot{B}_2'' T_6^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{B}_3'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_6(z) \ddot{B}_3'' T_6^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_6(z)}{dz} &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{z}\right)' & 0' \\ 0' & (1)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ჟ.ო.} \quad \frac{dT_6(z)}{dz} T_6^{-1}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0}. \end{aligned}$$

მიიღება სისტემა:

$$\begin{aligned} \frac{dy_6}{dz} &= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} \right) y_6 = \\ &= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_6, \end{aligned}$$

რომლის მატრიცა არის შემდეგი:

$$B(z) = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-2} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix}.$$

მიღებული სისტემა ექვივალენტურია შემდეგი ფუნქსის სისტემის:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 = \operatorname{res}_{s_1} B(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-s_1|=r\}} B(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-2|=r\}} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-2} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix} \right) dz = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_2 = \operatorname{res}_{s_2} B(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-s_2|=r\}} B(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-0|=r\}} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-2} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix} \right) dz = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_3 = \operatorname{res}_{s_3} B(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-s_3|=r\}} B(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-1|=r\}} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & -\frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-2} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(z-1)} & \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix} \right) dz = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ვბრუნდებით ისევ ფუქსის ტიპის სისტემასთან, იგივე განსაკუთრებული წერტილებით:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y,$$

განსაკუთრებული წერტილების შესაბამისი მატრიცები აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tilde{B}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\tilde{B}_2$ უკვე მიყვანილია ჟორდანის სახეზე, ამიტომ ისევ ვატარებთ გარდაქმნას: მახასიათებელი ფესვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილების შევცვალოთ, ისე რომ მიღებული რიცხვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილები მოხვდნენ $[0; 1)$ ინტერვალში.

მაშინ მომდევნო გარდაქმნის მატრიცა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

გამოვთვალოთ $\tilde{B}_2$ მატრიცის მახასიათებელი ფესვები:

$$\det(\tilde{B}_2 - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = (0 - \lambda)(0 - \lambda) = \lambda^2, \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

$[\operatorname{Re}(\lambda_1)] = [\operatorname{Re}(\lambda_2)] = 0 \in [0; 1)$. $\tilde{B}_2$ მატრიცის მახასიათებელი ფესვების რეალური ნაწილების მთელი ნაწილები მოთავსებულია $[0; 1)$ ინტერვალში.

ამის გამო, გადავდივართ სისტემის შემდეგ $\tilde{B}_3$ მატრიცაზე. მივიყვანოთ $\tilde{B}_3$ მატრიცი შესაბამის ჟორდანის მატრიცამდე.

$$\tilde{B}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ მატრიცა მსგავსია ჟორდანის მატრიცის } \tilde{B}_3' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{გარდაქმნის მატრიცათა ოჯახია } C = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad x, t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad \text{ი.ო. } C^{-1} = \frac{1}{xt} \begin{pmatrix} t & -x \\ 0 & x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{t} \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

$\tilde{B}_3 = C^{-1} \tilde{B}'_3 C$, მართლაც:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{t} \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2x} & -\frac{1}{2t} \\ 0 & \frac{1}{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ი.ო. $\tilde{B}_3 = C^{-1} \tilde{B}'_3 C$, ამის გამო $\tilde{B}'_3 = C \tilde{B}_3 C^{-1}$.

C გარდაქმნის მატრიცად განვიხილოთ $x = 1$ -სა და $t = 1$ -ის შესაბამისი მატრიცა -

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ნაბიჯი 8:

$$T_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad T_7^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

T_7 მატრიცა მუდმივია, ამის გამო, T_7 მატრიცით უცნობთა გარდაქმნის შედეგად, მიიღება სისტემა:

$$\underbrace{\tilde{B}_1; \tilde{B}_2; \tilde{B}_3}_{\substack{\text{გვაქვს} \\ \text{მატრიცები}}} \rightarrow \underbrace{y_7 = T_7 y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და} \\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}} \rightarrow \underbrace{T_7 \tilde{B}_1 T_7^{-1}; T_7 \tilde{B}_2 T_7^{-1}; T_7 \tilde{B}_3 T_7^{-1}}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}};$$

გამოვთვალოთ მატრიცები:

$$\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_7 \tilde{B}_1 T_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow T_7 \tilde{B}_2 T_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{B}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_7 \tilde{B}_3 T_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

მიიღება სისტემა:

$$\frac{dy_7}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_7,$$

მიღებული მატრიცები აღვნიშნოთ სიმბოლოებით:

$$\tilde{B}'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \tilde{B}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tilde{B}'_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ $\tilde{B}'_3$ მატრიცის მახასიათებელი ფესვები:

$$\det(\tilde{B}'_3 - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \left(\lambda - \frac{1}{2}\right). \lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ და } \lambda_2 = \frac{1}{2}, [\operatorname{Re}(\lambda_1)] = -1 \notin [0; 1) \text{ და } [\operatorname{Re}(\lambda_2)] = 0 \in [0; 1) - \text{ ერთი ფესვი არ ეკუთვნის } [0; 1)$$

ინტერვალს, ვაგრძელებთ მსჯელობას.

ინტერვალს, ვაგრძელებთ მსჯელობას.

$$D = \operatorname{diag}(1; 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; s_3 = 1 \Rightarrow (z - s_3)^D = (z - 1)^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (z-1)^1 & 0 \\ 0 & (z-1)^0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ნაბიჯი 9:

$$T_8(z) = (z - s_3)^D = (z - 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z-1)^1 & 0 \\ 0 & (z-1)^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ო.ო.}$$

$$T_8^{-1}(z) = \frac{1}{z-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$T_8(z)$ მატრიცა არაა მუდმივი, ამის გამო $T_8(z)$ მატრიცით უცნობთა გარდაქმნის შემდეგად, მიიღება სისტემა:

$$\underbrace{\tilde{B}'_1; \tilde{B}'_2; \tilde{B}'_3}_{\substack{\text{გვაქვს} \\ \text{მატრიცები}}} \rightarrow y_8 = \underbrace{T_8(z)y_7 = \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_7}_{\substack{\text{გვაქვს გარდაქმნა და} \\ \text{ამ გარდაქმნის საშუალებით}}}$$

$$\rightarrow \underbrace{T_8(z)\tilde{B}_1 T_8^{-1}(z); T_8(z)\tilde{B}_2 T_8^{-1}(z); T_8(z)\tilde{B}_3 T_8^{-1}(z) \text{ და } \frac{dT_8(z)}{dz} T_8^{-1}(z)}_{\text{უნდა ავაგოთ მატრიცები}};$$

გამოვთვალოთ მატრიცები:

$$\tilde{B}'_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_8(z)\tilde{B}'_1 T_8^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{B}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow T_8(z)\tilde{B}'_2 T_8^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{B}'_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow T_8(z)\tilde{B}'_3 T_8^{-1}(z) = \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_8(z)}{dz} &= \begin{pmatrix} (z-1)' & 0' \\ 0' & 1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ო.ო. } \frac{dT_8(z)}{dz} T_8^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-1}. \end{aligned}$$

შემდეგად მიიღება სისტემა:

$$\begin{aligned} \frac{dy_8}{dz} &= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_8 = \\ &= \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y_8. \end{aligned}$$

სისტემის მატრიცა აღვნიშნოთ სიმბოლოთი:

$$\begin{aligned} \tilde{B}(z) &= \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(z-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2(z-2)} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

მიღებული სისტემა ექვივალენტურია შემდეგი ფუნქსის სისტემის:

$$\tilde{B}_1'' = \operatorname{res}_{s_1} \tilde{B}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-s_1|=r\}} \tilde{B}(z) dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-2|=r\}} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2(z-2)} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix} \right) dz = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_2'' &= \operatorname{res}_{s_2} \tilde{B}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-s_2|=r\}} \tilde{B}(z) dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-0|=r\}} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2(z-2)} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix} \right) dz = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_3'' &= \operatorname{res}_{s_3} \tilde{B}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-s_3|=r\}} \tilde{B}(z) dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\{z: |z-1|=r\}} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-2)} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2(z-2)} \\ 0 & \frac{1}{2(z-2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2(z-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(z-1)} \end{pmatrix} \right) dz = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ისევ ვბრუნდებით ფუქსის ტიპის სისტემასთან, იგივე განსაკუთრებული წერტილებით:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-0} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y$$

მიღებული მატრიცები აღვნიშნოთ სიმბოლოებით:

$$\tilde{B}_1''' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \tilde{B}_2''' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tilde{B}_3''' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

გამოვთვალოთ $\tilde{B}_3'''$ მატრიცის მახასიათებელი ფესვები:

$$\det(\tilde{B}_3''' - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2},$$

$[\operatorname{Re}(\lambda_1)] = [\operatorname{Re}(\lambda_2)] = 0 \in [0; 1)$ - ორივე ეკუთვნის $[0; 1)$ ინტერვალს. ამით ამოიწურა სისტემის მატრიცები, ამის გამო მსჯელობა დასრულებულია.

საბოლოოდ გასაფაქტორებელ ტრანსფერ-მატრიცას აქვს სახე:

$$T(z) = T_8(z)T_7(z)T_6(z)T_5(z)T_4(z)T_3(z)T_2(z)T_1(z) = T_8(z)T_7(z)T_6(z)T_5(z)T_4(z)T_3(z)T_2(z)T_1(z) =$$

$$= \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(z-2)^2(z-1)(2z-3)}{4z^2} & \frac{(z-2)^2(z-1)}{z^2} \\ \frac{(z-2)^2}{2z} & 0 \end{pmatrix}.$$

მიღებული ტრანსფერ-მატრიცის ფაქტორიზაციით მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} \frac{(z-2)^2(z-1)(2z-3)}{4z^2} & \frac{(z-2)^2(z-1)}{z^2} \\ \frac{(z-2)^2}{2z} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & 0 \\ 0 & z^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(z-2)^2(-5z+3)}{4z^2} & \frac{(z-2)^2(z-1)}{z^2} \\ \frac{(z-2)^2}{2z} & 0 \end{pmatrix}$$

ამრიგად, შესაბამისი ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპია $(k_1, k_2) = (1, 1)$.

შენიშვნა. აქ (და გამოვიყენებთ შემდგომ) რაციონალური მატრიცული ფუნქციის ფაქტორიზაციისათვის გამოვიყენეთ [1-2] შრომებში მოცემული ალგორითმი და მისი პროგრამული რეალიზაცია.

დანართი

მაგალითები

1. განვიხილოთ სკალარული განტოლება m განსაკუთრებული წერტილით

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{B_i}{z - s_i} \right) y, \text{ სადაც } B_1, \dots, B_m \text{ სკალარებია}$$

პირველი რიგის სკალარული განტოლების შემთხვევაში, ე. ი. B_i არიან ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვები, $T_1(z) = (z - s_1)^D$, სადაც $D = 1$ ან $D = -1$, გარდაქმნა მოგვცემს სისტემას:

$$\frac{dy_1}{dz} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{T_1(z) B_i T_1^{-1}(z)}{z - s_i} + \frac{dT_1(z)}{dz} T_1^{-1}(z) \right) y_1 = \left(\frac{B_1 + D}{z - s_1} + \sum_{i=2}^m \frac{B_i}{z - s_i} \right) y_1.$$

თუ $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, მაშინ გარდაქმნის ტრანსფერ-მატრიცა იქნება შემდეგი ფუნქცია:

$$T(z) = (z - s_1)^{\pm |\operatorname{Re}(B_1)| - \lambda_1} \dots (z - s_m)^{\pm |\operatorname{Re}(B_m)| - \lambda_m}.$$

განვიხილოთ მეორე რიგის ჰიპერგეომეტრიულ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta + 1 \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha\beta & -\gamma \end{pmatrix}}{z - (-a)^{-1}} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha\beta & -(\alpha + \beta + 1) + \gamma \end{pmatrix}}{z - (1 - a)^{-1}} \right) y.$$

i. ვთქვათ $\alpha = 0$; $\beta = -2$, $\gamma = -2$ და $a = 1/2$, მაშინ მივიღებთ სისტემას:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{z + 2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z - 2} \right) y.$$

ამ სისტემისაგან ინდუცირებული ჰოლომორფული ფიბრაციის კანონიკური გაგრძელების ტრანსფერ-მატრიცა არის

$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{z(z-2)}{(z+2)^2} \end{pmatrix},$$

რაციონალური მატრიც-ფუნქცია, რომლის ფაქტორიზაცია ერთეულოვან წრეწირზე არის შემდეგი:

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{t(t-2)}{(t+2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(t+2)^2} \begin{pmatrix} 3 & 3t-7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

აქედან, კანონიკური გაგრძელების გახლეჩვის ტიპი არის $K = (1, 0)$ ვექტორი.

ii. ვთქვათ $\alpha = 0$; $\beta = -2$, $\gamma = -2$ და $a = 3$. მივიღებთ სისტემას

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{z + \frac{1}{3}} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z + \frac{1}{2}} \right) y.$$

კანონიკური გაგრძელების ტრანსფერ-მატრიცა არის შემდეგი გამოსახულებით მოცემული

$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{z\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\left(z + \frac{1}{3}\right)^2} \end{pmatrix} = \left(z + \frac{1}{3}\right)^{-2} T_1(z),$$

სადაც $T_1(z)$ არის პოლინომიალური მატრიც-ფუნქცია:

$$T_1(z) = \begin{pmatrix} \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 & 0 \\ 0 & z\left(z + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

$T_1(z)$ მატრიც-ფუნქციის ფაქტორიზაცია ერთეულოვან წრეწირზე არის შემდეგი:

$$T_1(t) = \begin{pmatrix} \left(t + \frac{1}{3}\right)^2 & 0 \\ 0 & t\left(t + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{1}{2t} \\ 1 + \frac{2}{3t} + \frac{1}{9t^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ხოლო } T(t) = \left(t + \frac{1}{3}\right)^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{1}{2t} \\ 1 + \frac{2}{3t} + \frac{1}{9t^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ხოლო } \text{ind} \left(z + \frac{1}{3}\right)^{-2} = -2.$$

კანონიკური გაგრძელების გახლეჩვის ტიპი არის შემდეგი: $K = (0, 0)$.

iii. ვთქვათ $\alpha = 0$; $\beta = -2$, $\gamma = -2$ და $a = 3$. მივიღებთ

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{z + \frac{1}{3}} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{z + \frac{1}{2}} \right) y,$$

სისტემას. ვთქვათ $\Lambda = ((1, 0), (0, 1), (1, 1))$. ამ ერთობლიობისაგან აგებული ფიბრაციის გაგრძელებისათვის ტრანსფერ-მატრიცა არის შემდეგი:

$$T(z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{4}(3z - 7) \left(z + \frac{1}{2}\right) & \frac{3}{4} \left(z + \frac{1}{3}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right) \\ \frac{3}{4} z \left(z + \frac{1}{2}\right) & 0 \end{pmatrix},$$

$T(z)$ მატრიც-ფუნქციის ფაქტორიზაცია ერთეულოვან წრეწირზე არის შემდეგი ნამრავლი:

$$T(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4}t - \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{5}{6t} + \frac{1}{6t^2} \\ 1 + \frac{1}{2t} & 0 \end{pmatrix},$$

ხოლო კანონიკური გაგრძელების გახლეჩვის ტიპი კი არის $K = (2, 2)$.

- iv. იგივე სისტემისათვის, $\Lambda = ((1, 0), (0, 1), (-1, -1))$ ერთობლიობისათვის აგებული ფიბრაციის გაგრძელების ტრანსფერ-მატრიცი არის შემდეგი რაციონალური მატრიც-ფუნქცია:

$$T(z) = \begin{pmatrix} \frac{z(3z-7)}{4\left(z+\frac{1}{2}\right)} & \frac{3\left(z+\frac{1}{3}\right)}{4\left(z+\frac{1}{2}\right)} \\ \frac{3z}{4\left(z+\frac{1}{2}\right)} & 0 \end{pmatrix} = \left(4\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} T_1(z),$$

სადაც

$$T_1(z) = \begin{pmatrix} z(3z-7) & 3\left(z+\frac{1}{3}\right) \\ 3z & 0 \end{pmatrix}.$$

$T_1(z)$ მატრიც-ფუნქციის ფაქტორიზაცია ერთეულოვან წრეწირზე არის შემდეგი ნამრავლი:

$$T_1(t) = \begin{pmatrix} 3 & 3t-7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+\frac{1}{3t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ხოლო } T(t) = \left(4\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 3t-7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+\frac{1}{3t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ხოლო } \text{ind} \left(4\left(z+\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} = -1.$$

ამრიგად, გაგრძელების შედეგად მიღებული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი არის შემდეგი:
 $K = (0, 0).$

2. განვიხილოთ ფუქსის ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა $0; 1; -1$ განსაკუთრებული წერტილებით:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}{z+1} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y.$$

კანონიკური გაგრძელების ტრანსფერ-მატრიცა არის შემდეგი პოლინომიალური მატრიცული ფუნქცია:

$$T(z) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4z \\ 1 & 2z \end{pmatrix}.$$

$T(z)$ მატრიც-ფუნქციის ფაქტორიზაცია ერთეულოვან წრეწირზე არის

$$T(t) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ეს ნიშნავს, რომ კანონიკური გაგრძელების გახლეჩვის ტიპი არის $K = (0, 1)$ მთელ რიცხვა ვექტორი.

3. განვიხილოთ ფუქსის ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, $0; 1; 2$ განსაკუთრებული წერტილებით:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}{z-2} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} \right) y.$$

კანონიკური გაგრძელების ტრანსფერ-მატრიცა არის შემდეგი:

$$T(z) = \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z-2 & 0 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(z-2)^2(z-1)(2z-3)}{4z^2} & \frac{(z-2)^2(z-1)}{z^2} \\ \frac{(z-2)^2}{2z} & 0 \end{pmatrix}.$$

$T(z)$ მატრიც-ფუნქციის ფაქტორიზაცია $|t| = 1$ წრეწირზე არის შემდეგი რაციონალური და სკალარული მატრიცული ფუნქციების ნამრავლი:

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(t-2)^2(-5t+3)}{4t^2} & \frac{(t-2)^2(t-1)}{t^2} \\ \frac{(t-2)^2}{2t} & 0 \end{pmatrix}.$$

კანონიკური გაგრძელების გახლეჩვის ტიპი არის $K = (1, 1)$ ვექტორი.

4. განვიხილოთ მეორე რიგის ფუქსის ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ოთხი განსაკუთრებული წერტილით $0; -1; 1; 1/2$ და განსაკუთრებული წერტილების შესაბამისი მატრიცების მახასიათებელი ფესვებია $(1, -1), (0, 0), (0, 0), (0, 0)$:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}{z+1} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}{z-\frac{1}{2}} \right) y.$$

ვთქვათ $\Lambda = ((0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0))$. ამ ვალუაციის შესაბამის ტრანსფერ-მატრიცას აქვს სახე:

$$T(z) = \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

ე. ი. გახლეჩვის ტიპია - $K = (1, -1)$.

5. განვიხილოთ ფუქსის ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა $0; 1/2; i/2$; განსაკუთრებული წერტილებით :

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{12}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{10}{8} \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{11}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{12}{8} \end{pmatrix}}{z - \frac{1}{2}} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{8} \end{pmatrix}}{z - \frac{i}{2}} \right) y,$$

კანონიკური გაგრძელების ტრანსფერ-მატრიც ფუნქცია არის შემდეგი ნამრავლი:

$$\begin{aligned} T(z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z - \frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(z - \frac{1}{2}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(z - \frac{1}{2}\right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{z^2}{z - \frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{z^2 \left(z - \frac{i}{2}\right)}{z - \frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{ე. ი. } T(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^{-1} T_1(z), \text{ სადაც } T_1(z) = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & z^2 \left(z - \frac{i}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

$T_1(z)$ მატრიც-ფუნქციის ფაქტორიზაცია ერთეულოვან რადიუსიან წრეწირზე არის შემდეგი გამოსახულება:

$$T_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4}t - \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 - \frac{i}{2t} \\ t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ხოლო } \text{ind} \left(z - \frac{1}{2} \right) = 1.$$

ხოლო კანონიკური გაგრძელების გახლეჩვის ტიპი არის - $K = (2, 1)$.

ზემოთ მოყვანილი სისტემა არ არის რეზონანსული, რის გამოც მისი მონოდრომიის მატრიცები ადვილად გამოითვლება. კერძოდ, 0 ; $1/2$; $i/2$ განსაკუთრებული წერტილების შესაბამისი ლოკალურ მონოდრომიის მატრიცები არიან

$$M_1(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1-i & i \end{pmatrix}, M_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2}}{11} & 1 \end{pmatrix}, M_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ სამკუთხედი წვეროებით $(0, 0)$; $(1/2, 0)$; $(0, 1/2)$ როგორც ჩაკეტილი კონტური კომპლექსურ სიბრტყეზე. ვთქვათ $f(t)$ არის უბან-უბან მუდმივი მატრიც-ფუნქცია, რომელიც მოიცემა შემდეგნაირად: $f(t) = M_1$ თუ $t \in (0, 1/2]$; $f(t) = M_2 M_1$ თუ $t \in (1/2, i/2]$; $f(t) = M_3 M_2 M_1$ თუ $t \in (i/2, 0]$. მაშინ

$$\varphi^+(t) = f(t)\varphi^-(t)$$

რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის კერძო ინდექსები იქნება $(2, 1)$.

6. განვიხილოთ მეორე რიგის ფუქსის ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ოთხი განსაკუთრებული წერტილით:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{A_1}{z + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}i} + \frac{A_3}{z - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i} + \frac{A_4}{z + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i} \right) y$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & i \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

რომელიც შესაძლებელია გადავწეროთ შემდეგი ექვივალენტური ფორმით:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & i \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}{z - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}i} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -i \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}{z - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{z + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i} \right) y.$$

ტრანსფერ-მატრიცა, რომელიც შეესაბამება $\Lambda = ((0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0))$ ვალუაცია, არის შემდეგი ნამრავლი:

$$T(z) = \begin{pmatrix} \left(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{12}{11} - \frac{12}{11}i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}i & 0 \\ 0 & z - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i & 0 \\ 0 & z + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i \end{pmatrix} = \frac{1}{z - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix},$$

სადაც

$$T_{11} = \left(z + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i\right)^2 \left(z - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}i\right);$$

$$T_{12} = \left(-\frac{12}{11} - \frac{12}{11}i\right) \left(z + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i\right) \left(z - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}i\right);$$

$$T_{22} = \left(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right) \left(z + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i\right) \left(z - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}i\right);$$

$T(z)$ -ის კერძო ინდექსები და ასოცირებული ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი არის $k_1 = 1$ და $k_2 = 1$.

7. განვიხილოთ მეორე რიგის ფუქსის ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ხუთი განსაკუთრებული წერტილით:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z+1} + \frac{A_3}{z-1} + \frac{A_4}{z+i} + \frac{A_5}{z-i} \right) y,$$

სადაც

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix};$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

გადავწეროთ სისტემა შემდეგი ექვივალენტური ფორმით:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}{z+1} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}{z-1} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}{z+i} + \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}{z-i} \right) y,$$

რომელიც უფრო მოკლედ მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2z} + \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} z}{8(z^2-1)} + \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} z}{z^2+1} \right) y.$$

ვთქვათ $\Lambda = ((1, 0), (-1, -1), (-1, -1), (-1, -1), (-1, -1))$, მაშინ ტრანსფერ-მატრიცას აქვს სახე:

$$T(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

$T(z)$ მატრიც-ფუნქციის ერთეულოვან წრეწირზე ფაქტორიზაციის შემდეგ მივიღებთ

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

აქედან, შესაბამისი ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი არის $(-1, 1)$.

დასკვნა

ნაშრომში განხილულია ანალიზურ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების თეორიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა : რეგულარული და ფუქსის ტიპის განტოლებათა სისტემის, გლობალურ ამონახსნთა სივრცის ანალიზური თვისებების დადგენა და მისი განსაკუთრებული წერტილების დამოკიდებულება ამ წერტილების განლაგებაზე, გაფართოებულ კომპლექსურ სიბრტყეზე. განსაკუთრებულ წერტილთა მდებარეობა და მასთან დაკავშირებული კომპლექსური სტრუქტურა, გამოსახულია რიმანის სფეროზე აგებული ჰოლომორფული ფიბრაციისა და ამ ფიბრაციის ლოგარითმული ბმულობის საშუალებით.

ძირითადი თეორემები ჩამოყალიბებული და დამტკიცებულია დისერტაციის მე-3 თავში (თეორემა 3.1.1, თეორემა 3.1.2, თეორემა 3.1.3, თეორემა 3.2.1, დებულება 3.1.1 და დებულება 3.1.2) და მეოთხე თავში (თეორემა 4.1.1).

ეს შედეგები ახალია და მის მისაღებად ნაშრომში განვითარებულია ადეკვატური საკვლევი აპარატი. კერძოდ, ნებისმიერი რეგულარული განტოლებათა სისტემისათვის აგებულია რაციონალური მატრიცული ფუნქცია და ნაჩვენებია, რომ მისი კერძო ინდექსები ემთხვევა განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ჰოლომორფული ფიბრაციის გახლეჩის ტიპს. დადგენილია, რომ განსაკუთრებული წერტილების განლაგება გავლენას ვერ ახდენს ამონახსნთა სივრცის ანალიზურ თვისებებზე. ნაშრომის შესავალში და პირველ თავში ჩამოყალიბებულია ძირითადი თეორემები, განმარტებები და მეთოდები, რომლებიც ადაპტირებულია ძირითადი შედეგის მისაღებად საჭირო დებულებებთან. აქვეა გაკეთებული ლიტერატურის მიმოხილვა. ძირითადი შედეგი საინტერესოა იმ თვალსაზრისით, რომ ის იძლევა ჰილბერტის 21-ე პრობლემის ამოხსნადობის საკმარის პირობას და საფუძველს ქმნის რიმან-ჰილბერტის სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის კონსტრუქციული აგებისათვის, უბან-უბან მუდმივი გადასვლის მატრიცული ფუნქციის შემთხვევაში.

ლიტერატურა

- [1] Adukov V. M. Wiener-Hopf factorization of piecewise meromorphic matrix-valued functions. Sb. Math. 2009; 200:8,1105-1126.
- [2] Adukov V. M. Algorithm of polynomial factorization and its implementation in Maple. Vestnik SUSU. 2018; 11:4, 110-122.
- [3] Akhalaia G., Giorgadze G., Gulagashvili G. The analysis of the vectex equations using methods of generalized analytic functions. Bulletin of TICMI. Vol.22, N 2, 135-141, 2018
- [4] Anosov D., Bolibruch A. The Riemann-Hilbert Problem. Vieweg+TeubnerVerlag, 1994
- [5] Bojarski B. Connection between Complex and global analysis: analytical and geometrical aspects of the Riemann-Hilbert transition problem, in: Complex Analysis: Methods and Applications, Berlin, A.V. (1983).
- [6] Bojarski B., Giorgadze G. Some analytical and geometric aspects of the stable partial indices. Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics. 2011-2012; 61-62, 14-32.
- [7] Botcher Th. On the origins of the Riemann-Hilbert problems in mathematics. ArXiv: 2003.14374v2[math-ph], 2020
- [8] A. A. Bolibrukh. The Riemann-Hilbert Problem on a Compact Riemannian Surface, Proc. Steklov Inst. Math., 238 (2002), 47-60
- [9] Bolibrukh A. A. On sufficient conditions for the existence of a Fuchsian equation with prescribed monodromy. J. Dynam. Control Systems. 1995; 1:2, 329-352.
- [10] Deligne P. Equations differentielles a points singuliers reguliers. Lecture Notes in Math. 163, Springer-Verlag, 1970.
- [11] Ehrhardt T., Spitkovsky I. M. Factorization of piecewise constant matrix functions and systems of linear differential equations. St. Petersburg Math. J. 2002; 13:6, 939-991.

- [12] Ephremidze L., Spitkovsky I. On explicit Wiener-Hopf factorization of 2×2 -matrices in a vicinity of a given matrix. Proc. R. Soc. A 476:20200027, <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2020.0027>
- [13] Gahov F. D. Riemann's boundary problem for a system of n -pairs of functions. (Russian) Uspehi Matem. Nauk (N.S.) 1952; 7:4, 3-54.
- [14] Giorgadze G. G-systems and holomorphic principal bundles on Riemann surfaces. J. Dyn. Contr. Syst. 8:2, 2002, 245-291.
- [15] Giorgadze G. Regular Systems on Riemann Surfaces. J. Math. Sci. (N.Y) 2003;118, 5347-5399.
- [16] Giorgadze G. Gulagashvili G. Riemann-Hilbert Boundary Value Problem with Piecewise Constant Transition Function. Journal of Dynamical and Control Systems. Springer - Nature,(2020). <https://doi.org/10.1007/s10883-020-09524-z>
- [17] Giorgadze G. Gulagashvili G. On the splitting type of the holomorphic vector bundles induced from regular system of differential equations. Georgian Math. Journal, accepted
- [18] Giorgadze G., Khimshiashvili G. The Riemann–Hilbert problem in loop spaces, Dokl. Math., 73:2, 2006, 258-260.
- [19] Gulagashvili G. On the splitting type of vector bundle on Riemann sphere. Proceedings of I.Vekua Institute of Applied Mathematics. 2018; 68, 36-45.
- [20] Gulagashvili G. Holomorphic type of vector bundles on Riemann sphere induced from second order Fuchsian systems. Proceedings of I.Vekua Institute of Applied Mathematics. 2019; 69, 24-37.
- [21] Hartman Ph. Ordinary differential equations. SIAM, 2002.
- [22] Ilyashenko Yu., Yakovenko S. Lectures on analytic differential equations. AMS, 2007
- [23] Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M. From Gauss to Painlevé: A Modern Theory of Special Functions. Springer, 1991

- [24] Katz N. M. Rigid Local Systems. Princeton Univ. Press, Princeton, 1996
- [25] Litvinchuk G, Spitkovski I. Factorization of measurable matrix functions. Birkhäuser Verlag, (1987)
- [26] Mityushev V. V. Riemann boundary value problem with piecewise constant matrix. Part I. General algorithm. ArXiv:1904.06536v1, 2019
- [27] Mityushev V. V, Rogosin S. V. On the Riemann-Hilbert problem with a piecewise constant matrix. ZAA, 2008; 27, 53-66.
- [28] Mishuris, G., Rogosin, S. Regular approximate factorization of a class of matrix-function with an unstable set of partial indices. Proc. Royal Soc. A, 2018. Vol. 474, <https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0279>
- [29] Muskhelishvili N, Vekua N. Riemann boundary value problem for several unknown functions and its application for system singular integral equations. Travaux de Institut Mathématique de Tbilisi. 1943; 12, 1-46.
- [30] Plemelj J. Riemannsche Functionenschaaren mit gegebener Monodromiegruppe. Monatshefte für Math. XIX Jahrgang, 1908; 211-245.
- [31] Pressley A., Segal G. Loop groups. Clarendon Press, Oxford. 1984.
- [32] Riemann B. Theorie der Abel'schen Funktionen. J. Reine angew. Math. 1857; 54, 115-155.
- [33] Rohrl H. Holomorphic vector bundles over Riemann surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. 68:3, 1962, 125-160.
- [34] Ryabov A. A. Splitting types of vector bundles constructed from the monodromy of a given Fuchsian system. Comput. Math. And Math. Phys. 2004; 44:4, 640-648.
- [35] Sauloy J. Differential Galois theory through Riemann-Hilbert correspondence. AMS, 2016
- [36] Spitkovskii I. M., Tashbaev A. M. Factorization of certain piecewise constant matrix functions and its applications. Math. Nachr., 151, 241-261, 1991.

- [37] Suzko A.A.; Giorgadze, G. Exactly solvable time-dependent models in quantum mechanics and their applications. *Physics of Particles and Nuclei*. 39(4), (2008), 578-596
- [38] Vyugin I. Constructive Solvability Conditions for the Riemann-Hilbert Problem. *Math. Notes*, 2005; 77:5, 595-605.
- [39] M. Yoshida, *Hypergeometric functions, my love*. Springer, 1997.