ავტორის სტილი დაცულია

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ფსიქოლოგიისა და განათლების მეცნიერებათა ფაკულტეტი

თამარ შუბითიძე

პარამეტრის შემცველი განტოლებების და უტოლობების სწავლების საკითხები მათემატიკის სასკოლო კურსში, VII-IX კლასების მაგალითზე

განათლების მეცნიერებების დოქტორის აკადემიური ხარისხის

მოსაპოვებლად წარდგენილი

დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

რუსუდან სანაძე, განათლების მეცნიერებათა დოქტორი,

თსუ ასოცირებული პროფესორი

ლამარა ქურჩიშვილი, პედაგოგიურ მეცნიერებათა კანდიდატი

თბილისი

2017

სარჩევი

ანოტაცია

წინამდებარე კვლევის მიზანს წარმოადგენს მათემატიკის სასკოლო კურსის საბაზო საფეხურზე VII-IX კლასებში პარამეტრის შემცველი სტანდარტული წრფივი და კვადრატული განტოლებების და უტოლობების სწავლებასთან დაკავშირებული პრობლემების დადგენა.

ნაშრომი პირობითად სამ ნაწილად იყოფა. პირველ ნაწილში მოყვანილია განმარტებები, ნაჩვენებია პარამეტრის შემცველი ამოცანების, კერძოდ წრფივი და კვადრატული განტოლებებისა და უტოლობების ფუნქცია და როლი მათემატიკის სასკოლო კურსში. მეორე ნაწილი ეთმობა კვლევას. კვლევის ფარგლებში მოძიებულია მათემატიკის ქართულენოვან ყველა გრიფირებულ და ზოგიერთ დამხმარე სახელმძღვანელოში პარამეტრის შემცველი წრფივი და კვადრატული განტოლებების და უტოლობების (აგრეთვე მათი სისტემების) შემცველი ყველა სავარჯიშო და ჩატარებულია მათი ანალიზი მოცულობისა და შინაარსის მიხედვით. აგრეთვე მოძიებულია საკითხთან დაკავშირებული ქართულ ენაზე არსებული დამხმარე ლიტერატურა.

ძირითადი და დამხმარე სახელმძღვანელოებისა და სწავლების მეთოდოლოგიის ურთიერთმიმართების ტენდენციის შესწავლის მიზნით სამუშაო სტაჟისაგან დამოუკიდებლად კვლევის ფარგლებში გამოიკითხა ჩვეულებრივი სკოლის საბაზო საფეხურის 135 მათემატიკის მასწავლებელი (65 მასწავლებელი იყო თბილისის სკოლებიდან, ხოლო 70 სხვა რეგიონების სკოლებიდან).

კვლევის ფარგლებში ჩატარდა ნახევრად სტრუქტურირებული ინტერვიუ მათემატიკის საბაზო საფეხურის ყოფილ და მოქმედ ტრენერებთან.

ნაშრომის მესამე, რეკომენდაციების ნაწილში თავმოყვრილია საკითხთან დაკავშირებით თეორიული ბაზა, საილუსტრაციო მაგალითებით, რომელიც ვთვლით, რომ საკითხის სწავლებისას გამოადგებათ მათემატიკის მასწავლებლებს.

შესავალი

საქართველოში სასწავლო საგანი მათემატიკა დიდი დროის მანძილზე ინარჩუნებს თავის ძირითად ბირთვს: არითმეტიკას, ალგებრას, მათემატიკური ანალიზის საწყისებს, სიბრტყის და სივრცის აღქმას, ევკლიდური გეომეტრიის, ანალიზური გეომეტრიის, ტრიგონომეტრიის ელემენტებს.

2003 წლიდან ეტაპობრივად ეროვნული სასწავლო გეგმის მოთხოვნებიდან გამომდინარე, პროგრამას დაემატა სიმრავლეთა თეორიის, ალბათობის თეორიის, მონაცემთა ანალიზის და მათემატიკური სტატისტიკის, კომბინატორიკის, მოდულური არითმეტიკის ელემენტები.

ეროვნულ სასწავლო გეგმაში ვკითხულობთ: „მათემატიკის ცოდნა ნიშნავს მათემატიკური ცნებებისა და პროცედურების ფლობას, მათი გამოყენების უნარს რეალური პრობლემების გადაჭრისას; აგრეთვე კომუნიკაციის იმ საშუალებების ფლობას, რომლებიც საჭიროა ინფორმაციის მისაღებად და გადასაცემად მათემატიკური ენისა და საშუალებების გამოყენებით.“

მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის დროს მიღებული გამოცდილება ხელს უწყობს, როგორც რაციონალური აზროვნების უნარის განვითარებას, ასევე აზრის გამოხატვის უნარის განვითარებას (ლაკონიზმს, სიზუსტეს, სრულად და ნათლად გადმოცემას და ა.შ.), ასევე ინტუიციას (შედეგის წინასწარ დანახვის უნარს და ამოხსნის გზის გამოცნობას). მათემატიკა აღვიძებს წარმოსახვას, პირველი ნაბიჯია სამეცნიერო გამოცდილებისაკენ, გზაა სამყაროს მეცნიერული აღქმისაკენ.

მათემატიკის სწავლების ამ მიზნების მიღწევის პროცესში არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება პარამეტრის შემცველ ამოცანებს, კერძოდ პარამეტრის შემცველი განტოლებების და უტოლობების სწორად სწავლების მეთოდიკის განსაზღვრას, ვინაიდან პარამეტრის შემცველი განტოლებები და უტოლობები ის აპარატია, რომლის ცოდნის გარეშე მოსწავლე სრულყოფილად ვერ დაეუფლება განტოლებების და უტოლობების ვერც ერთ სახეობას. პარამეტრის შემცველი არასტანდარტული ამოცანები დიდ როლს თამაშობს მოსწავლეებში პრობლემის გადაჭრის უნარის განვითრებაში. დიდია მათი როლი მოსწავლეთა კოგნიტური განვითარების კონკრეტულოპერაციული სტადიიდან ფორმალუროპერაციულ სტადიაზე გადასვლაში. ამდენად, ამ საკითხის ღრმად და საფუძვლიანად შესწავლის გარეშე ეროვნულ სასწავლო გეგმაში გაწერილი საბაზო საფეხურის კანონზომიერებები და ალგებრის მიმართულების მიზანისა და შინაარსის მიღწევა გაჭირდება.

პარამეტრის შემცველი ამოცანების როლი მნიშვნელოვანია აგრეთვე განტოლებათა და უტოლობათა სწავლებასთან დაკავშირებული მისაღები შედეგების შესამოწმებლად.

პარამეტრის შემცველ ამოცანებით ზოგადად მოწმდება სასკოლო მათემატიკის არა მხოლოდ ძირითადი განყოფილებების ცოდნის დონე, მათემატიკური და ლოგიკური აზროვნების დონეები და საწყისი კვლევითი უნარები, არამედ უმაღლეს სასწავლებლებში სწავლის გაგრძელების მსურველთათვის მათემატიკური კურსების დაძლევის პერსპექტივებიც. შესაბამისად, პარამეტრის შემცველ ამოცანებს დიაგნოსტიკურ როლთან ერთად გააჩნიათ პროგნოსტიკული როლიც და ალბათ ამიტომაც, ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე, მათემატიკის ტესტურ დავალებებში აბიტურიენტებს ყოველ წელს ხვდებათ პარამეტრის შემცველი ამოცანები (იხ.დანართი 1).

დაკვირვებამ გვიჩვენა, რომ მოწაფეებს უჭირთ ხშირ შემთხვევაში ასეთი ამოცანების ამოხსნა. დასტურად შეიძლება მოვიყვანოთ, შეფასებისა გამოცდების ეროვნული ცენტრის მიერ 2009 წელს გამოცემულ კრებულში „როგორ მოვემზადოთ ერთიანი ეროვნული გამოცდებისათვის“, მოცემული ინფორმაცია აბიტურიენტთა პასუხების განაწილების შესახებ. პარამეტრის შემცველ ამოცანებს აბიტურიენტების ყველაზე დაბალი პროცენტი უმკლავდება. მაგალითად, პარამეტრის შემცველია 34-ე (ფასდება 4 ქულით) და მე-40 (ფასდება 5 ქულით). 34-ე ამოცანა 4 ქულაზე დაძლია მხოლოდ 1,9%, ხოლო მე-40-ე ამოცანა 5 ქულაზე დაძლია მხოლოდ 0,9%-მა, მაშინ როცა 4 ქულით შეფასებული გეომეტრიულ ამოცანა მაქსიმალურ ქულაზე დაძლია 6,2%, ხოლო ის გეომეტრიული ამოცანა, რომელიც ფასდებოდა მაქსიმალური 5 ქულით ხუთივე ქულაზე დაძლია 5,1% .

შესაბამისად, წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის - „პარამეტრის შემცველი განტოლებების და უტოლობების სწავლების საკითხები მათემატიკის სასკოლო კურსში,VII-IX კლასების მაგალითზე“ - ფარგლებში განხილული თემატიკა ძალზედ მნიშვნელოვანი და **აქტუალურია თანამედროვე ვითარებაში.**

სწავლების მეთოდიკის განსაზღვრისას მნიშვნელოვანია სახელმძღვანელოებისა და პედაგოგების როლი, რომლებიც ასწავლიან ამ სახელმძღვანელოებით. მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოები, ბუნებრივია, ეროვნული სასწავლო გეგმით გათვალისწინებული სწავლის შედეგებზეა ორიენტირებული. პრობლემის შესწავლის მიზნით დავინტერესდით მათემატიკის არსებული სახელმძღვანელოებითა და ამ სახელმძღვანელოებში საკითხის გაშუქების ხარისხით. აგრეთვე ქართულ ენაზე მოცემული საკითხის შესახებ ხელმისაწვდომი დამხმარე-მეთოდური ლიტერატურის და კვლევითი მასალის არსებობით.

საინტერესო იყო მათემატიკის პედაგოგების აზრი საკითხის სწავლებასთან დაკავშირებით, და საკითხთან მიმართებაში მასწავლებელთა სახლის აქტივობები.

პარამეტრის შემცველი ამოცანები სასკოლო სახელმძღვანელოებში ათწლეულების განმავლობაში, ჯერ კიდევ საბჭოთა დროიდან გვხვდება. თანამედროვე ქართულ სახელმძღვანელოებში ამ საკითხების სწავლება, სავარჯოშოების სახით, გაფანტულია სხვადასხვა კლასებში მაგალითად განტოლებების და უტოლობების თემატიკებთან. ეს არ არის შემთხვევითი, რადგან პარამეტრის შემცველი განტოლებები და უტოლობები სინამდვილეში წარმოადგენენ „ჩვეულებრივი" რიცხვითკოეფიციენტიანი განტოლებებისა და უტოლობების მთელ კლასებს. სახელმძღვანელოებში სავარჯიშოების მოცულობა მცირეა. ამასთან რთულად მოიძიება ამ საკითხთან დაკავშირებული მეთოდური სახელმძღვანელოები.

საქართველოში გრიფირებულ სახელმძღვანელოებში პარამეტრის შემცველ ამოცანებთან დაკავშირებული სავარჯიშოების მოცულობასა და შინაარსთან დაკავშირებული კვლევები, რომლებიც ეროვნული სასწავლო გეგმის შედეგებზეა ორიენტირებული არ ჩატარებულა.

ასევე, არ ჩატარებულა ანალიზი (ანალიზის შინაარსობრივი ნაწილისათვის ამოცანათა კლასიფიკაციის გამოყენება პირობის მიხედვით) პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლების პრობლემასთნ დაკავშირებით. ამდენად, ჩვენი ნაშრომი, რომლის ფარგლებში ყველაზე მარტივი სახის წრფივ და კვადრატულ განტოლებათა და უტოლობათა შემცველი სავარჯიშოების მოცულობისა და შინაარსის კვლევა გადაწყდა **სიახლეს** წარმოადგენს ქართული საგანმანათლებლო სივრცისათვის. კონკრეტული პრობლემების გამოვლენა კი თავის მხრივ მათი დაძლევის გზებისა და საშუალებების დადგენისათვის აუცილებელი წინაპირობაა.

იკვეთება **ჰიპოტეზა**, რომ საქართველოში მათემატიკის ქართულენოვან გრიფირებულ სახელმძღვანელოებში ვერ ხერხდება პარამეტრის შემცველი წრფივი და კვადრატული განტოლებებისა და უტოლობების წარმოდგენილი სავარჯიშოებით საკითხის სწავლების სისტემატურობისა და თანამიმდევრობის დიდაქტიკური პრინციპის დაცვა.

კვლევის მიზანია, მათემატიკის სასკოლო კურსის საბაზო საფეხურზე VII-IX კლასებში პარამეტრის შემცველი სტანდარტული წრფივი და კვადრატული განტოლებების და უტოლობების სწავლებასთან დაკავშირებული პრობლემების დადგენა.

კვლევის ამოცანებს წარმოადგენს:

მეორადი ინფორმაციის მოძიება, კერძოდ,

- მათემატიკის ქართულენოვან გრიფირებულ და დამხმარე სახელმძღვანელოებში პარამეტრის შემცველი წრფივი და კვადრატული განტოლებებისა და უტოლობების მოძიება, მიმოხილვა, კლასიფიკაცია-მათი შინაარსის ანალიზი სწავლებასთან დაკავშირებული პრობლემების დასადგენად;
- საკითხთან დაკავშირებული ლიტერატურისა და შესაბამისი კვლევითი მასალის მოძიება;

ემპირიული კვლევის ჩატარება, კერძოდ,

- პედაგოგების გამოკითხვის საფუძველზე ძირითადი და დამხმარე სახელმძღვანელოებისა და სწავლების მეთოდოლოგიის ურთიერთმიმართების ტენდენციის შესწავლა;
- მასწავლებელთა სახლის საბაზო საფეხურის ტრენერებთან გასაუბრება.

კვლევის მეთოდებია: თეორიული/სამაგიდე კვლევა, თვისებრივი კვლევა - ჩაღრმავებული ინტერვიუ, რაოდენობრივი კვლევა - კითხვარი მასწავლებელთათვის.

კვლევის შედეგები და რეკომენდაციები: გაწერილია სადისერტაციო ნაშრომის დასკვნით ნაწილში.

ნაშრომის თეორიული ღირებულება მდგომარეობს სახელმძღვანელოებში პარამეტრის შემცველ წრფივ და კვადრატულ განტოლებათა და უტოლობათა შინაარსთან დაკავშირებული პრობლემების გამოვლენა, წრფივ და კვადრატულ განტოლებათა და უტოლობათა კლასიფიკაცია და მათ ამოხსნასთან დაკავშირებული თეორიული ბაზის თავმოყრა, შესაბამისი საილუსტრაციო მაგალითებით, ამოხსნის როგორც ანალიზური, ასევე გრაფიკული მეთოდების გამოყენებით. (მასწავლებელთათვის მეთოდური სახელმძღვანელო მასალების შექმნის თვალსაზრისით), ხოლო პრაქტიკულ ღირებულებას წარმოადგენს ის, რომ კვლევით მიღებული შედეგების და მათ საფუძველზე შემუშავებული რეკომენდაციების გათვალისწინება შეუძლიათ მათემატიკის პედაგოგებს, მეთოდისტებს, წიგნების ავტორებს და ტრენერებს.

თავი I. პარამეტრი

1.1 პარამეტრიის ზოგიერთი განმარტება

საბუნებისმეტყველო და ზუსტ მეცნიერებებში, აგრეთვე ეკონომიკაში სისტემებისა და პროცესების ნებისმიერი მათემატიკური მოდელის აგებას, პრაქტიკულად ყოველთვის მივყავართ პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნამდე.

"P პარამეტრი (ბერძნული parametrōn - გადამზომი, შემფარდებელი) სიდიდე, რომლის მნიშვნელობების მიხედვით ერთმანეთისაგან განასხვავებენ რაიმე სიმრავლის ელემენტებს.

დეკარტის მართკუთხა სისტემაში მაგალითად:

$(x-a)^2+(y-b)^2=1$ განტოლებით განისაზღვრება ყველა ერთეულრადიუსიან წრეწირთა სიმრავლე სიბრტყეზე. თუ დავუშვებთ, რომ $a=1$, $b=7$, მაშინ ამ სიმრავლიდან გამოვყოფთ ცალსახად განსაზღვრულ წრეწირს ცენტრით (1,7). მაშასადამე, a და b განსახილველ სიმრავლეში წრეწირის პარამეტრებია" (ქართული საბჭოთა ენციკლოპედია 1984:680).

„პარამეტრი ტექნიკაში - სიდიდეა, რომელიც ახასიათებს პროცესის, მოვლენის, სისტემის, ტექნიკური მოწყობილობების რომელიმე თვისებას, მაგალითად მექანიკურ სისტემაში ასეთი სიდიდეებია მასა, ხახუნის კოეფიციენტი, ინერციის მომენტი, დაჭიმულობა და ა.შ. ელექტრული პარამეტრებიდან ყველაზე მნიშვნელოვანია დენის ძალა, ძაბვა, წინაღობა, ინდუქციურობა, ტევადობა" (ქართული საბჭოთა ენციკლოპედია 1984:680).

„ფიზიკურ პროცესებს აღწერენ განტოლებებით, რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებს ამ პროცესების ცვლად სიდიდეებს. პარამეტრები ჩვეულებრივ

შედის განტოლებათა კოეფიციენტებში. ისინი შეიძლება იყოს მუდმივი ან ცვლადი (დროზე ან სისტემის კოორდინატებზე დამოკიდებული). (ქართული საბჭოთა ენციკლოპედია 1984:680).

ბანკის ისეთი მნიშვნელოვანი ოპერაციები, როგორიცაა სესხები და დეპოზიტები „ფულის დროითი ღირებულების" კონცეფციას ეყრდნობა ანუ პროცენტის სარგებელს. მაგალითად, პროცენტი არის ფასი რომელსაც ვიხდით ფულის გამოყენებისთვის დროის მოცემულ პერიოდში. პროცენტი არის მიზეზი რის გამოც ფულის ღირებულება დამოკიდებულია დროზე. სესხის აღების შემთხვევაში ბანკის მიერ შემოთავაზებულია ნომინალური პროცენტი, თუმცა „რეალური" პროცენტი რომელსაც კლიენტები იხდიან უფრო მეტია ვიდრე ნომინალური. ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი რისი გადახდაც უწევთ კლიენტებს მოცემული i ნომინალური საპროცენტო განაკვეთის შემთხვევაში იზრდება p დარიცხვის პერიოდთა რიცხვის შესაბამისად. ე.ი. „რეალური" ეფექტური პროცენტი დამოკიდებულია i და p პარამეტრებზე. $i_{eff} = \left(1+\frac{i}{p}\right)^{p} - 1.$

მათემატიკაში პარამეტრი სიდიდეა, რომელიც შედის მათემატიკურ ფორმულებში და ინარჩუნებს თავის მუდმივ მნიშვნელობას მხოლოდ ამ ამოცანის პირობებში.

ცნობილი მათემატიკოს - მეთოდისტი, აკადემიკოსი პ.მ. ერდნიევი თვლიდა, რომ პარამეტრის შემცველი ამოცანის ამოხსნა, ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის ამოხსნის ბუნებრივი ეტაპია.

პარამეტრის (ასოითი კოეფიციენტის) შემცველი ამოცანები ძირითადად სასკოლო კურსში გვხვდება განტოლებებისა და უტოლობების თემატიკებთან.

მ. ვიგოდსკის „ელემენტარული მათემატიკის ცნობარში“ ვკითხულობთ: „ტოლობას, რომელიც შეიცავს უცნობ ასოით სიდიდეებს და არ წარმოადგენს იგივეობას, ეწოდება განტოლება. განტოლებას ეწოდება ასოითი, თუ ყველა ან ზოგიერთი ცნობილი სიდიდეები, რომლებიც მასში შედიან გამოსახულია ასოებით, წინააღმდეგ შემთხვევაში განტოლებას ეწოდება რიცხვითი“ (Выгодский 1966:157).

როგორც ვხედავთ, განმარტებაში ავტორი განტოლებებს ორ ჯგუფად ყოფს: ასოითკოეფიციენტიან (იგივე პარამეტრულ) და რიცხვითკოეფიციენტიანად. ცნობილი ქართველი ლოგიკოსის შალვა ფხაკაძის განმარტებით :“თუ განტოლება შეიცავს ცვლადებს, რომლის მიმართ, როგორც უცნობების მიმართ, არის დასმული ამოცანა და შეიცავს მათგან განსხვავებულ ცვლადებსაც, მაშინ ვიტყვით, რომ გვაქვს ზოგადი განტოლება, ხოლო ამ განსხვავებულ ცვლადებს პარამეტრები ეწოდება. მაგალითად, $ax^2+bx+c=0$ ზოგადი განტოლებაა, აქ იგულისხმება, რომ x არის უცნობი, a, b და c პარამეტრებია“ (ფხაკაძე 1974).

განტოლებას (უტოლობას), რომელიც უცნობის გარდა ასოებით აღნიშნულ რიცხვებსაც შეიცავს, პარამეტრის შემცველი განტოლება (უტოლობა) ეწოდება, ხოლო მასში შემავალ ასოებს პარამეტრები.

მნიშვნელოვანია იმის გააზრება, რომ პარამეტრის შემცველი განტოლებები და უტოლობები არ წარმოადგენენ ცალკე კლასს.

პედაგოგიურ მეცნიერებათა კანდიდატის მ. ვ. ფალიევას აზრით: „ვინაიდან შესაძლებელია ნებისმიერი მათემატიკური ამოცანის პარამეტრიზაცია, გამოდის, რომ ყველა განტოლებები და უტოლობები იყოფიან ორ ჯგუფად: პარამეტრის გარეშე და პარამეტრით“ (Фалилеева 2013:12).

ცნობილი მათემატიკოსებისა და მეთოდისტების, მაგალითად: მ. ი. ბაშმაკოვის, ს. ა. იასტრიბინეცკის, გ. ვ. დოროფეევის, პ. ი. გორნშტეინის, ვ.

კ. მარკოვის, ი. ფ. შარიგინის, ვ. ვ. ვავილოვას წიგნები ეძღვნება პარამეტრის შემცველ ამოცანებს, სადაც განხილულია ამოცანათა ფართო კლასები და მათი ამოხსნის მეთოდები.

პარამეტრის გააზრებისას ძირითადი სირთულე არის მის ორმაგ ბუნებაში, იგი ერთდროულად "ნაცნობი" უცნობია.

ასეთი სახის განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნისას პარამეტრის ორმაგი ბუნებიდან გამომდინარე საჭიროა სიფრთხილე.

ერთის მხრივ მას ექცევიან როგორც რიცხვს, ხოლო მეორეს მხრივ მასთან ურთიერთობის თავისუფლების ხარისხი შეზღუდულია მისი უცნობობით. პარამეტრთან ურთიერთბისას თითქოს არის გარკვეული გაუგებრობა: ამოხსნის პროცესის რა ეტაპებზე შეიძლება ჩითვალოს იგი მუდმივ სიდიდედ და რა ეტაპზე ცვლად სიდიდედ?

მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში საბაზო და საშუალო საფეხურზე გვხვდება პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოები, სადაც პარამეტრები ძირითადად აღნიშნულია პატარა ლათინური ასოებით.

პარამეტრის შემცველი ამოცანების განსაკუთრებულობა აგრეთვე მათი ამოხსნის პროცესის განტოტვაშია, რომელიც დამოკიდებულია პარამეტრის მნიშვნელობებზე. ამოხსნის პროცესი ხორციელდება კერძო განტოლებების (უტოლობების) კლასიფიკაციის გზით, თითოეული ტიპის საერთო ამოხსნის ეტაპების მოძიებით, რაც პირდაპირ ეხმიანება ეროვნული სასწავლო გეგმით გათვალისწინებულ უნარ-ჩვევების შეფასების ერთერთ კრიტერიუმს[1].

მათემატიკის სასკოლო კურსში ზოგიერთი მათემატიკური ცნების შემოტანისას მოსწავლეებს უწევთ პარამეტრთან „შეხვედრა", მაგალითად:

[1] „5. კომპექსურ (რთულ) პრობლემას ყოფს საფეხურებად, მარტივ ამოცანებად და ჭრისეტაპობრივად (ამოხსნა), მათ შორის სტანდარტული მიდგომებისა და პროცედურების გამოყენებით."-ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016 წლები.

პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია $y = kx$, სადაც x და y ცვლადებია, ხოლო k პარამეტრი $k > 0$

წრფივი ფუნქცია $y = kx + b$, სადაც x და y ცვლადებია, ხოლო k და b პარამეტრი.

კვადრატული განტოლება $ax^2+bx+c=0$, სადაც x ცვლადია, ხოლო a, b და c პარამეტრი, $a \neq 0$.

1.2. პარამეტრის შემცველი ამოცანების ფუნქცია მათემატიკის სასკოლო კურსში

მათემატიკის სასკოლო კურსის საბაზო საფეხურზე პარამეტრის შემცველ ამოცანებს განტოლებათა და უტოლობათა თემატიკებთან ეცნობიან. სკოლის საბაზო საფეხური ემთხვევა მოსწავლეთა 12-15 წლის ასაკს. ჟან პიაჟეს კოგნიტური განვითარების თეორიის მიხედვით, ამ დროს ხდება განვითარების მესამე კონკრეტულოპერაციული სტადიიდან (7-დან 11-12 წლამდე) განვითარების მეოთხე ფორმალუროპერაციულ სტადიაზე გადასვლა. მანამდე განვითარებული ობიქტების კლასიფიკაციის უნარი გადაიზრდება კომბინატორული აზროვნების უნარში. მოსწავლეებს ამ ასაკში შეუძლიათ ლოგიკის მოშველიებით აბსტრაქტული პრობლემების გადაჭრა, აქვთ უფრო მეცნიერული აზროვნება.

პარამეტრის შემცველი ამოცანები, სამეცნიერო-კვლევითი ამოცანების უმარტივესი მოდელებია, რომლებიც ხარისხობრივად უფრო მაღალ სასწავლო საკითხებზე გადასვლის საშუალებას იძლევიან.

განტოლებებისა და უტოლობების თემატიკაში ფორმალუროპერაციულ სტადიაზე გადასვლისას უნიკალურია პარამეტრის შემცველ განტოლებებს

და უტოლობების როლი (ეროვნული სასწავლო გეგმის შინაარსის მიხედვით, მოზარდებს განვითარების ამ პერიოდში განტოლებათა და უტოლობათა წრფივ და კვადრატულ სახეებს ვასწავლით).

მათი მათემატიკური შინაარსი არ სცდება სასწავლო პროგრამის ჩარჩოებს, მაგრამ მოსწავლეები მათი ამოხსნისას აწყდებიან სირთულეებს, რომელთა დაძლევაც თავის მხრივ ბლუმის ტაქსონომიის მიხედვით ზედა დონის სააზროვნო უნარების როგორც ჩართვას მოითხოვს, აგრეთვე ემსახურება მათ განვითარებასაც.

მაგალითად, განტოლებების შემთხვევაში ჩვეულებრივი რიცხვითკოეფიციენტებიანი რუტინული ცნობილი ალგორითმებით ამოხსნადი ამოცანებისაგან განსხვავებით, სადაც უცნობია მაგალითად x, x-ს ალგორითმის მეშვეობით ვპოულობთ და ამით ამოხსნა მთავრდება. პარამეტრის შემცველი განტოლება კი უფრო მაღალ დონეზე გადასვლის საშუალებას იძლევა.

საილუსტრაციოდ ამოვხსნათ პარამეტრის შემცველი მარტივი წრფივი განტოლება:

$(a^2 - 1)x = a + 1$

ვაკეთებთ წინასწარ გამოკვლევებს:

1) თუ $a = 1$, მაშინ განტოლება იღებს $0 \times x = 2$ სახეს და მას არ აქვს ამონახსნი

2) თუ $a = -1$, მაშინ განტოლება იღებს $0 \times x = 0$ სახეს და ამ შემთხვევაში X ნებისმიერია

3) თუ $a \neq \pm 1$, მაშინ ვაწარმოებთ გარდაქმნებს $x = \frac{a+1}{a^2-1}$

$$x = \frac{1}{a-1}$$

პასუხი :

თუ $a = 1$, მაშინ არ აქვს ამონახსნი

თუ $a = -1$, მაშინ აქვს უამრავი ამონახსნი

თუ $a \neq \pm 1$, მაშინ $x = \frac{1}{a-1}$.

თუ საწყის განტოლებაში a პარამეტრის მაგივრად ჩავწერთ რიცხვს, მაგალითად რიცხვ 4-ს, მივიღებთ განტოლებას:

$$(4^2 - 1)x = 4 + 1$$

$$15 \cdot x = 5$$

$$x = \frac{1}{3}$$

ორივე განტოლების შემთხვევაში მოთხოვნა იყო განტოლების ამოხსნა. მაგრამ მეორესაგან განსხვავებით, პირველ შემთხვევაში დაგვჭირდა დამატებითი გამოკვლევების ჩატარება და პასუხი წამოადგენს ნაკრებს. მნიშვნელოვანია იმის გააზრებაც, რომ მეორე განტოლება თავის მხრივ პირველი განტოლების ზოგადი სახეა და მისი ამოხსნის „ცოდნით“ მოსწავლე იოლად გაუმკლავდება მის კერძო სახეებს.

მათემატიკის სასკოლო კურსში პარამეტრის შემცველი განტოლებების (უტოლობების) ფუნქცია, როგორც თეორიული მომზადების დონის ფლობის გაზომვაა, ასევე მისი გაღრმავება. ერთის მხრივ შინაარსით ისინი წარმოადგენდნენ საბაზო სასწავლო მასალას, თითქოს არაფერია ახალი მოსწავლისათვის, მაგრამ ამოცანის პირობაში შეკითხვის დასმა (პირობის თითქოს უჩვეულოდ ჩამოყალიბება) საჭიროებს ამოხსნის განსხვავებულ მიდგომებს, მისი სწორად ამოხსნა კი ერთგვარი სამეცნიერო-კვლევითი

პროცესია, ლოგიკური მსჯელობების ჯაჭვი, რომელიც თავის მხრივ, ანვითარებს პრობლემის გადაჭრის უნარს.

მაგალითად თუ გვაქვს ასეთი ამოცანა:

ამოხსენით განტოლება x -ის მიმართ: $ax - 5 = 4x + 1$ მოსწავლეს მხოლოდ მისთვის ცნობილი ალგორითმების საშუალებით მოუწევს იგივური გარდაქმნების ჩატარება და პასუხმადე მისვლა. ხოლო თუ შევცვლით პირობაში კითხვის ფორმულირებას, მაგალითად a -ს რა მნიშვნელობისათვის არ აქვს განტოლებას ამონახსნი, მაშინ საჭირო იქნება დამატები მსჯელობა.

მათემატიკის პედაგოგს ყოველთვის უნდა ახსოვდეს:

1. „რეალური გაგება მაშინ ხდება, როდესაც მასალის ცოდნა ზეპირ მეხსიერებაზე არ არის დამოკიდებული“ (ვულფოლკი 2009:53).
2. მოსწავლის მათემატიკური მომზადების დონე მის მიერ ამოხსნილი ამოცანების სირთულის ექვივალენტურია.

როგორც წესი პარამეტრის შემცველ ამოცანებს რთულ, არასტანდარტულ ამოცანებად მიიჩნევდნენ მოსწავლეები და კოლეგა მათემატიკის მასწავლებლებიც. მოსწავლეთათვის სირთულე ერთის მხრივ მათი პირობების ჩამოყალიბების უჩვეულობაში მდგომარეობდა და მეორეს მხრივ ამოხსნის ტექნიკურ მხარესთან არის დაკავშრებული. მათი ამოხსნისათვის საჭირო ხერხები მრავალფეროვანია და არ არსებობდა ერთიანი „გასაღები“, ხელმისაწვდომი მზა ალგორითმები.

ამოცანის არასტანდარტულობა ამომხსნელისთვის ქრება, როგორც კი იგი ამოხსნის ამ ამოცანას. ჯორჯ პოია ამობობდა: „ თუ გსურთ ცურვა ისწავლოთ, თამამად შედით წყალში, თუ გსურთ ამოცანების ამოხსნა ისწავლოთ, ამოხსენით ისინი“ (Пойа 1976:13).

1.3. პარამეტრის შემცველი ამოცანების ადგილი მათემატიკის სასკოლო კურსში

ათწლეულების მანძილზე იცვლებოდნენ მათემატიკის სახელმძღვანელოები, ფაქტია, რომ ამ ამოცანებმა გაუძლეს დროს და კვლავ რჩებიან, ძირითად სახელმძღვანელოებში.

მაგალითად, 1971 წელს პ. ლარიჩევის ავტორობით გამოშვებულ ალგებრის ამოცანათა კრებულში გვხვდება პარამეტრის შემცველი განტოლებები, „ამოვხსნათ ასოით განტოლებანი, რომლებშიც უცნობი აღნიშნულია x ასოთი. მიღებული ფესვები შევამოწმოთ.“ მოცემულია მეთოდური მითითებებიც: „ასოითი განტოლებების ამოხსნისას სასურველია მივაჩვიოთ მოსწავლეები თანდათან იმის გარკვევას, თუ: 1) განტოლებაში შემავალი ასოების რა მნიშვნელობებისათვის და მათ შორის რა თანაფარდობის დროს არ კარგავს განტოლება რიცხვითს აზრს; 2) უცნობის გამოსახულებაში შემავალი ასოების რა მნიშვნელობებისათვის და მათ შორის რა თანაფარდობის დროს არ კარგავს უცნობის მნიშვნელობა რიცხვითს აზრს; 3) უცნობის რა მნიშვნელობებისათვის არ კარგავს განტოლება რიცხვითს აზრს“ (ლარიჩევი 1971:158).

ცალკე თავი ეთმობა აგრეთვე ასოითკოეფიციენტებიან განტოლებათა შედგენას.

პარამეტრის შემცველი ამოცანები გვხვდება, მაგალითად 1998 წელს ი.მაკარიჩევის, ნ.მინდიუკის და სხვათა ავტორობით გამოშვებულ მე-9 კლასის ალგებრის სახელმძღვანელოშიც. მაგალითად: N102

„a-ს რა მნიშვნელობისათვის გადის $y = ax^2$ ფუნქციის გრაფიკი:

ა) (5;-7); ბ) ($-\sqrt{3}$;9); გ)($-\frac{1}{2}$;$-\frac{1}{2}$); დ) (100;10) წერტილზე?“ (მაკარიჩევი 1998:32)

პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნა უწევდათ აბიტურიენტებს მისაღებ გამოცდებშიც. მაგალითად 1979 წელს თსუ-ის მისაღებ გამოცდებზე მოცემული იყო ასეთი სავარჯიშო:

„იპოვეთ a-ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $a^2x^2+(2a-1)x-(a+1)=0$ განტოლების ერთი ფესვი მეტია 1-ზე, მეორე ფესვი ნაკლებია 1-ზე“ (ვეფხვაძე 2015:77).

2005 წლიდან დაიწყო ერთიანი ეროვნული გამოცდები, მათემატიკის ტესტურ დავალებებში ყოველ წელს, აუცილებლად არის პარამეტრის შემცველი ამოცანები (ერთი ან ორი), რომლებიც როგორც წესი ფასდება მაღალი ქულით. მათი მოთხოვნის დონე არ სცილდება სასკოლო მათემატიკის მოთხოვნებს, მაგრამ გამოსაცდელებს ეს ამოცანები კვლავ სიძნელეებს უქმნიან. პარამეტრის შემცველი ამოცანები მათემატიკის მასწავლებელთა საგნის გამოცდის ტესტებში პედაგოგებსაც ხვდებათ, მათი ცოდნა გათვალისწინებულია მასწავლებლის პროფესიული სტანდარტით დამტკიცებულ პროგრამითაც. პარამეტრის შემცველი ამოცანები ახლაც გვხვდება მათემატიკის ძირითად სახელმძღვანელოებში, მათი რაოდენობა მცირეა და მიმოფანტულია ძირითადად განტოლებათა და უტოლობათა თემატიკებთან. შესაბამისად, როგორც მოსწავლეებს, აგრეთვე მათემატიკის მასწავლებლებს პირადი მოტივაცია აქვთ გაიწაფონ ამ ამოცანების ამოხსნაში. სკოლაში მათემატიკის სწავლების დანიშნულება არ არის „ტესტირებისთვის მზადება“ და არც სასკოლო სახელმძღვანელოებისათვის გრიფის მინიჭება არ ხდება ამ „მზადებიდან“ გამომდინარე.

საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების მინისტრის მიერ დამტკიცებული ნორმატიული დოკუმენტი რომლის საფუძველზეც ხორციელდება სწავლა-სწავლების პროცესი საქართველოს ზოგადსაგანმანათლებლო დაწესებულებებში არის ეროვნული სასწავლო გეგმა. იგი აყალიბებს იმ მიზნებსა და შედეგებს, თუ როგორი მოსწავლე

გვსურს გავზარდოთ, რა უნარ-ჩვევებს, ცოდნასა და კომპეტენციას უნდა ფლობდეს ის ერთის მხრივ თითოეულ საგანსა და თითოეულ კლასში და მეორეს მხრივ ზოგადი განათლების დასრულების შემდგომ. ეროვნული სასწავლო გეგმა არის ქვეყნის მთავარი ოპერატიული დოკუმენტი ზოგადი განათლების სფეროში და მასში დეტალურადაა განვრცობილი ზოგადი განათლების ეროვნული მიზნები. ესგ-ს მიხედვით შენდება თითეული სკოლის საგანმანათლებლო პროცესი. ესგ-ის მიხედვით მზადდება უმაღლეს სასწავლებელში მისაღები ეროვნული გამოცდების საგამოცდო პროგრამა ყველა საგანში. აგრეთვე მის საფუძველზე მზადდება მასწავლებლის სტანდარტი, როგორც ზოგად ნაწილში (უნარებში), ასევე პროფესიულ ნაწილში (საგნობრივი), რასაც შემდგომში ეფუძნება (უნდა ეფუძნებოდეს) მასწავლებლების სასერტიფიკაციო საგამოცდო პროგრამა და ტესტური დავალებები. ეროვნული სასწავლო გეგმის საფუძველზე მზადდება სახელმძღვანელოები (მოსწავლის და მასწავლებლის) და მიმდინარეობს გრიფირების პროცესი. საგნობრივი პროგრამა მოიცავს საგნის სწავლების მიზნებსა და ამოცანებს, შეფასებების კომპონენტებს საგნის მიხედვით, შემაჯამებელ დავალებათა ტიპებს, შეფასების რუბრიკებს, და უშუალოდ საგნობრივ სტანდარტს - თითოეული კლასის ბოლოს მისაღწევ შედეგებსა და ამ შედეგების შესამოწმებელ ინდიკატორებს.

როგორია სახელმწიფოს დაკვეთა და რა ფუნქციას ასრულებენ პარამეტრის შემცველი ამოცანები მათემატიკის სასკოლო კურსში?

ეროვნული სასწავლო გეგმაში ვკითხულობთ: “ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში მათემატიკის სწავლების ძირითადი მიზნებია:

- მოსწავლეებისათვის აზროვნების უნარის განვითარება;
- დედუქციური და ინდუქციური მსჯელობის, შეხედულებათა დასაბუთების მოვლენებისა და ფაქტების ანალიზის უნარის განვითარება;

- მათემატიკის, როგორც სამყაროს აღწერისა და მეცნიერების უნივერსალური ენის ათვისება;
- მათემატიკის, როგორც ზოგადსაკაცობრიო კულტურის შემადგენელი ნაწილის გაცნობიერება;
- სწავლის შემდგომი ეტაპისათვის ან პროფესიული საქმიანობისათვის მომზადება;
- ცხოვრებისეული ამოცანების გადასაწყვეტად საჭირო ცოდნის გადაცემა და ამ ცოდნის გამოყენების უნარის განვითარება" (ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016 :418).
- საგნობრივ პროგრამა მათემატიკაში, კანონზომიერებებისა და ალგებრის მიმართლებით საბაზო საფეხურის ძირითდი მისაღწევი მიზნებში ვკითხულობთ: „სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებებთან დაკავშირებული ცნებებისა და პროცედურების შესწავლა, აგრეთვე მათი გამოსახვის სხვადასხვა ხერხის ერთმანეთთან დაკავშირებისა და შედარების უნარის განვითარება; პრობლემის გადაჭრისას ასოითი გამოსახულების გამოყენების, მათ შორის განტოლების შედგენისა და ამოხსნის უნარის განვითარება; საწყისი წარმოდგენების შექმნა სიმრავლურ ცნებებსა და ოპერაციებზე" (ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016 :422).

ეროვნულ სასწავლო გეგმაში, საკითხების პროგრამების შინაარსში, ზოგადი ფორმულირებებია, მაგალითად:

1. მათემატიკა VII კლასი-"21.ტექსტური ამოცანების ამოხსნა წრფივი განტოლებების გამოყენებით, 22.ტოლფასი განტოლებები და უტოლობები" (ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016:467).
2. მათემატიკა VIII კლასი- „19.ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემები და მათი გამოყენება ტექსტური ამოცანების ამოხსნისას, 20. განტოლებისა

და განტოლებათა სისტემის ამონახსნისა და ამონახსნთა სიმრავლის ცნებები, 21. ტოლფასი განტოლებები და განტოლებათა სისტემები, 22. ერთუცნობიანი წრფივი უტოლობები“(ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016:474).

3. მათემატიკა IX კლასი-„17. კვადრატული სამწევრი: დისკრიმინანტი, ფესვები. კვადრატული სამწევრის დაშლა მამრავლებად. ვიეტის თეორემა, 18. წრფივი ფუნქცია, კვადრატული ფუნქცია, მათი განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე, გრაფიკები და თვისებები: ზრდადობა/კლებადობა, ნიშანმუდმივობის შუალედები, ნულები, მოცემულ ინტერვალზე მაქსიმუმის/მინიმუმის წერტილები და შესაბამისი მნიშვნელობები, 19. ერთუცნობიან უტოლობათა სისტემები, 20. ორუცნობიან განტოლებათა სისტემები (ერთი განტოლება მაინც წრფივია, ხოლო მეორის ხარისხი არ აღემატება ორს), 21. ორუცნობიანი წრფივი უტოლობისა და უტოლობათა სისტემის ამონახსნის წარმოდგენა საკოორდინატო სიბრტყეზე“(ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016:481).

ეროვნული სასწავლო გეგმით მოცემული შინაარსის გათვალისწინებით მათთან დაკავშრებული მისაღები შედეგებია :

1. წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები: „მათ. VII. 7. მოსწავლეს შეუძლია ალგებრული გამოსახულების გამარტივება და წრფივი განტოლების ამოხსნა“(ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016 :461).
2. წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები:„მათ. VIII. 7. მოსწავლეს შეუძლია განტოლებათა სისტემებისა და უტოლობების გამოყენება პრობლემის გადაჭრისას“(ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016 :469).
3. წლის ბოლოს მისაღწევი შედეგები და მათი ინდიკატორები:„მათ. IX. 6.- მოსწავლეს შეუძლია ფუნქციებისა და მათი თვისებების გამოყენება სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების აღსაწერად და გამოსაკვლევად.“„IX.

7 მოსწავლეს შეუძლია განტოლებათა სისტემებისა და უტოლობების გამოყენება პრობლემის გადაჭრისას“(ეროვნული სასწავლო გეგმა 2011-2016 :476).

ვერც მიზანი და ვერც შედეგი, შინაარსის გათვალისწინებით ვერ იქნება მიჩნეული მიღწეულად, მხოლოდ რიცხვითკოეფიციენტიანი განტოლებების და უტოლობების სწავლებით. ვინაიდან ყველა სახეობის განტოლება და უტოლობა იყოფა ორ ჯგუფად: რიცხვითკოეფიციენტებიანად და ასოითოეფიციენტებიანად (პარამეტრულად), ამიტომ მხოლოდ რიცხვითოეფიციენტებიანი განტოლების და უტოლობის სწავლებით ვერ ჩაითვლება მათი სახეობების სწავლება სრულყოფილად. თავის მხრივ ასოითკოეფიციენტიანი (პარამეტრული) განტოლებები და უტოლობები წარმოადგენენ განტოლებათა და უტოლობათა მთელ კლასებს. მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა გვიჩვენებს, რომ მხოლოდ მათემატიკური ფაქტის, საგნობრივი შემადგენელის ცოდნა საკმარისი არაა მისი დაუფლებისთვის. საჭიროა შესასწავლი მასალის ლოგიკური სტრუქტურის, ერთიან სისტემაში მისი ადგილის დანახვა.

საქართველოს საგანმანათლებლო სისტემა მსოფლიოს მასშტაბით კონკურენტუნარიანი თაობების გაზრდაზე უნდა იყოს ორიენტირებული. მოსწავლეთა შეფასების საერთაშორისო პროგრამის (PISA) 2009 წლის მათემატიკის კვლევის (15 წლის მოსწავლეებისათვის) (იხ. დანართ 2) შედეგებით მაქსიმალურ მეექვსე საფეხურს, მხოლოდ 0.1% აღწევს, ხოლო მე-5 სფეხურს 0.4%. ასევე დაბალი მაჩვენებელია მეოთხე და მესამე საფეხურებზე. ამავე კვლევებიდან ჩანს, რომ ექვსი დონიდან პირველ დონეს, რომელიც მოიცავს მარტივ დავალებებსა და პროცედურებს და, შესაბამისად, მოითხოვს ნაკლებ ცოდნასა და უნარებს საქართველოში მხოლოდ 29.7% რაც მინიმალურ ზღვარს ქვემოთაა.

2015 წლის მონაცემების მიხედვით ქართველმა მოსწავლეებმა 2009 წელთან შედარებით უკეთესი შედეგი აჩვენეს, როგორც საბუნებისმეტყველო საგნებში, ასევე წაკითხულის გააზრებასა და მათემატიკაში.

გაუმჯობესებესის ტენდენციის მიუხედავად, ქართველი მოსწავლეების მიღწევები სამივე სფეროში OECD-ის საშუალო ქულაზე მნიშვნელოვნად დაბალია. კვლევის მიზანს წარმოადგენდა განესაზღვრა, თუ რამდენად კარგად არიან მოსწავლეები მომზადებულნი საზოგადოებრივ ცხოვრებაში აქტიური და სრულფასოვანი ჩართულობისათვის.

შემოქმედებითი სააზროვნო უნარების განვითარება წარმოუდგენელია პრობლემური სიტუაციებში მოხვედრის გარეშე, ამიტომ სწავლებისას დიდი მნიშვნელობა აქვთ არასტანდარტულ ამოცანებს. ვთვლით, რომ სწორედ ასეთი ამოცანების სწავლების შედეგად შეიძლება მაგალითად მოსწავლეთა შეფასების საერთაშორისო პროგრამის მიხედვით დადგენილი პირველი, მეორე და მესამე დონეების მისაღწევი შედეგების მეტად გაუმჯობესება და მე-4, მე-5 და მე-6 დონეების მიღწევა.

შემოქმედებითი აზროვნების განვითარებას ხელს უწყობს იდეებითა და ამოხსნის მეთოდებით მდიდარი პარამეტრის შემცველი ამოცანები.

შესაბამისად პარამეტრის შემცველი ამოცანები კვლავ აქტუალურია მათემატიკის სასკოლო კურსში. ისინი კვლავ რთულ ამოცანებად მიიჩნევა, რაც არ არის გასაკვირი. რიცხვითკოეფიციენტებიანი განტოლებებისა და უტოლობებისაგან განსხვავებით პარამეტრის შემცველი განტოლებების და უტოლობების ამოხსნისას მოსწავლეებს აბსტრაქტულ სიდიდეებზე უწევთ ოპერირება, მეტი დაკვირვება და სიფრთხილე მართებთ ამოხსნისას და ამავდროულად ასეთი სავარჯიშოების სწორად ამოხსნით ისინი საკითხის ფლობის უფრო მაღალ საფეხურზე ადიან. შესაძლოა შევთავაზოთ რიცხვითკოეფიციენტებიანი მრავალი განტოლებები და უტოლობები, მაგრამ ვერ გავაღრმავოთ მოსწავლეების ცოდნა ამ საკითხებში, მაგრამ

სასურველ მიზანს- საკითხის უკეთ ფლობას, მივაღწიოთ რაოდენობრივად მცირე, მაგრამ ზუსტად შერჩეული პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოებით.

ვთვლით, რომ ნებისმიერი საკითხის სწავლების გაუმჯოესების მიზნით აუცილებელია ჯერ მის სწავლებასთან დაკავშირებული პრობლემების გამოვლენა-გაანალიზება და ანალიზის საფუძველზე გადაჭრის გზების დასახვა და შემდგომ განხორციელება.

კვლევა პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლების პრობლემების დადგენასთან დაკავშირებით საქართველოში აქამდე არ ჩატარებულა.

სადისერტაციო ნაშრომის ფარგლებში გადაწყდა პირველი ასეთი კვლევის ჩატარება.

თავი 2. კვლევითი ნაწილი

2.1 კვლევის საკითხის განსაზღვრა

ათწლეულების განმავლობაში მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებში მიმოფანტული და "ჩამალული" მნიშვნელოვანი დიაგნოსტიკური და პროგნოსტიკური როლის მქონე პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლებასთან დაკავშირებული პრობლემების კვლევა სათავიდან, პარამეტრის შემცველი წრფივი და კვადრატული განტოლებებიდან და უტოლობებიდან უნდა დავიწყოთ.

შესაბამისად, წინამდებარე **კვლევის მიზანს წარმოადგენდა,** მათემატიკის სასკოლო კურსის საბაზო საფეხურზე VII-IX კლასებში პარამეტრის შემცველი სტანდარტული წრფივი და კვადრატული განტოლებების და უტოლობების სწავლებასთან დაკავშირებული პრობლემების დადგენა.

მოსწავლის მიერ ამოცანის სწორად ამოხსნა, მიღებული ცოდნის პრაქტიკაში წარმატებით გამოყენების შედეგია.

"ამოცანების ამოხსნა პრაქტიკული ხელოვნებაა" (Пойа 1976:13), "მისი სწავლა მხოლოდ მაშინაა შესაძლებელი, თუ მივბაძავთ კარგ მაგალითებს და მუდმივად ვივარჯიშებთ"(Пойа 1976:13).

"კარგი მაგალითები" ეს ის სავარჯიშოებია, რომლებსაც მათემატიკის პედაგოგები უნდა იყენებდნენ გაკვეთილებზე და აძლევენ მოსწავლეებს დავალებებად.

იკვეთება **ჰიპოტეზა**, რომ საქართველოში მათემატიკის ქართულენოვან გრიფირებულ სახელმძღვანელოებში ვერ ხერხდება პარამეტრის შემცველი წრფივი და კვადრატული განტოლებებისა და უტოლობების

წარმოდგენილი სავარჯიშოებით საკითხის სწავლების სისტემატურობისა და თანამიმდევრობის დიდაქტიკური პრინციპის დაცვა.

საკითხის სწავლებასთან დაკავშირებული პრობლემები კომპლექსურად მიგვაჩნია. ამიტომ, წინამდებარე კვლევის მიზნიდან და შესამოწმებელი ჰიპოტეზიდან გამომდინარე, დასახული იქნა შემდეგი **ამოცანები**:

მეორადი ინფორმაციის მოძიება, კერძოდ,

- ✓ მათემატიკის ქართულენოვან გრიფირებულ და დამხმარე სახელმძღვანელოებში პარამეტრის შემცველი წრფივი და კვადრატული განტოლებებისა და უტოლობების მოძიება, მიმოხილვა, კლასიფიკაცია-მათი შინაარსის ანალიზი სწავლებასთან დაკავშირებული პრობლემების დასადგენად;
- ✓ საკითხთან დაკავშირებული ლიტერატურისა და შესაბამისი კვლევითი მასალის მოძიება;

ემპირიული კვლევის ჩატარება, კერძოდ,

- ✓ პედაგოგების გამოკითხვის საფუძველზე ძირითადი და დამხმარე სახელმძღვანელოებისა და სწავლების მეთოდოლოგიის ურთიერთმიმართების ტენდენციის შესწავლა;
- ✓ მასწავლებელთა სახლის საბაზო საფეხურის ტრენერებთან გასაუბრება.

კვლევის მიზნიდან და ამოცანებიდან გამომდინარე, კვლევა რამდენიმე ეტაპად განხრციელდა. გამოყენებულ იქნა კვლევის თვისებრივი და რაოდენობრივი მეთოდები.

2.2 კვლევის I ეტაპი : სამაგიდე კვლევა (desk research)

სამაგიდე კვლევის ფარგლებში, მოძიებულ იქნა მეორადი ინფორმაცია, კერძოდ:

- ✓ მათემატიკის საბაზო საფეხურის ძირითად სახელმძღვანელოებში საკითხთან დაკავშირებული ყველა სავარჯიშო. (მოხდა მათი მოცულობის კვლევა თითოეული კლასის და თემების მიხედვით, აგრეთვე შინაარსობრივ-მეთოდური ხაზის გაანალიზება მოხდა ამოხსნის მეთოდებისა და პირობის მიხედვით, ჩვენს მიერ შექმნილი კლასიფიკაციით.)
- ✓ მათემატიკის რამოდენიმე დამხმარე სახელმძღვანელოში საკითხთან დაკავშირებული ყველა სავარჯიშო. (აგრეთვე მოხდა ამ სავარჯიშოების შინაარსობრივ-მეთოდური ხაზის გაანალიზება)
- ✓ ქართულ ენაზე საკითხთან დაკავშირებით დამხმარე-მეთოდური ლიტერატურა და კვლევითი მასალა.

კვლევის ფარგლებში მოძიებულ და განხილულ იქნა საბაზო საფეხურის მათემატიკის ქართულენოვანი ყველა ძირითადი (გრიფირებული) სახელმძღვანელო:

1.“მათემატიკა“- ავტორები: გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი-(მე-7, მე-8 და მე-9 კლასის სახელმძღვანელოები)

გამომცემლობა: შპს „გამომცემლობა ინტელექტი“

2.“მათემატიკა“- ავტორები: ნ. ჯაფარიძე, ნ. წილოსანი, ნ. წულაია, -(მე-7, მე-8 და მე-9 კლასის სახელმძღვანელოები)

გამომცემლობა: შპს „ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა“

3.“მათემატიკა “- ავტორები: თ. ბექაური, ა. საგინაშვილი, გ. ბექაური -(მე-7, მე-8 და მე-9 კლასის სახელმძღვანელოები)

აგერთვე ავტორების: ნ. ჯაფარიძე, ნ. წილოსანი, ნ. წულაია, მე-10 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელო, რადგან ამ სახელმძღვანელოში პარამეტრს ეთმობა ცალკე თავი.

ჰიპოტეზის შესამოწმებლად, ძირითად სახელმძღვანელოებში შეგროვებული სავარჯიშოების გასაანალიზებლად პირველ ეტაპზე საკითხთან დაკავშირებული სავარჯიშოების მოცულობის კვლევისას, ნაჩვენები იქნა თითოეული კლასის სახელმძღვანელოში, მათი რაოდენობა, შესაბამისი პროცენტული წილით კლასების და აგრეთვე თემების მიხედვით.

თემების მიხედვით დათვლისას გათვალისიწნებულ იქნა პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების სისტემები, ვინაიდან სისტემა თავის მხრივ წარმოადგენს პირობას, რომელიც ერთდროულად სრულდება რამოდენიმე ერთცვლადიანი (ან რამოდენიმე ცვლადიანი) განტოლებისათვის (უტოლობისთვის), მაგრამ არ გაგვითვალისწინებია პარამეტრის შემცველი ის განტოლებები და უტოლობები, რომელთა ამოხსნაც ეყრდნობა და დაიყვანება წრფივ და კვადრატულ განტოლებათა და უტოლობათა ამოხსნაზე, მაგალითად: პარამეტრის შემცველი ბიკვადრატული, რაციონალური და ირაციონალური განტოლებები.

მოცულობის კვლევა არ ჩავთვალეთ საჭიროდ დამხმარე სახელმძღვანელოების შემთხვევაში, ვინაიდან ძირითადი სახელმძღვანელოებში არსებული სავარჯიშოები ხელმისაწვდომია მოსწავლეებისათვის, ხოლო დამხმარე სახელმძღვანელოებიდან მათი რაოდენობის შერჩევა ხდება პედაგოგების პირადი გამოცდილებით.

პარამეტრის შემცველი განტოლებების და უტოლობების შინაარსის ანალიზისთვის არ არსებობდა მზა ინსტრუმენტი.

პირველ რიგში საინტერესო იყო მოცემულია, თუ არა „პარამეტრის“, „პარამეტრიანი განტოლების“ და „პარამეტრიანი უტოლობის“ განმარტება?

„კარგი კლასიფიკაცია, გულისხმობს ამოცანების ისეთ დაყოფას, რომ თავად პრობლემური სიტუაციის ტიპი განსაზღვრავს ამოხსნის მეთოდს"- ჯორჯ პოია (Пойа 1976).

ამოხსნის მეთოდების მიხედვით კლასიფიკაცია იქნებოდა ძალიან ზოგადი, ვინაიდან ამოხსნის მეთოდის მიხედვით კლასიფიკციაში ვგულისხმობთ ამოხსნის ალგებრულ (ანალიზურ) და გეომეტრიულ (გრაფიკულ) მეთოდს. არის ამოცანები, რომელთა ამოხსნის პროცესში ერთადერთია ან უპირატესია რომელიმე მათგანი. ამიტომ მხოლოდ მათით შეფასება არ იქნა მიჩნეული სწორედ, თუმცა ანალიზში გამოყენებულია ასეთი კლასიფიკაციაც.

ზოგადად ნებისმიერი საკითხის სწავლების თანმიმდევრულობაზე, მასთან დაკავშირებული სავარჯიშოების შინაარსობრივ-მეთოდური ხაზის გამართულობაზე მსჯელობა არ არის მარტივი და ვთვლით, რომ იგი აუცილებლად კონკრეტული საკითხის სპეციფიკიდან გამომდინარე უნდა მოხდეს. ვინაიდან განტოლებების და უტოლობების ამოხსნა იგივური გარდაქმენების ლოგიკური ჯაჭვის შედეგია, ამიტომ სავარჯიშოების თანმიმდევრობაში, გარკვეული შინაგანი ბმა უნდა არსებობდეს, რომ მათი ამოხსნის შემდეგ მოსწავლემ შეძლოს სხვა სავარჯიშოებზე დამოუკიდებლად მუშაობა. განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნის სწავლებისას, ჯაჭვი მარტივიდან - რთულისაკენ თავის თავში უნდა გულისხმობდეს გამოყენებული გარდაქმენის რაოდენობასა და სირთულეს აუცილებლად ამოხსნის მეთოდთან მიმართებაში. ამოცანის ამოხსნა იწყება პირობის - მოცემული სიდიდეების და დასმული კითხვის (კითხვების) გააზრებით.

გადაწყდა ერთგვარი კლასიფიკაციის შექმნა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა შეგვემოწმებინა სახელმძღვანელოებში შინაარსობრივ-მეთოდური ხაზის გამართულობა.

პარამეტრის შემცველი ამოცანების განსაკუთრებულობა, მათი პირობაში კითხვის განსხვავებულად ფორმულირებაშია, ამიტომ კლასიფიკაციისათვის გადაწყდა პირობის მიხედვთ კლასიფიკაციის შექმნა.

ეს კლასიფიკაცია დაეფუძნა კითხვებს:

- ✓ არის თუ არა სავარჯიშოები, რომელებიც მიმართულია იმის დაზუსტებაზე, თუ რას ნიშნავს „ამოვხსნათ პარამეტრის შემცველი განტოლება, უტოლობა, სისტემა"?
- ✓ მოიძებნება თუ არა პარამეტრის შემცველი განტოლებები და უტოლობები, რომლებიც მოითხოვენ ამოხსნას, და ამოხსნის ჩანაწერის გაფორმებას? "პასუხის წაკითხვას"?
- ✓ არის თუ არა სავარჯიშოები, რომელთა ამოხსნა, ამოხსნის გრაფიკულ მეთოდს მოითხოვს?

ამ კითხვების მიხედვით პარამეტრის შემცველი ამოცანები დავყავით პირობით სამ ტიპად:

I ტიპი - ამოცანის პირობაში არის უცნობი რომელიც დამოკიდებულია პარამეტრზე (პარამეტრებზე), ხოლო პარამეტრი (პარამეტრები) დამოუკიდებელია, მაგრამ მას მოკრძალებული ადგილი უჭრავს, მისი არსებობა ამოხსნის მსვლელობაზე არ ახდენს გავლენას. მისი დამოუკიდებლობა მხოლოდ იმაში მდგომარეობს, რომ მას შეუძლია არ მიიღოს გარკვეული მნიშვნელობები. (მაგალითად ითხოვენ, მხოლოდ ცვლადის გამოსახვას პარამეტრის (პარამეტრების) მეშვეობით).

შემდეგ ორ პირობაში პარამეტრი განკარგავს ამოხსნას, ამოხსნის ეტაპებზე, უნდა „დავექვემდებაროთ„ მას. პასუხის ამორჩევა ან ჩაწერა პარამეტრის მნიშვნელობებზე იქნება დამოკიდებული.

II ტიპი - საჭიროა მიეთითოს პარამეტრის სავარაუდო მნიშვნელობები, როდესაც განტოლებას (უტოლობას, სისტემას) აქვს გარკვეული თვისებები.

მაგალითად, აქვს ერთი ამონახსნი, ან არ აქვს ამონახსნი, ან აქვს ამონახსნი, რომელიც ეკუთვნის რაიმე შუალედს და ა.შ. ასეთ ამოცანებში აუცილებლად უნდა მოხდეს მითითება, პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის სრულდება მოთხოვნილი პირობა.

III ტიპი - ამოვხსნათ განტოლება (უტოლობა, სისტემა), რაც ნიშნავს პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისათვის ვიპოვოთ ყველა ამონახსნი. თუ კი რომელიმე შემთხვევა დაგვრჩება გამოუკვლევი, მაშინ ამოხსნა არ იქნება დამაკმაყოფილებელი.

შემდეგ ეტაპზე გადაწყდა თემასთან დაკავშირებული, ქართულ ენაზე არსებული დამხმარე-მეთოდური ლიტერატურის მოძიება. საინტერესო იყო არსებობდა თუ არა ისეთი ლიტერატურა, რომლებიც როგორც მოსწავლეებს ასევე პედაგოგებს მშობლიურ ენაზე დაეხმარებოდათ საკითხის გარჩევაში.

ბიბლიოთეკებში, ინტერნეტ რესურსებით და გამოცდილ პედაგოგებთან გასაუბრების შემდეგ, თემასთან დაკავშირებით, ქართულ ენაზე მოვიძიეთ მხოლოდ ერთ წიგნი:.-„მათემატიკა- პარამეტრის შემცველი განტოლებები, უტოლობები და სისტემები“- ავტორი ტარიელ კვიციანი - „ტექნიკური უნივერსიტეტი“- თბილისი 1999წ. (ქართულ ენაზე სხვა წიგნი ან ბროშურა ვერ აღმოვაჩინეთ).

მოვიძიეთ სტატია - „გრაფიკების გამოყენებით პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის შესახებ“ -ავტორები: თ. ვეფხვაძე, ლ. ქურჩიშვილი სამეცნიერო პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“ N3 გვ77.

2.3 სამაგიდე კვლევის შედეგების აღწერა

2.3.1 ძირითადი (გრიფირებული) სახელმძღვანელოების ანალიზის შედეგები

მოხდა პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოების მოცულობის კვლევა. მათემატიკის მე-7, მე-8 და მე-9 კლასების სახელმძღვანეოებთან ერთად განვიხილეთ (2) ჯგუფის ავტორთა მე-10 კლასის სახელმძღვანელო, რადგან ამ სახელმძღვანელოში პარამეტრს ეთმობა ცალკე თავი.

წინამდებარე ცხრილში ნაჩვენებია პარამეტრის შემცველი განტოლებების და უტოლობების სავარჯიშოთა რაოდენობა და მათი პროცენტი წილი თითოეული სახელმძღვაენლოს მიხედვით.

*ცხრილი1.*თითოეული კლასის სახელმძღვანელოში პარამეტრის შემცველი ამოცანების რაოდენობა

		მათემატიკა გ.გოგიშვილი და სხვა			მათემატიკა ნ.ჯაფარიძე და სხვა				მათემატიკა თ.ბექაური და სხვა		
		მე-7 კლ	მ-8 კლ	მე-9 კლ	მე-7 კლ	მ-8 კლ	მე-9 კლ	მე-10 კლ	მე-7 კლ	მ-8 კლ	მე-9 კლ
1	სავარჯიშოების საერთო რაოდენობა ამ სახელმძღვანელოებში	981	1222	1179	1878	1596	1537	1035	1323	1340	1771
2	პარამეტრის შემცველი ამოცანების რაოდენობა	4 0,41%	32 2,62%	61 5.17%	4 0.21%	10 0.63%	33 2.15%	39 3.77%	5 0.38%	23 1.72%	42 2.37%

ცხრილი1. გვიჩვენებს, რომ საკითხთან დაკავშირებული სავარჯიშოების მოცულობა მცირეა. (მაქსიმალური პროცენტი 5.17%).სავარჯიშოების რაოდენობის ზრდის ტენდენცია შენარჩუნებულია სამივე ავტორთა ჯგუფების სახელმძღვანელოებში. ((2) მეორე ჯგუფის ავტორთა მე-10 კლასის სახელმძღვანელოც შენარჩნებულია ეს ტენდენცია).

თითოეული თემაზე სავარჯიშოების მოცულობის დასადგენად მოხდა კლასიფიკაცია თემების მიხედვით.

ცხრილი2. თითოეული კლასის სახელმძღვანელოში თემის მიხედვით პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოების რაოდენობა.

		მათემატიკა გ.გოგიშვილი და სხვა			მათემატიკა ნ.ჯაფარიძე და სხვა				მათემატიკა თ.ბექაური და სხვა		
		მე-7 კლ	მ-8 კლ	მე-9 კლ	მე-7 კლ	მ-8 კლ	მე-9 კლ	მე-10 კლ	მე-7 კლ	მ-8 კლ	მე-9 კლ
1	წრფივი პარამეტრული განტოლებები	4 100%	3 9,4%	5 8.2%	4 100 %	-	-	10 25.6%	3 60%	8 34.8%	3 7%
2	წრფივი პარამეტრული უტოლობები	-	3 9,4%	-	-	3 30%	-	2 5.1%	-	2 8.7%	1 2.4%
3	კვადრატული პარამეტრული განტოლება	-	2 6.3%	15 24.6%	-	-	14 42.4%	5 12.8%	-	1 4.3%	25 59.5%
4	კვადრაული პარამეტრული უტოლობა	-	-	17 27.9%	-	-	15 45. 5%	14 35.9%	-	-	12 28.6%
5	წრფივ პარამეტრულ განტოლებათა სისტემა	-	24 75%	3 4.9%	-	5 50%	-	3 7.7%	-	12 52.2%	1 2.4%
6	წრფივ პარამეტრულ	-	-	11	-	2	-	5	-	-	-

	უტოლობათა სისტემა			18%		20%		12.8%			
7	პარამეტრული კვადრატული განტოლებათა სისტემა	-	-	10 16.4%	-	-	4 12.1%	-	2 40%	-	-
8	პარამეტრული კვადრატული უტოლობათა სისტემა	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ცხრილი 2. გვიჩვენებს, რომ პარამეტრის შემცველი ამოცანები ჩართულია ყოველი თემის სწავლებაში (ეროვნული სასწავლო გეგმის მიხედვით) და არ არის დარღვეული მათი თანმიმდევრობა. მეორე და მესამე ავტორთა ჯგუფის მე-9 კლასის სახელმძღვანელოში არ არის წრფივი პარამეტრულ უტოლობათა სისტემა, ხოლო მესამე ავტორთა ჯგუფის სახელძღვანელოში პარამეტრული კვადრატული განტოლებათა სისტემა.

დასმული კითხვებით, ამოხსნის მეთოდებით და შექმნილი კლასიფიკაციით გაანალიზებულ იქნა სამივე ავტორთა ჯგუფის: გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილის; ნ. ჯაფარიძე, ნ. წილოსანი, ნ. წულაია, ნ. გულუა, გ. ძაგანიას და თ. ბექაური, ა. საგინაშვილი, გ. ბექაურის მე-7, მე-8 და მე-9 კლასის სახელმძღვანელო. აგრეთვე ავტორთა ჯგუფის ნ. ჯაფარიძე, ნ. წილოსანი, ნ. წულაია, ნ. გულუა, გ. ძაგანიას მე-10 კლასის სახელმძღვანელო. სამივე მათგანში გვხვდება პარამეტრის შემცველი ამოცანები. ყველა ეს სავარჯიშო მოცემულია დანართის სახით. (იხ. დანართი 3)

გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილის მე-7 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოში პარამეტრის შემცველი სამი სავარჯიშო

წრფივი განტოლების ამოხსნადობის შესახებ თეორიის ცოდნის შემოწმებაა. არც მეოთხე სავარჯიშო არ მოითხოვს იგივური გარდაქმნების ჩატარებას. მოსწავლეები მხოლოდ ეცნობიან ასოითკოეფიციენტიან განტოლებას. შესაბამისად ვერცერთ ამოცანას ვერ მივუსადაგებთ ჩვენს კლასიფიკაციას. ვთვლით, რომ კარგი იქნებოდა წრფივი განტოლების ცნების შემოტანისას, პირველი ტიპის სავარჯიშოების განხილვა, რადგან ასეთ სავარჯიშოები დიდ დახმარებას გაუწევდათ მოსწავლეებს არა მარტო პარამეტრული ამოცანების გამკლავებაში, არამედ რიხცვითკოეფიციენტებიანი წრფივ განტოლებათა სისტემის ჩასმის ხერხის სწავლებაში, აგრეთვე რიცხვითკოეფიციენტებიან რაციონალურ განტოლებში ამოხსნისას, გარეშე ფესვის თავის ასარიდებლად. არ გვხვდება ტერმინი „პარამეტრი".

იგივე ავტორთა (გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი) ჯგუფის მე-8 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოში გვხვდება რამოდენიმე სავარჯიშო პარამეტრის შემცველი წრფივი ფუნქციის გრაფიკული მდებარეობის შესახებ ცოდნის შესამოწმებლად. აგრეთვე გვხვდება სტანდარტული სავარჯიშები წრფივ განტოლებათა სისტემაზე, მათი ნაწილი მოითხოვს ამოხსნას ჩასმის, ხოლო ნაწილი შეკრების ხერხით. გვხვდება ისეთი ამოცანებიც, რომლებიც ეხება წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნადობის საკითხს. არის მაგალითად ისეთი სავარჯიშო, რომელის ამოხსნაც მოსწავლისაგან მოითხოვს წრფივი განტოლებების გრაფიკთა ურთერთმდებარეობის საკითხის ცოდნას. ზოგადად შეიძლება ითქვას, რომ პარამეტრის შემცველ წრფივ განტოლებათა სისტემაზე სახელმძღვანელოში სავარჯიშოები მრავალფეროვანია, საინტერესო და მათმატიკის გაკვეთლებზე მათი ამოხსნა დაეხმარებათ მოსწავლეებს წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნადობის საკითხში გაწაფვაში. გვხდება წრფივი პარამეტრული უტოლობებიც, რომლებიც რიცხვთა შედარებაზე დადის და მათი ამოხსნა

მოსწავლეებს შეუძლიათ ზეპირადაც. არის აგრეთვე ერთი მარტივი ირაციონალური პარამეტრული განტოლება, რომელის ამოხსნა მოითხოვს არასრული კვადრატული განტოლების ამოხსნას და შეიძლება ზეპირადაც. სავარჯიშებში კვლავ ვერ შევხვდით ტერმინს „პარამეტრი". პირობის მიხედვით ამოცანები ძირითადად პირველი და იშვიათად მეორე ტიპისაა. წრფივ განტოლებაზე არ გვხვდება ისეთი პარამეტრული განტოლება, რომელიც პირველ ტიპს განეკუთვნება. პირველი ტიპის პირობის შესაბამისი სავარჯიშები პირდაპირ განტოლებათა სისტემებში გამოიყენება.

გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილის მე-9 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოში პარამეტრის შემცველ წრფივ განტოლებასთან, უტოლობასთან და უტოლობათა სისტემებთან ერთად გვხვდება პარამეტრის შემცველი კვადრატული განტოლებები და უტოლობები. გვხვდება სავარჯიშები, რომეთა ამოხსნაც მოითხოვს პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლების ამოხსნას, აგრეთვე ისეთები, რომელთა ამოხსნაც მოითხოვს პარამეტრის შემცველ წრფივ უტოლობათა სისტემის ამოხსნას. სავარჯიშოების ნაწილი, კვლავ თეორიული ცოდნის შემოწმებას, ან ზეპირად ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენებას ემსახურება. გვხდება პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოები რომლებიც, მაგალითად კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის, პარაბოლას და წრფის ურთიერთმდებარეობას ეხება. ამოცანები პირველი და მეორ ტიპისაა. სავარჯიშოები როგორც პარამეტრის შემცველ კვადრატულ განტოლებაზე, ასევე პარამეტრის შემცველ კვადრატულ უტოლობაზე მეორე ტიპისაა. მეორე ტიპისაა სავარჯიშოები პარამეტრის შემცველ წრფივ უტოლობათა სისტემებზეც. გვხვდება ამოცანა სადაც მოითხოვება ამოხსნა ამოხსნის გრაფიკული მეთოდით. კვლავ არ არის ნახსენები ტერმინი „პარამეტრი".

პარამეტრის შემცველი კვადრატული განტოლებებისაგან განსხვავებით მწირია სავარჯიშები პარამეტრის შემცველ წრფივ განტოლებებზე.

უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ავტორთა ჯგუფის დამხმარე სახელმძღვანელოებში მე-7, მე-8 და მე-9 კლასის "მათემატიკის ამოცანათა კრებულებშიც" გვხვდება პარამეტრის შემცველი ამოცანები, თუმცა ეს კრებულები არ არის სავალდებულო. მაგალითად პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლების შემთხვევაში მეორე ტიპის სავარჯიშოები პარამეტრის შემცველ წრფივ განტოლებეზე გვხვდება მე-7 კლასის მოცემულ კრებულში გვ.50-ზე. მაგალითად სავარჯიშო N25*

იპოვეთ a-ს მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც $(a+2)(a-1)x = a-1$ განტოლებას (x უცნობის მიმართ): ა) უამრავი ფესვი აქვს, ბ)არ აქვს ფესვი, გ)ერთადერთი ფესვი აქვს.

შინაარსობრივ-მეთდური ხაზის გამართვისთვის ვფიქრობთ კარგი იქნებოდა ასეთი სავარჯიშოების მე-7 კლასის ძირითად სახელმძღვანელოშიც იყოს მოცემული.

როგორც ვნახეთ განხილულ სახელმძღვანელოებში არ გვხვდება ტერმინი „პარამეტრი". შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ ავტორებმა ტერმინს შეგნებულად აარიდეს თავი, რადგან ეროვნულ სასწავლო გეგმაში „ჩვეულებრივი" სკოლებისათვის განკუთვნილ პროგრამის შინაარსში, საბაზო საფეხურზე არ არის ნახსენები პარამეტრი. თუმცა აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ კარგი იქნებოდა სიტყვა „პარამეტრის" ხსენება ამოცანებში, რადგან ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე მათემატიკის ტესტურ დავალებებში აბიტურიენტებს ხვდებათ ეს ტერმინი. (იხ.დანართი 1).

ნ. ჯაფარიძე, მ. წილოსანი, ნ. წულაიას მე-7 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოში პარამეტრის შემცველი პირველი ოთხივე სავარჯიშო მიეკუთვნება პირველ ტიპს. სახელმძღვანელოში ვერ შევხვდით ტერმინს „პარამეტრი".

ნ. ჯაფარიძე, მ. წილოსანი, ნ. წულაიას მე-8 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოში არის სავარჯიშოები პარამეტრის შემცველ წრფივ განტოლბებზე, უტოლობაზე, წრფივ პარამეტრულ განტოლებათა და უტოლობათა სისტემაზეც. გვხვდება სავარჯიშოები, რომლებიც პარამეტრის მიხედვით წრფივი ფუნქციების გრაფიკების ურთიერთმებარეობას ეხება, აგრეთვე, სადაც მოითხოვება ამოხსნის გრაფიკული ხერხის გამოყენება. მოცემული სახელმძღვანელოს სავარჯიშოებში კვლავ ვერ შევხვდით ტერმინს „პარამეტრი“. ამოცანები პირველი და მეორე ტიპისაა.

ნ. ჯაფარიძე, ნ. წილოსანი, ნ. წულაიას მე-9 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოში არის სავარჯიშოები პარამეტრის შემცველი კვადრატული განტოლებებზე, პარამეტრის შემცველი კვადრატული უტოლობებზე და პარამეტრის შემცველ კვადრატულ განტოლებებზე. გვხვდება სავარჯიშოები, რომელიც კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის შესახებ თეორიულ ცოდნას ამოწმებს, აგრეთვე არის ორი სავარჯიშო დამოუკიდებელი კვლევისთვის, სადაც კომპიუტერული პროგრამა Geogebra-ს საშუალებით ითხოვენ გრაფიკების აგებას. გვხვდება სავარჯიშო სადაც ნახსენებია ტერმინი „პარამეტრი“. ამოცანები იშვიათად პირველი და ძირითადად მეორე ტიპისაა.

კითხვას აჩენს, თუ რატომ გვხდება ნ. ჯაფარიძე, ნ. წილოსანი, ნ. წულაია, მე-9 კლასში სავარჯიშოში ტერმინი „პარამეტრი“ და არ არის იგივი ტერმინი გამოყენებული არც მე-7, არც მე-8 და არც მე-9 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოს სხვა სავარჯიშოებში.

ვინაიდან ნ. ჯაფარიძე, ნ. წილოსანი, ნ. წულაია, მე-10 კლასის სახელმძღვანელოში, პარამეტრს ეთმობა ცალკე თავი, ამიტომ გადაწყდა ამ სახელმძღვანელოში მოცემული პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოების ანალიზიც.

§1 პარამეტრის შემცველი განტოლება, მოცემულია პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლების ამოხსნის სქემა (პირობა მესამე ტიპისაა). ამავე პარაგრაფშია მოცემული ზოგადი სახის, პარამეტრის შემცველი წრფივი უტოლობის ამოხსნის სქემა. აქვეა მოცემულია $kx > b$ უტოლობა და აგებულია $y = kx$ და $y = b$ ფუნქციათა გრაფიკები.

პარამეტრის შემცველ კვადრატულ განტოლებათა და პარამეტრის შემცველ კვადრატულ უტოლობათა გარდა გვხვდება ჩვენთვის საინტერესო და ეროვნული სასწავლო გეგმის პროგრამის შინაარსით გათვალისწინებული ყველა პარამეტრული განტოლებები, უტოლობები და სისტემები. ზოგიერთ სავარჯიშოში ნახსენებია ტერმინი „პარამეტრი" ზოგიერთში კვლავ არ არის ნახსენები. არც ამ სახელმძღვანელოში არ არის პარამეტრის შემცველი ამოცანები, რომლებიც ამოხსნის გრაფიკული ხერხის გამოყენებას მოითხოვს. მოცემული სავარჯიშოები მრავალფეროვანი, მაგრამ ძრითადად პარამეტრის მიხედვით ამოხსნადობის საკითხს ეხება. ამოცანები პირველი და მეორე ტიპისაა.

შინაარსობრივ-მეთოდური ხაზის გამართვისთვის ვთვლით, რომ კარგი იქნება საბაზო საფეხურის პირველივე, მე-7 კლასის სახელმძღვანელოში მოყვანილი იყოს მეორე ტიპის პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლებების შემცველი სავარჯიშო (ერთი მაინც).

თ. ბექაური, ა. საგინაშვილი, გ. ბექაურის მე-7 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოში ოთხი სავარჯიშოდან ორი პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლებაა, ხოლო ორი პარამეტრის შემცველი კვადრატული სამწევრი, სადაც მეორე ხარისხის შემცველი წევრები ბათილდება და ვიღებთ წრფივ განტოლებას. პირობის მიხევით ორი შესაძლებელია მივაკუთვნოთ პირველ ტიპს, ხოლო ორი მეორე ტიპს. (მეორე ტიპის მარტივ შემთხვევას). სახელმძღვანელოში არ არის ნახსენები ტერმინი „პარამეტრი".

თ.ბექაური, ა.საგინაშვილი, გ.ბექაურის მე-8 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოში პირველივე პარამეტრის შემცველ კვადრატულ განტოლებაში გვხვდება ტერმინი „პარამეტრი“. მოცემულია წრფივ პარამეტრული განტოლების, წრფივი პარამეტრული უტოლობის, კვადრატული პარამეტრული განტოლების და წრფივ განტოლებათა სისტემების შემცველი სავარჯიშოები. არის სავარჯიშოები, რომლებიც წრფივი ფუნქციის გრაფიკის თვისებების შესახებ, მხოლოდ თეორიულ ცოდნას ამოწმებს. გვხვდება პარამეტრის შემცველი წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომელის პირობაც ამოხსნის ჩასმის ხერხის გამოყენებას მოითხოვს. რამოდენიმე სისტემა მხოლოდ ამოხსნადობის საკითხის ცოდნას ამოწმებს. სავარჯიშოები მიეკუთვნებიან პირველ და მეორე ტიპს.

თ. ბექაური, ა. საგინაშვილი, გ. ბექაურის მე-9 კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელოში პარამეტრის შემცველ წრფივ განტოლებასა და უტოლობასთან ერთად გვხვდება პარამეტრის შემცველი კვადრატული განტოლებები, უტოლობები. ამავე კლასის წინა ორი სახელმძღვანელოს მსგავსად, ამ სახელმძღვანელოშიც მაგალითად კვადრატული განტოლებებზე და უტოლობებზე პარამეტრის შემცველი ამოცანები ეხება პარამეტრის მნიშვნელობის მიხედვით განტოლების ამოხსნადობის საკითხს. სახელმძღვანელოში არის პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოები, სადაც ამოხსნისას, მოცემული გრაფიკების მიხედვით უწევთ მოსწავლეებს პარამეტრებზე მსჯელობა. პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოები მრავალფეროვანია, თუმცა აქაც არ გვხვდება სავარჯიშო, რომელიც მოსწავლისაგან მოითხოვს ამოხსნის გრაფიკული ხერხის გამოყენებას. არ არის ნახსენები ტერმინი „პარამეტრი“. ამოცანები პირველი და ძირითდად მეორე ტიპისაა.

ისევე, როგორც ავტორთა მეორე ჯგუფის სახელმძღვანელოში აქაც არათანმიმდევრულია და კითხვას ბადებს, ტერმინ „პარამეტრის“ ხსენება.

თუ რატომ გვხდება მე-8 კლასში პარამეტრის შემცველ კვადრატულ განტოლებაში და არ არის ნახსენები სხვა შემთხვევებში და სხვა კლასებში. ავტორთა ამ ჯგუფის სახელმძღვანელოებში არ გვხვდება სავარჯიშოები პარამეტრის შემცველ წრფივ უტოლობათ სისტემაზე და პარამეტრის შემცველ კვადრატულ განტოლებათა სისტემაზე, რომლებიც ჩვენი აზრით შინაარსობრი-მეთდური ხაზის გამართვისათვის ერთერთი აუცილებელი პირობაა.

2.3.2 ზოგიერთი დამხმარე სახელმძღვანელოს ანალიზის შედეგები

პედაგოგთა გამოკითხვის შედეგად ყველაზე ხშირად დასახელდა ორი დამხმარე სახელმძღვანელო. 1. მათემატიკა I ნაწილი, გამომცემლობა “განათლება”, თბილისი 1991 წელი, მესამე გადამუშავებული და შევსებული გამოცემა ავტორები: ს. თოფურია, გ. ოზგებაშვილი, ვ. ხოჭოლავა, ზ. მეტრეველი, ნ. მაჭარაშვილი და 2. „მათემატიკა აბიტურიენტებისათვის“ მესამე გამოცემა 2008წ - ბ. ღვაბერიძე, ფ. დვალიშვილი, ა. მოსიძე, კ. გელაშვილი, გ. სირბილაძე.

მათემატიკა I ნაწილი, გამომცემლობა “განათლება”, თბილისი 1991 წელი, მესამე გადამუშავებული და შევსებული გამოცემა ავტორები: ს. თოფურია, გ. ოზგებაშვილი, ვ. ხოჭოლავა, ზ. მეტრეველი, ნ. მაჭარაშვილი დამხმარე სახელმძღვანელოში გვ.311-ზე მოცემულია 3 სავარჯიშო (N6.13, N6.14 და N6.15), სულ 12 პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლება, სადაც ამოხსნა მოითხოვება x-ის მიმართ. ეს სავარჯიშოები ჩვენი კლასიფიკაციით პირველ ტიპს მიეკუთვნებიან. გვხვდება როგორც ერთი, ასევე ორი და სამი პარამეტრის შემცველი განტოლებები.

მაგალითად:

N6.15 2) $2(3x-5a)+9(2a-3b)+3(5a-2x)=0$

გვ. 311-312-ზე მოცემულ, შემდეგ 6 სავარჯიშოში (N6.16-დან 6.21-ის ჩათვლით) მოითხოვენ ამოვხსნათ განტოლებები, რომლებშიც ცვლადი აღნიშნულია ერთ-ერთით x, y, z, u და t ასოებიდან. ე.ი როგორც წინა 3 სავარჯიშოში, აგრეთვე ამ სავარჯიშოებშიც ფაქტიურად მოითხოვენ ცვლადების გამოსახვას პარამეტრების საშუალებით, ანუ ყველაზე მარტივი ტიპის სავარჯიშოებია პარამეტრზე.

N6.17 2) $z-u=\frac{z}{b}$;

N6.20 3) $\frac{a+bz}{a+b}=\frac{c+dz}{d+c}$;

N6.21 4) $\frac{x}{b-a}=\frac{2bx}{b^2-a^2}-\frac{5a}{a+b}$

ასეთი ტიპის სავარჯიშოებში შედარებით მარტივად შეგვიძლია ჩავთვალოთ ის მაგალითები, სადაც მხოლოდ ერთ პარამეტრია, გართულება ხდება ორი და სამი პარამეტრის შემოტანით, აგრეთვე პარამეტრის მნიშვნელში მოთავსებით, აგრეთვე პარამეტრის ახარისხებით. ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნის შემდეგ მოსწავლეებს გაუადვილდებათ ერთი ცვლადის მეორეთი გამოსახვა, რაც კარგი მომზადება იქნება როგორც სისტემის ჩასმის ხერხის საშუალებით ამოხნის, აგრეთვე ფიზიკისა და ქიმიის ფორმულებისა და ამოცანების უკეთ დაძლევისათვის. ეს ისეთი ტიპის ამოცანებია, რომლებიც შეგვიძლია ჩავრთოთ საკითხის სწავლების პროცესში.

გვ. 315-ზე მოცემულია აგრეთვე ორი სავარჯიშო N6.39 და N6.40 (სულ 8 მაგალითი როგორც ერთი, ასევე ორი პარამეტრის შემცველი კვადრატული განტოლებებით) სადაც მოითხოვება ასოითკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ამოხსნა. მაგალითად:

N6.39

3) $\frac{x-b}{a-b}=\frac{x^2}{a^2}$

გვ. 316-ზე მოცემულია აგრეთვე ვიეტის თეორემის გამოყენებით განტოლების ამოუხსნელად ორი პარამეტრის შემცველი კვადრატული განტოლების ფესვების ჯამის და ნამრავლის პოვნა. ერთ განტოლებაში ერთი პარამეტრია, ხოლო მეორე განტოლებაში სამი. აგრეთვე შეიძლება ჩაითვალოს ამ სავარჯიშოების შებრუნებულ სავარჯიშოებათ ისევ ვიეტის თეორემის გამოყენებით კვადრატული განტოლების შედგენა სადაც ორ შემთხვევაში ერთი ფესვი ორი პარამეტრების შემცველია, მეორე კი რიცხია, ხოლო მეორე შემთხვევაში ორივე სამპარამეტრიანი ფესვებია. კარგია ასეთი სავარჯიშების გაკვეთილებზე ერთდროულად განხილვა როგორც სწავლების, აგრეთვე ნასწავლი მასალის შეფასების პროცესში.

ამავე გვერდზე გვხვდება სავარჯიშო, სადაც მოცემულია 4 დამოუკიდებელი მსგავსი შეკითხვა, მაგალითად:

N6.50 როგორი მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს k -ს, რომ განტოლებას:

$x^2+kx+15=0$ ჰქონდეს 5-ის ტოლი ფესვი?

გვ 317-დან 320-ის ჩათვლით მდებარე სავარჯიშოები N6.54-დან N6.96-ის ჩათვლით ყველა სავარჯიშო პარამეტრის შემცველია (სამწევრები და განტოლებები). გვხვდება როგორც წრფივი, აგრეთვე კვადრატული განტოლებები. ამ ამოცანებიდან ზოგიერთის ამოსახსნელად მიზანშეწონილია სისტემის გამოყენება.

მოცემულია ამოცანები როგორც ერთი, ასევე ორი პარამეტრის შემცველი კვადრატული სამწევრების მამრავლებად დაშლაზე. აგრეთვე პარამეტრების მნიშვნელობების მიხედვით განტოლებების ფესვების რაოდენობების, აგრეთვე მათ შორის დამოკიდებულებების შესახებ.

მოცემულია როგორც ადვილი აგრეთვე შედარებით რთული და ვარსკვლავით აღნიშნული სავარჯიშოებიც.

მაგალითად:

N6.57* იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\frac{2}{2x-m}=\frac{7}{mx-1}$ განტოლებას არა აქვს ამონახსენი.

N6.60 c-ს რა მნიშვნელობისათვის ექნება ერთ ფესვი განტოლებას $4x^2-12x+c=0$.

N6.67 ცნობილია, რომ x_1 და x_2 $x^2+px+q=0$ განტოლების ფესვებია. შეადგინეთ ახალი კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვები k-ჯერ მეტი იქნება მოცემილი განტოლების ფესვებზე.

N6.81 k -ს რა მნიშვნელობისათვის აკმაყოფილებენ

$$x^2+\frac{36k+1}{2k-3}x+45=0$$

განტოლების x_1დაx_2 ფესვები პირობას $x_1=5x_2$.

N6.92 b-ს რა მნიშვნელობისათვის აქვთ საერთო ფესვი განტოლებებს:

$2x^2+(3b-1)x-3=0$ და $6x^2-(2b-3)x-1=0$.

N6.93* რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ და $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ კვადრატული განტოლებების კოეფიციენტები, რომ განტოლებებს ჰქონდეთ საერთო ფესვი.

N6.96 k-ს რა მნიშვნელობებისათვის იქნება $kx^2-(1-2k)x+k-2=0$განტოლების ფესვები რაციონალური რიცხვები.

გვხვდება სავარჯიშოები, რომლებშიც მოითხოვება, პარამეტრის მიხედვით გრაფიკის მდებარეობის განსაზღვრა ან გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის დადგენა. მაგალითად:

N6.64 იპოვეთ k - ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=kx+6$ წრფეს

$y = x^2 + 20x + 42$ პარაბოლასთან ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს.

გვ 336 და 337-ზე სავარჯიშოებში N8.36-დან N8.40-ის ჩათვლით მოცემულია (ერთი ან ორი) პარამეტრის შემცველი სისტემები, მოითხოვება მათი ამოხსნა. მაგალითად:

N8.37 4) $\begin{cases} x + y = a + 2b, \\ xy = ab + b^2. \end{cases}$

N8.39 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n}. \end{cases}$

გვ 338 და 339-ზე მოცემულია სავარჯიშოები N8.48-დან N8.50-ის ჩათვლით (14 სისტემა) პარამეტრის შემცველი წრფივ განტოლებათა სისტემები.

N8.48 იპოვეთ m -ისა და n –ის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც შემდეგ სისტემებს აქვთ ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე:

$\begin{cases} mn + (n-1)y = 2, \\ 3x + 10y = -1; \end{cases}$

N8.50 იპოვეთ m-ს მნიშვნელობები, რომელთათვისაც შემდეგ სისტემებს: ა) აქვთ ამონახსნების უსასრულო სიმრავლე; ბ) არა აქვს ამონახსენი:

$\begin{cases} (m+2)x + 2my = 8, \\ mx + 2y = 4; \end{cases}$

გვ. 340-341-ზე გვხვდება პარამეტრის შემცველი 6 სავარჯიშო N8.57- N8.62-ის ჩათვლით. N8.57-ში მოცემულია 4 სისტემა. დანარჩენი სავარჯიშოები ეხება კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის, პარაბოლის მდებარეობის განსაზღვრა პარამეტრის მიხედვით. მაგალითად:

N8.59 განსაზღვრეთ a, b, c რიცხვები ისე, რომ პარაბოლას რომლის განტოლება

არის $y = ax^2 + bx + c$, წვერო ჰქონდეს (1;-2) წერტილში გადის (-1;2) წერტილზე.

N8.62 იპოვეთ b და c , თუ $y = -x^2 + bx + c$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 3, რომელსაც ის ღებულობს წერტილში.

წიგნში აგრეთვე გვხვდება პარამეტრის შემცველი წრფივი უტოლობები. მაგალითად გვ.342-ზე სავარჯიშო N9.9 და გვ. 346-ზე N9.36.

N9.9 3) $\frac{ax+b}{a-b} > \frac{ax-b}{a+b}$, $(a > b > 0)$;

N9.36 3) $2(a+1)x + 4a < ax + 5$;

გვ. 352-ზე სავარჯიშო N9.76-დან გვ 362-ზე მდებარე სავარჯიშო N9.145-მდე გვხვდება პარამეტრის შეცველი წრფივი, კვადრატული, რაციონალური, ირაციონალური და მოდულის შემცველი ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება, მაგალითად, პარამეტრის მიხედვით განტოლების ფესვების არსებობის, ნიშნების, ფესვებს შორის დამოკიდებულებების დადგენა. არის აგრეთვე მარტივი სავარჯიშოები პარამეტრის შემცველი უტოლობის ამოხსნის შესახებ.

მაგალითად:

გვ.353

N9.80 a -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს განტოლებას ნამდვილი ფესვები:

3) $5(a+4)x^2 - 10x + a = 0$;

N9.80 a -ს რა მნიშვნელობისათვის დააკმაყოფილებს უტოლობას x -ის ყველა მნიშვნელობა

$x^2 + 2x + a > 10$;

N9.101 იპოვეთ a -ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$x^2 + (2a-1)x + a^2 - 3a = 0$

განტოლებას აქვს სხვადასხვა ნიშნის ფესვები.

N9.117 იპოვეთ a -ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$2ax - x > a + 2$

უტოლობიდან გამოდინარეობს $x < -1$ უტოლობა.

N 9.137 იპოვეთ a -ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემის ამონახსნები აკმაყოფილებენ მითითებულ პირობას.

$\begin{cases}(a-2)x - 4y = a - 1\\ 2x + 2(a-2)y = -1\end{cases}$ $x > 0, y < 0.$

N 9.143 იპოვეთ a -ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც არსებობს თუნდაც ერთი წყვილი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

1)* $\begin{cases}x^2 + (y+3)^2 < 4\\ y = 2ax^2\end{cases}$

გვ. 366-ზე აგრეთვე მოცემულია პარამეტრის შემცველი 4 უტოლობა მსგავსი პირობებით და ამოხსნის მოთხოვნით.

N9.146

1)*მოძებნეთ x-ის ყველ ის არაუარყოფითი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$abx \geq 4a + 7b + x, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$

უტოლობიდან გამომდინარეობს $ab \geq 5$;

როგორც ვხედავთ ამოცანები პირველი და მეორე ტიპისაა.

გვხვდება სავარჯიშოები სადაც დაფიქსირებულია ტერმინი „პარამეტრი", მაგალითად გვ. 353 მდებარე 9.81 და 9.82 სავარჯიშოებში.

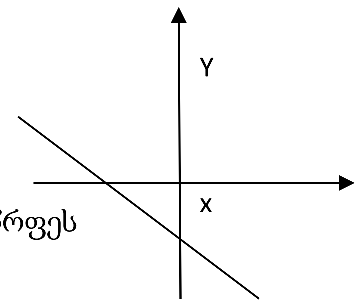
„მათემატიკა აბიტურიენტებისათვის" მესამე გამოცემა 2008წ- ზ. ღვაზერიძე, ფ. დვალიშვილი, ა. მოსიძე, კ. გელაშვილი, გ. სირბილაძე მოცემულ დამხმარე სახელმძღვანელოში გვხვდება ამოცანები წრფივი ფუნქციის გრაფიკზე, სადაც გრაფიკების მიხედვით უნდა განვსაზღვროთ

პარამეტრები, ან პარამეტრების მიხედვით უნდა განვსაზღვროთ გრაფიკების მდებარეობა.

მაგალითად:

გვ263

N8.29. იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $y = (a+3)x + 2 - a$ წრფეს ნახაზზე მოცემული მდებარეობა აქვს.



გვ.264

N8.31. რომელ საკოორდინატო მეოთხედებშია განლაგებული $y = kx + b$ფუნქციის გრაფიკი, თუ:

$k > 0, b > 0;$

გვ. 265-ზე მოცემულია პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლებები, უტოლობები და განტოლებათა სისტემები. (N8.35, N8.36, N8.37,N8.38,N8.39,N8.40 დაN8.42)

მოცემულ სავარჯიშოებში მოითხოვება ცვლადის გამოსახვა პარამეტრების საშუალებით. (ერთპარამეტრიანი და ორპარამეტრიანი განტოლებები), აგრეთვე პარამეტრის მიხედვით ამონახსნის არსებობისა და მათი რაოდენობების, რიცხვით სიმრავლეებთან მიკუთვნების განსაზღვრა. მაგალითად:

N8.35. ამოხსენით განტოლება x-ის მიმართ:

3)$(2z+1)(x-1) = 0;$

N 8.37. იპოვეთ b-ს მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც $b^2x = 4x + b + 2$ განტოლებას:

1) არა აქვს ამონახსნი; 2) აქვს უამრავი ამონახსნი; 3) აქვს ერთი ამონახსნი.

N8.38. a-ს რა მნიშვნელობისათვის სრულდება

$$\frac{a(3x-8)-3x-6}{a+3}=\frac{x-12}{3}$$

ტოლობა ნებისმიერი x-სათვის?

N8.39. ცნობილია, რომ $ax+b$ ორწევრის მნიშვნელობა, როცა $x=1$ არის 4, ხოლო

როცა $x=3$, არის 0. იპოვეთ a და b .

N8.40. იპოვეთ a-ს მნიშვნელობები, რომლისთვისაც სისტემებს:

ა) არა აქვს ამონახსნი;

ბ) აქვს უამრავი ამონახსნი;

გ) აქვს ერთადერთ ამონახსნი.

$$\begin{cases} x-y=3 \\ ax-2y=4 \end{cases}$$

გვ.267-ზე მოცემულ საკონტროლო ტესტ N8-ში აგრეთვე გხვდება პარამეტრის შემცველი ამოცანები წრფივი ფუნქციის შესახებ, აგრეთვე მოცემული გრაფიკების მიხედვით პარამეტრის მნიშვნელობების დადგენა. ასევე გვხვდება ამოცანა სადაც მოცემულია ერთი რიცხვითკოეფიციენტებიანი წრფივი ფუნქცია, ხოლო მეორეს თავისუფალი წევრი პარამეტრია. მოითხოვება პარამეტრის დადგენა, თუ ცნობილია ამ წრფეების გადაკვეთის მეოთხედი.

გვ. 269 უკვე გვხვდება პარამეტრის შემცველი კვადრატული განტოლებები. ითხოვენ პარამეტრის მნიშვნელობის დადგენას ფესვების მიხედვით, აგრეთვე, მაგალითად, ცნობილია ერთ ფესვი და ითხოვენ მეორე ფესვისა და პარამეტრის მნიშვნელობის დადგენას.. გვხვდება სავარჯიშოები პარამეტრის შემცველი კვადრატული სამწევრის მარტივ მამრავლებად დაშლის შესახებ.

აქამდე განხილული სავარჯიშოებისაგან განსხვავებული ამოცანაა მაგალითად:

N9.14. შეადგინეთ $ax^2+bx+c=0$ სახის რაიმე კვადრატული განტოლება, რომელსაც ამონახსნი არა აქვს, თუ:

$a=-5;$ 2) $a=3;$ 3) $a=-2$.

გვ. 274-ზე მოცემულია ამოცანები პარამეტრის შემცველი კვადრატული ფუნქციის ზრდადობა-კლებადობის, უმცირესი მნიშვნელობის შესახებ. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის მდებარეობის შესახებ (როგორც პარაბოლის წრფესთან გადაკვეთის საკითხი, აგრეთვე პარაბოლების გადაკვეთაც). მოცემულია ამოცანები პარამეტრის მიხედვით განტოლების ამოხსნადობის და ამონახსნების შესახებ.

მაგალითად:

N9.25

4) იპოვეთ a, თუ $y=(x-3a)(1-x)$ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა 16-ის ტოლია.

გვ. 275

N9.27

4)იპოვეთ k-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=kx+6$წრფეს პარაბოლასთან $y=x^2+20x+42$ ერთადერთი საერთო წერტილი აქვს.

ამავე გვერდზე მოცემულია სავარჯიშოები პარამეტრის შემცველი წრფივი უტოლობებით.

N9.32. a-ს რა მნიშვნელობისათვის დააკმაყოფილებს უტოლობას x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობა?

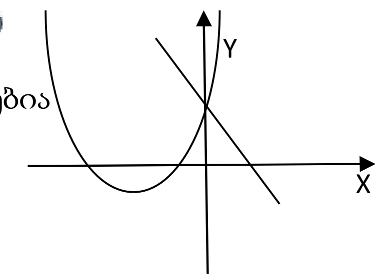
4)$x^2-4x+a-5>0$

N9.35.

იპოვეთ a-ს ყველა მთელი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$y=(x-2a)^2+a^2-8a+12$ პარაბოლის წვეროს აბსცისა და ორდინატა დადებითია.

N9.38. რას უდრის b, თუ ნახაზზე $y=-3x+b$ და $y=x^2+4x+b^2-b$ ფუნქციების გრაფიკებია გამოსახული?



გვ 281

N9.65. იპოვეთ a -ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=-3x-1$და

$y=x^2-2ax$ ფუნქციების გრაფიკებს:

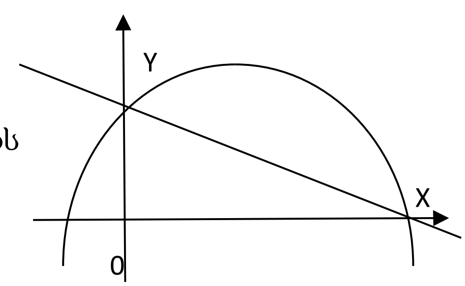
საერთო წერტილი არ გააჩნიათ;

აქვთ ერთადერთი საერთო წერტილი;

აქვთ ორი საერთო წერტილი.

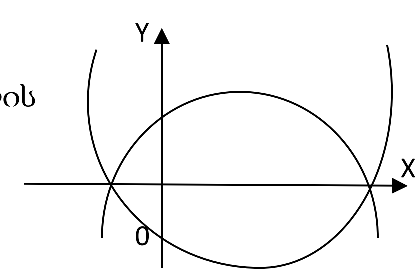
გვ 282

N9.69. ნახაზზე მოცემული პარაბოლის განტოლებაა$y=-x^2+bx+6$, ხოლო წრფის $y=-x+c$. იპოვეთ b და c .



გვ 284

N9.76 ნახაზზე მოცემული პარაბოლის განტოლებებია $y=x^2-2x-3$ და $y=ax^2+4x+c$. იპოვეთ a და c .



გვხვდება პარამეტრის შემცველი ბიკვადრატული განტოლებები, აგრეთვე გვხვდება პარამეტრის შემცველი ამოცანები ვიეტის თეორემის

გამოყენებაზე. გვხვდება პარამეტრის შემცველი როგორც წრფივ განტოლებათა სისტემები, ასევე ისეთი სისტემები, სადაც ერთი განტოლება წრფივია, ხოლო მეორე კვადრატული და მათი ამოხსნადობის საკითხების დადგენა პარამეტრის მნიშვნელობასთან მიმართებაში.

მაგალითად:

გვ. 299

N10.56.

2)ამოხსენით $\begin{cases} 4x+9y=8 \\ x-by=5 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემა, თუ

$x-by=5$ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნი არის (15;10) რიცხვთ წყვილი.

საინტერესო სავარჯიშო გვხდება, მაგალითად გვ 300-ზე.

N10.66.* იპოვეთ a -ის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც

$x^2+x+a=0$

განტოლების ორივე ფესვი მეტია a -ზე.

ამავე გვერდიდან გვხვდება პარამეტრის შემცველი წრფივი უტოლობები, ხოლო მომდევნო გვერდიდან პარამეტრის შემცველი წრფივ უტოლობათა სისტემები.

მაგალითად 4 მარტივი უტოლობიდან ერთ ერთი:

გვ.300

N10.67. ამოხსენით უტოლობა x ცვლადის მიმართ:

1)$2x+8a>4x+7-3a$

გვ 301

N10.70. იპოვეთ a -ის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $\begin{cases} 3x-4\le 8-2x \\ 2(x+8)\ge 2(9-a) \end{cases}$ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ამავე გვერდზე მოცემულია ვარსკვლავით აღნიშნული რთული სავარჯიშოები, მათ შორის

N10.76.* იპოვეთ a-ს ყველა მნიშვნელობა,

რომლისთვისაც $(x^2-3x-4)(x^2-a)=0$ განტოლებას გააჩნია:

სამი განსხვავებული ამონახსნი;

ოთხი განსხვავებული ამონახსნი;

ორი განსხვავებული ამონახსნი;

ერთი ამონახსნი.

პარამეტრის შემცველი ამოცანები გვხვდება აგრეთვე როგორც მოცემული პარაგრაფების ბოლოს, აგრეთვე შემაჯამებელ ტესტებშიც.

უნდა აღინიშნოს, რომ ფაქტიურად არ გვხვდება პარამეტრის შემცველი კვადრატულ უტოლობათა სისტემა ანალიზური სახით.

რაც შეეხება, მაგალითად, ამავე ავტორების 2014 წლის მეექვსე გამოცემას, ის უფრო გამდიდრებულია პარამეტრის შემცველი ჩვენთვის საინტერესო წრფივი და კვადრატული განტოლებების, უტოლობების, განტოლებათა და უტოლობათა სისტემებით, ამოცანებით, რომლებიც მოითხოვენ ამოხსნის გრაფიკული ხერხის გამოყენებას, მათ შორის პარამეტრის შემცველი კვადრატულ უტოლობათა სისტემაც. მაგალითად:

გვ. 272

N10.99. იპოვეთ p-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$\begin{cases} x^2-7x-18\le 0 \\ x-3p\ge 0 \end{cases}$$

სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

სახელმძღვანელოში დაფიქსირებულია ტერმინი „პარამეტრი“. მაგალითდ გვ. 300 მდებარე სავარჯიშოN10.68-ში და გვ. 301-ზე მდებარე სავარჯიშო N10.69-ში.

როგორც ვხედავთ ავტორთა ამ ჯგუფის სახელმძღვანელოშიც გვხვდება პირველი და მეორე ტიპის ამოცანები. აღსანიშნავია, რომ ავტორთა პირველი ჯგუფის სახელმძღვანელოებისაგან განსხვავებით ავტორთა მეორე ჯგუფის სახელმძღვანელოში დიდი რაოდენობით გვხვდება პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოები რომლებიც ამოხსნის გრაფიკულ მეთოდს მოითხოვენ.

2.3.3 ქართულ ენაზე საკითხთან დაკავშირებით არსებული დამხმარე-მეთოდური ლიტერატურა და კვლევითი მასალა

შემდეგ ეტაპზე გადაწყდა თემასთან დაკავშირებული, ქართულ ენაზე არსებული დამხმარე-მეთოდური ლიტერატურის მოძიება. საინტერესო იყო არსებობდა თუ არა ისეთი ლიტერატურა, რომლებიც როგორც მოსწავლეებს ასევე პედაგოგებს მშობლიურ ენაზე დაეხმარებოდათ საკითხის სწავლა-სწავლებაში.

ბიბლიოთეკებში, ინტერნეტ რესურსებით და გამოცდილ პედაგოგებთან გასაუბრების შემდეგ, თემასთან დაკავშირებით, ქართულ ენაზე მოვიძიეთ მხოლოდ ერთ წიგნი:.-„მათემატიკა- პარამეტრის შემცველი განტოლებები, უტოლობები და სისტემები"- ავტორი ტარიელ კვიციანი- „ტექნიკური უნივერსიტეტი"- თბილისი 1999წ. ქართულ ენაზე სხვა წიგნი ან ბროშურა ვერ მოვიძიეთ.

წიგნში თავმოყრილი და განხილულია პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის ანალიზური და გრაფიკული მეთოდების 2200-ზე მეტი მაგალითი. წარმოდგენილია პარამეტრის შემცველი ამოცანების ფართო სპექტრი. მოცემულია თემების შესაბამისი თეორიული მასალა და

რეკომენდაციები. დაწვრილებითაა გაანალიზებული მრავალი ტიპიური მაგალითი. მასალის განსამტკიცებლად ყოველ თავში მოცემულია სავარჯიშოები პასუხებით. მოცემული წიგნი უდაოდ გააღრმავებს ცოდნას პარამეტრის და საერთად ელემენტარული მათემატიკის შესახებ, თუმცა ჩვენი აზრით, საკითხში გაუწაფავი მასწავლებლისა და მითუმეტეს მოსწავლისათვის იგი რთულად მივაჩნია. ამასთან უნდა აღვნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ გამოკითხული არც ერთი მათემატიკის პედაგოგს დამხმარე სახელმძღვანელოდ არ დაუსახელებია მოცემული წიგნი.

მოვიძიეთ სტატია -„გრაფიკების გამოყენებით პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის შესახებ" -ავტორები: თ. ვეფხვაძე, ლ. ქურჩიშვილი სამეცნიერო პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა" N3 გვ77.

სტატიაში მოცემულია პარამეტრის და პარამეტრის შემცველი განტოლების განმარტება. ახსნილია, თუ რას ნიშნავს პარამეტრის შემცველი ამოცანის ამოხსნა. გამოთქმულია აზრი პარამეტრის შემცველი ამოცანების სკოლაში სწავლებასთან დაკავშირებით (ავტორები თვლიან, რომ საჭიროა ზომიერი დოზით და სწორი შერჩევით მათი სწავლება).

სტატიაში განხილულია 8 მაგალითი, მოცემულია პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის გრაფიკული ხერხები-ფუნქციების გრაფიკების გამოყენებით, მათ შორის 2014 წელს ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე მათემატიკის ტესტურ დავალებებში მოყვანილი სავარჯიშოც. უდაოა, რომ სტატია საინტერესო და დროულია მათემატიკის პედაგოგებისათვის.

2.3.4 სავარჯიშოები პარამეტრის შემცველ წრფივ და კვადრატულ განტოლებებსა და უტოლობებზე (სისტემებზე)

აბიტურიენტთა ინტენსიური მომზადების ცენტრის სახელმძღვანელოში „მათემატიკა"-მეორე გამოცემა, ავტორი ვ. კობაიძე, თბილისი 2013წ.

სახელმძღვანელო განკუთვნილია ძირითადად აბიტურიენტებისათვის, ეხმარებათ მათ ერთიანი ეროვნული გამოცდებისათვის მზადებაში.

სახელმძღვანელოში გამოყოფილია ცალკე პარაგრაფი „§15 პარამეტრიანი განტოლება და უტოლობა". დასაწყიდში მოცემულია განმარტება: "განტოლების ან უტოლობის დროს შესაძლოა გვქონდეს შემთხვევები, როდესაც ერთი ან რამოდენიმე კოეფიციენტი უცნობია, ანუ ჩანაცვლებულია პარამეტრით. ასეთ შემთხვევაში საჭიროა, ამოიხსნას კვადრატული სამწევრისაგან მიღებული განტოლება ან უტოლობა შესაბამისი პირობების გათვალისწინებით." შემდეგ ჩამოთვლილია ეს პირობებები. მაგალითად:

„თუ გვეკითხებიან, პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აქვს $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლებას ნამდვილი ფესვები, მაშინ უნდა ჩავწეროთ $D \geq 0$."

ჯამში განხილულია სიტუაციების 17 ვარიანტი, მათ შორის 6 გრაფიკული გამოსახულებითაც. ეს 17 კითხვა ეხება პარამეტრების მიხედვით ფესვების რაოდენობებს, ნიშნების დადგენას.

მოცემული პირობებით ფაქტიურად მზა ალგორითმების მიწოდება ხდება, აბიტურიენტებისათვის, რაც არ მიგვაჩნია სწორად. ცნობილი მათემატიკოსი და პედაგოგი ჯორჯ პოია თვლიდა, რომ რაიმეს სწავლის საუკეთესო მეთოდი -მისი თავად აღმოჩენაა. რისი აღმოჩენაც თვად

გვიხდება, გვიტოვებს გონებაში ბილიკს, რომლითაც კვლავ შევძლებთ სარგებლობას, როცა ეს საჭირო გახდება. პარაგრაფში მოცემულია კითხვები თვითშეფასებისთვის და თავმოყრილია პარამეტრის შემცველ კვადრატულ განტოლებებსა და უტოლობებზე 40 სავარჯიშო. მომდევნო ტესტ 4 და ტესტ 5-ში აგრეთვე გვხვდება პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოები.

სავარჯიშოები ძირითადად მეორე ტიპისაა, და ამოხსნის მხოლოდ ანალიზურ მეთდს მოითხოვს, მაგალითად:

N12 a-ს რა მნიშვნელობისათვის არის

$(7-a)x^2+25x-ax=-40$ განტოლების ფესვები მოპირდაპირე?

ტესტი N5

N6 იპოვეთ k-ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$y=(k-2)x^2+4kx+6k-4$ პარაბოლას OX ღერძთან აქვს ერთადერთი საერთო წერტილი.

ა) $4+2\sqrt{3}$ ბ) $2-\sqrt{3}$ გ) $2\pm\sqrt{3}$ დ) $4\pm 2\sqrt{3}$.

ქართულ ენაზე მათემატიკის ბევრი დამხმარე სახელმძღვანელოა. პირობითად შეიძლება ისინი ორ ჯგუფად დაიყოს: სახელმძღვანელოები რომლებიც განკუთვნილია აბიტურიენტების მოსამზადებლად ერთიანი ეროვნული გამოცდებისათვის და ისინი, რომლებიც წინა წლებში იყო ძრითადი სახელმძღვანელოები. პირველი ჯგუფის თითეულ სახელმძღვანელოში აუცილებლად არის პარამეტრის შემცველი ამოცანები. მოცემულია სავარჯიშოები, რომლეთა ამოხსნისას ამოხსნის ანალიზურ და გრაფიკულ მეთოდები გამოიყენება. არის სახელმძღვანელოები, რომლებიც წლების მანძილზე ძირითდი იყო სასკოლო კურსისთვის.

პირველი ჯგუფის სახელმძღვანელოებია, მაგალითად:

„გავიმეოროთ მათემატიკა“ წიგნი აბიტურიენტებისთვის და მათემატიკის მასწავლებლებისთვის I ნაწილი, 2008 წელი - ავტორები: გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი.

„მათემატიკა“ ამოცანების კრებული IV გამოცემა ავტორები ა. გაგნიძე, დ. ლელაძე-გამომცემლობა უნივერსალი თბილისი 2006წ. -მოცემულ სახელმძღვანელოებში პარამეტრის შემცველ ამოცანებს ეთობა ცალკე პარაგრაფი.

„მათმატიკის ამოცანათ კრებული“ უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში საკონკურსო გამოცდებისათვის, 1976 წელი- მ.ი.სკანავის საერთო რედაქციით.

„მათემატიკის ამოცანათ კრებული“ (მეთდური მითითებებითა და ამოხსნებით) 1988 წელი - პროფესორ ლ. მძინარიშვილის რედაქციით.

მეორე ჯგუფის სახელმძღვანელოებია, მაგალითად:

„ალგებრის ამოცანათა კრებული“ VI-VIII კლასებისათვის, ოცდამესამე გამოცემა, თბილისი 1971წ- ავტორი პ.ლარიჩევი.

„ალგებრა“ VIII კლასის სახელმძღვანელო- ი. მაკარიჩევი, ნ. მინდიუკი და სხვა -გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი 1998წ.

„ალგებრა“ IX კლასის სახელმძღვანელო- ავტორები: ი. მაკარიჩევი, ნ. მინდიუკი და სხვა -გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი 1998წ.

„ალგებრა“ VII კლასის სახელმძღვანელო-ავტორები: გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი-2003წ. გამომცემლობა „ინტელექტი“.

„ალგებრა“ VIII კლასის სახელმძღვანელო-ავტორები: გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი-2003წ. გამომცემლობა „ინტელექტი“.

„ალგებრა“ IX კლასის სახელმძღვანელო-ავტორები: გ.გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი-2005წ. გამომცემლობა „ინტელექტი“.

„მათემატიკა“ VIII კლასის სახელმძღვანელო-ავტორები: ნ. ჯაფარიძე, მ. წილოსანი, ნ. წულაია 2007წ-გამომცემლობა „საქართველოს მაცნე“.

„მათემატიკა“ IX კლასის სახელმძღვანელო- ავტორები: ნ. ჯაფარიძე, მ. წილოსანი, ნ. წულაია, ი. კვიტაშვილი 2005წ-გამომცემლობა „საქართველოს მაცნე“.

პარამეტრის შემცველი სავარჯიშები გვხვდება გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილის ავტორობით გამოცემულ მე-7, მე-8 და მე-9 კლასის „მათემატიკის ამოცანათა კრებულებში“ -გამომცემლობა „ინტელექტი“, თბილისი, 2012წ.

2.4 კვლევის I I ეტაპი : საბაზო საფეხურის მათემატიკის მასწავლებლების გამოკითხვა

საინტერესო იყო იმ მათემატიკის მასწავლებლების აზრი პარამეტრის შემცველი წრფივი და კვადრატული განტოლებების, უტოლობების და მათი სისტემების სწავლებასთან დაკავშირებით, რომლებიც ასწავლიან საბაზო საფეხურზე. გადავწყვიტეთ არ გამოგვეკითხა მათემატიკის გაღრმავებული სწავლების სკოლის პედაგოგები, რადგან ჩვეულებრივი სკოლის მათემატიკის მასწავლებლებისაგან განსხვავებით მათ მეტი „თავისუფლება“ აქვთ, უფრო მეტი დრო აქვთ მოსწავლეებთან სამუშაოდ. მაგალითად შეგვიძლია მოვიყვანოთ აკადემიკოს ილია ვეკუას სახელობის ფიზიკა-მათემატიკის ქალაქ თბილისის N42 საჯარო სკოლის 2015-2016 სასწავლო წლის სასკოლო სასწავლო გეგმა (იხ. დანართი 5).

გამოკითხვა ჩატარდა ხელმისწავდომი შერჩევის და თოვლის გუნდის მეთოდის გამოყენებით.

მონაწილეები

სამუშაო სტაჟისაგან დამოუკიდებლად გამოკითხვაში მონაწილეობა მიიღო ჩვეულებრივი სკოლის საბაზო საფეხურის 135 მათემატიკის მასწავლებელმა. მათ შორის არც ერთი არ იყო მათემატიკის გაღრმავებული სწავლების სკოლიდან. 65 მასწავლებელი იყო თბილისის სკოლებიდან, ხოლო 70 სხვა რეგიონების სკოლებიდან. საბაზო საფეხურის გამოკითხული 135 მათემატიკის პედაგოგიდან ყველას ჰქონდა მიღებული უმაღლესი განათლება, აქედან 127 (94.1%) იყო მათემატიკოსი, ხოლო 8 (5,9%) სხვა სპეციალობის.

კვლევის პროცეურა

გამოკითხვა ნებაყოფლობითი და ანონიმური იყო. იმ შემთხვევაში თუ არ ახსოვდათ ჩვენთვის სასურველი რომელიმე ინფორმაცია ან არ ქონდათ სურვილი, მათ შეეძლოთ არ ეპასუხათ რომელიმე კითხვისთვის. კითხვარის ადმინისტრირება ხდებოდა ინდივიდუალურად, ვურიგებდით ხელით ან ვუგზავნიდით ელექტონული ფოსტით.

ინსტრუმენტი:

კვლევის ინსტრუმენტად გამოვიყენეთ ჩვენს მიერ შემუშავებული თვითადმინისტრირებადი კითხვარი. (2010-2011 წლებში გვქონდა საპილოტე კითხვარი, რომელმაც განიცადა ცვლილება). კითხვარი შედგება 15 კითხვისაგან, მათ შორის 7 დახურული კითხვაა, 4 ღია და 4 ნახევრად დახურული კითხვა.

კითხვარი შეიძლება დაიყოს შემდეგ ბლოკად:

- ბლოკი - დემოგრაფიული ინფორმაცია
- ბლოკი - ძირითადი და დამხმარე სახელმძღვანელოები (მასწავლებლებს უნდა დაესახელებინათ ის ძირითადი სახლემძღვანელოები რომლებითაც

ასწავლიან და ასწავლიდნენ მანამდე აგრეთვე ეპასუხათ, იყენებენ თუ არა დამხმარე სახელმძღვანელოებს და თუ იყენებდნენ, დაესახელებინათ ისინი (ხანგრძლივობის მითითებით)).

- ბლოკი - სწავლების მეთოდოლოგია (შედგებოდა 7 დახურული და 4 ნახევრად დახურული კითხვებისაგან, რომლებზეც უნდა გამეოხატათ თავიანთი მოსაზრებები).

კითხვარის ბოლოს მასწავლებლებს ვთხოვდით, გაეზიარებინათ საკუთარი მოსაზრებები და სურვილები პარამეტრის შემცველ განტოლებათა და უტოლობათა სწავლებასთნ დაკავშირებით. მიღებული ჩანაწერები დაჯგუფდა სამ ქვეთავად:

- კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ
- კომენტარები სწავლების შესახებ
- კომენტარები მეთოდური რეკომენდაციების შესახებ

მოხდა მათი, როგორც რაოდენობრივი ასევე თვისებრივი ანალიზი.

კითხვარის საბოლოო სახე ასე გამოიყურება:

ზოგადი ინფორმაცია

განათლება ______________________________

სპეციალობა ______________________________

ქალაქი/სოფელი (რაიონი) სადაც მუშაობთ

____

მუშაობის სტაჟი

ა) 0 დან –5 წლამდე ბ) 5 დან–10 წლამდე გ) 10 წელზე მეტზე

1) მათემატიკისა და ალგებრის რომელი სახელმძღვანელოებით გიმუშავიათ? (გთხოვთ ჩამოთვალოთ კლასების მითითებით)

- ____
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____

2) თითოეული სახელმძღვანელოთი მუშაობის ხანგრძლივობა (გთხოვთ დააზუსტოდ)

N	სახელმძღვანელო	ავტორი (ავტორები)	გამოშვების თარიღი	მუშაობის ხანგრძლივობა 3წ–მდე; 3წ–5წ–მდე; 5წ–10წ–მდე; 10წ–ზე მეტი

3) რომელი სახელმძღვანელოებით მუშაობთ ამჟამად?

- ____
- ____
- ____
- ____
- ____

4) თუ იყენებთ დამხმარე სახელმძღვანელოებს, მაშინ გთხოვთ მიუთითოთ

№	სახელმძღვანელო	ავტორი (ავტორები); თარიღი	გამოყენების ხანგრძლივობა

5) რომელ კლასში იწყებთ პარამეტრის შემცველი განტოლებების სწავლებას?

ა) V ბ) VI გ) VII დ) VIII ე) IX ვ) საერთოდ არ ვასწავლი

6) რომელ კლასში იწყებთ პარამეტრის შემცველი განტოლებათა სისტემების სწავლებას?

ა) V ბ) VI გ) VII დ) VIII ე) IX ვ) საერთოდ არ ვასწავლი

7) რომელ კლასში იწყებთ პარამეტრის შემცველი უტოლობების სწავლებას?

ა) V ბ) VI გ) VII დ) VIII ე) IX ვ) საერთოდ არ ვასწავლი

8) თქვენი აზრით საჭიროა თუ არა პარამეტრის შემცველი განტოლებების სწავლება?

ა)დიახ ბ)არა გ) მიჭირს პასუხის გაცემა

9) თქვენი აზრით საჭიროა თუ არა პარამეტრის შემცველი განტოლებათა სისტემების სწავლება?

ა)დიახ ბ)არა გ) მიჭირს პასუხის გაცემა

10) თქვენი აზრით საჭიროა თუ არა პარამეტრის შემცველი უტოლობების სწავლება?

ა)დიახ ბ)არა გ) მიჭირს პასუხის გაცემა

11) თქვენი აზრით, პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების სწავლება ხელს უწყობს შემდეგი უნარების განვითარებას? (გთხოვთ დაალაგოთ მნიშვნელობის მიხედვით თანმიმდევრულად 1,2,... და ა.შ.)

- კვლევითი უნარ–ჩვევების ——
- ლოგიკური აზროვნების ——
- ანალიზის უნარის ——
- შემოქმედებითი აზროვნების ——
- კრიტიკული აზროვნების უნარ–ჩვევების ——
- დედუქციური და ინდუქციური მსჯელობის უნარის ——
- ამოცანათა ამოხსნის სწორი სტრატეგიების მიგნების უნარის ---
- დახვეწილი მსჯელობის უნარის ——

- მიღებული დასკვნების ახსნისა და დასაბუთების უნარის —
- ამოცანათა ამოხსნის სტრატეგიების ვარგისიანობის დადგენის უნარის ——
- სხვა ____

12) **თქვენი აზრით, ამ თემასთან დაკავშირებით მოსწავლეებს სავარჯიშოების საკმარისი რაოდენობა მიეწოდებათ? (გთხოვთ დაასაბუთოთ თქვენი პოზიცია)**

ა) დიახ ——————————————————————————————

ბ) არა ——————————————————————————————

გ) მიჭირს პასუხის გაცემა ————————————————————

13) **როგორ ფიქრობთ პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების სწავლებასთან დაკავშირებით „მეთოდური ჯაჭვი“ „შეკრულია“?**

ა) დიახ ბ) არა გ) მიჭირს პასუხის გაცემა

14) **თქვენი აზრით, როგორ უწყობს ხელს პარამეტრის შემცველი განტოლებების სწავლება, მოსწავლეებში განტოლებების ღრმა და დეტალურ გააზრებას? (გთხოვთ დაალაგოთ მნიშვნელობის მიხედვით თანმიმდევრულად 1,2,... და ა.შ.)**

- ადვილად ადგენენ განტოლებების დასაშვებ მნიშვნელობათა არეს ——
- შესაძლებლობის მიხედვით, იყენებენ განტოლების ისეთ გარდაქმნებს, რომლებიც მიიყვანენ საწყისის ტოლფას განტოლებამდე ——
- აღარ ასრულებენ ისეთ გარდაქმნებს, რომლებიც იწვევენ განტოლების დასაშვებ მნიშვნელობათა არის შევიწროებას (ამონახსნის დაკარგვას) ——

- ადვილად ხვდებიან, რომელი გარდაქმნის შედეგად შეიძლება წარმოიშვას გარეშე ფესვი და ასრულებენ დამატებით შემოწმებას –––
- ადვილად გამორიცხავენ იმ ამონახსნებს, რომლებიც არ ეკუთვნიან დასაშვებ მნიშვნელობათა არეს –––
- სხვა ____

15) **თქვენი აზრით, როგორ უწყობს ხელს პარამეტრის შემცველი უტოლობების სწავლება, მოსწავლეებში უტოლობების ღრმა და დეტალურ გააზრებას?**

- ადვილად ადგენენ უტოლობის დასაშვებ მნიშვნელობათა არეს –––
- ცვლადი სიდიდეების დასაშვები მნიშვნელობებისათვის ადვილად ახდენენ უტოლობის სამართლიან რიცხვით უტოლობად გარდაქმნას –––
- ადვილად ადგენენ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეს –––
- ადვილად ხვდებიან, როდის არის აუცილებელი უტოლობის ამონახსნის გამოკვლევა (დასაშვებ მნიშვნელობათა არის შევიწროებისა და გაფართოების შემთხვევაში) –––
- სხვა––

  ____

გთხოვთ, გაგვიზიაროთ თქვენი მოსაზრებები და სურვილები პარამეტრის შემცველ განტოლებათა და უტოლობათა სწავლებასთან დაკავშირებით

____

____

____

____

გმადლობთ თანამშრომლობისათვის!

მონაცემთა ბაზის შექმნა და ანალიზი მოხდა სოციალური მეცნიერებისათვის მოწოდებული სტატისტიკური პაკეტის SPSS (ვერსია 21.0) გამოყენებით, დახურული კითხვების სიხშირეებისა და კროსტაბულაციების გზით. ღია კითხვებით მიღებული თვისებრივი მონაცემები დამუშავდა თემატური ანალიზის მეთოდით. კროსტაბულაციების დროს გამოყენებულ იქნა χ^2 სტატისტიკური კრიტერიუმი ($p<.05$) მიღებული შედეგები არ აღმოჩნდა სანდო.

2.5 პედაგოგების გამოკითხვის შედეგების აღწერა

გამოკითხვაში მონაწილეობა მიიღო 135 მათემატიკის მასწავლებელმა. 65 იყო თბილისის სკოლებიდან, ხოლო 70 სხვა რეგიონების სკოლებიდან(იხ.ცხრ.1).

ცხრილი 1

	რეგიონი	
	სიხშირე	პროცენტი
აჭარა	16	11.9
იმერეთი	24	17.8
კახეთი	7	5.2
შიდა ქართლი	9	6.7
სამცხე-ჯავახეთი	1	0.7
სამეგრელო	13	9.6
თბილისი	65	48.1
სულ	135	100.0

საბაზო საფეხურის გამოკითხული 135 მათემატიკის პედაგოგიდან ყველას ჰქონდა მიღებული უმაღლესი განათლება, აქედან 127 (94.1%) იყო მათემატიკოსი, ხოლო 8 (5,9%) სხვა სპეციალობის.

სამუშაო სტაჟის მიხედვით გამოკითხული პედაგოგების შემდეგნაირად გადანაწილდნენ (იხ.ცხრ.2):

ცხრილი 2

სტაჟი		
	სიხშირე	პროცენტი
0-დან 5წლამდე	8	5.9
5-დან 10 წლამდე	17	12.6
10 წელზე მეტი	110	81.5
სულ	135	100.0

პედაგოგებს ვთხოვეთ დაესახელებინათ სახელმძღვანელოები, რომლითაც ისინი ასწავლიდნენ. ყველაზე ხშიარად საბაზო საფეხურზე (121) გამოყენებულია გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილის მათემატიკის სახელმძღვანელო(იხ. ცხრ.3).

ცხრილი 3

ძირითადი სახელმძღვანელოები		
	სიხშირე	პროცენტი
გ.გოგიშვილი და სხვა	121	89.6
ნ.ჯაფარიძე და სხვა	27	20

რაც შეეხება დამხმარე სახელმძღვანელობის გამოყენებას, გამოკითხული მათემატიკის მასწავლებლების უმრავლესობა 125-დან 110 მასწავლებელი იყენებს მათ. დასახელებულ იქნა სახელმძღვანელოები, მაგალითად:

მათემატიკა I ნაწილი - ს. თოფურია, გ. აბესაძე, გ. ოზგებაშვილი, ვ. ხოჭოლავა, ზ. მეტრეველი, ნ. მაჭარაშვილის ავტორობით -გამომცემლობა „განათლება“- თბილისი 1991წ.

მათემატიკა პირველი ნაწილი ალგებრა და ანალიზის საწყისები (თეორია და ამოცანათა კრებული) - ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, ნ. მაჭარაშვილი, გ. აბესაძე, ზ. მეტრეველის ავტორობით - თბილისი 2006წ.

მათემატიკა პირველი ნაწილი - ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, ნ. მაჭარაშვილი, გ. აბესაძე, ზ. მეტრეველის ავტორობით -საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“- თბილისი 2008წ.

მათემატიკა აბიტურიენტებისათვის მესამე გამოცემა - ბ. ღვაბერიძე, ფ.დვალიშვილი, ა. მოსიძე, კ. გელაშვილი, გ. სირბილაძის ავტორობით - თბილისი 2008წ.

მათემატიკა საატესტატო და ეროვნული გამოცდებისათვის მეექვსე გამოცემა - ბ. ღვაბერიძე, ფ. დვალიშვილი, ა. მოსიძე, კ. გელაშვილი, გ. სირბილაძის -ავტორობით თბილისი 2014წ.

გავიმეოროთ მათემატიკა წიგნი აბიტურიენტებისთვის და მათემატიკის მასწავლებლებისთვის I ნაწილი, რედაქტორი თ. ვეფხვაძე - ავტორები: გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი. გამომცემლობა ინტელექტი თბილისი 2008წ.

მათემატიკის ამოცანათა კრებული უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში საკონკურსო გამოცდებისათვის - მ.ი. სკანავის საერთო რედაქციით თარგმანი მეორე შევსებული გამოცემიდან, გამომცემლობა ‘’განათლება’’ თბილისი-1976წ.

მათემატიკა ამოცანების კრებული IV გამოცემა - ა. გაგნიძის და დ. ლელაძის ავტორობით - გამომცემლობა „უნივერსალი" თბილისი 2006წ.

ზოგადი უნარები სავარჯიშოები და ტესტები აბიტურიენტებისა და მოსწავლეებისათვის II ნაწილი მომზადების სწრაფი კურსი -დ. გოშხეთელიანის, ს. კოსტავა, ი. ინანეიშვილის ავტორობით-თბილისი 2007წ.

დასახელდა ი. მაკარიჩევის და სხვა ავტორების ალგებრის მე-7, მე-8 და მე–9 კლასის სახელმძღვანელოები, რომლებიც ძრითდ გამოიყენებოდა 90-იან წლებში, თუმცა ახლა პედაგოგთა მნიშვნელოვანი რაოდენობა კვლავ იყენებს როგორც დამხმარე სახელმძღვანელოს.

ყველაზე ხშირად დასახელებული დამხმარე სახელმძღვანელოებია, მათემატიკა I ნაწილი - ს. თოფურია, გ. აბესაძე, გ. ოზგებაშვილი, ვ. ხოჭოლავა, ზ. მეტრეველი, ნ. მაჭარაშვილის ავტორობით -გამომცემლობა „განათლება"- თბილისი 1991წ და მათემატიკა აბიტურიენტებისათვის მესამე გამოცემა -ზ.ღვაბერიძე, ფ. დვალიშვილი, ა. მოსიძე, კ. გელაშვილი, გ. სირბილაძის ავტორობით -თბილისი 2008წ. (იხ.ცხრ.4)

ცხრილი 4

დამხმარე სახელმძღვანელოები		
	სიხშირე	პროცენტი
ს.თოფურია და სხვა	91	67.4
ზ.ღვაბერიძე და სხვა	59	43.7

ჩვენი კვლევის ინტერესის საგანის - პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლებასთან დაკავშრებით დასმულ კითხვაზე: თუ რომელ კლასში იწყებთ პარამეტრის შემცველი განტოლებების სწავლებას,პასუხების სიხშირე მოცემულია ცხრილში (იხ.ცხრ.5).

ცხრილი 5

რომელ კლასში იწყებთ პარამეტრის შემცველი განტოლებების სწავლებას?		
	სიხშირე	პროცენტი
V კლასი	8	5.9
VI კლასი	13	9.6
VII კლასი	41	30.4
VIII კლასი	44	32.6
IX კლასი	10	7.4
საერთო და არ ვასწავლი	12	8.9
სხვა კლასი დაასახელა	4	3.0
არ უპასუხა	3	2.2

გამოკითხვამ აჩვენა, რომ 41 გამოკითხული პედაგოგი (30.4%) იწყებს პარამეტრის შემცველი განტოლების სწავლებას VII კლასში, ე.ი. მაშინ როდესაც ეროვნული სასწავლო გეგმის თანახმად იწყება წრფივი განტოლების შესწავლა.

პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლებასთან დაკავშრებით დასმულ კითხვაზე: თუ რომელ კლასში იწყებთ პარამეტრის შემცველი განტოლებათა სისტემის სწავლებას, პასუხების სიხშირე მოცემულია ცხრილში (იხ.ცხრ.6).

ცხრილი 6

რომელ კლასში იწყებთ პარამეტრის შემცველი განტოლებათა სისტემების სწავლებას?		
	სიხშირე	პროცენტი
VII კლასი	13	9.6
VIII კლასი	75	55.6
IX კლასი	28	20.7
საერთოდ არ ვასწავლი	12	8.9
სხვა კლასი დაასახელა	3	2.2
არ უპასუხა	4	3

გამოკითხვამ აჩვენა, რომ 75 გამოკითხული პედაგოგი (55.6%) იწყებს პარამეტრის შემცველი განტოლების სწავლებას VIII კლასში, ე.ი. მაშინ როდესაც ეროვნული სასწავლო გეგმის თანახმად იწყება წრფივი განტოლებათა სისტემის შესწავლა.

პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლებასთან დაკავშრებით დასმულ კითხვაზე, თუ რომელ კლასში იწყებთ პარამეტრის შემცველი უტოლობების სწავლებას, სიხშირე მოცემულია ცხრილში (იხ.ცხრ.7).

ცხრილი 7

რომელ კლასში იწყებთ პარამეტრის შემცველი უტოლობების სწავლებას?		
	სიხშირე	პროცენტი
VI კლასი	1	0.7
VII კლასი	8	5.9
VIII კლასი	32	23.7
IXკლასი	73	54.1
საერთოდ არ ვასწავლი	13	9.6
სხვა კლასი დაასახელა	4	3
არ უპასუხა	4	3

გამოკითხვამ აჩვენა, რომ 32 გამოკითხული პედაგოგი (23.7%) იწყებს პარამეტრის შემცველი უტოლობის სწავლებას VIII კლასში, ე.ი. მაშინ როდესაც ეროვნული სასწავლო გეგმის თანახმად იწყება წრფივი უტოლობის შესწავლა.

ცხრილი 5, ცხრილი 6 და ცხრილი 7-ის გაანალიზებით, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ მიუხედავად იმისა, რომ მათ მიერ გამოყენებულ ძირითად სახემძღვანელოებში, თითოეულ კლასში მოცემულია პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოები, პედაგოგები მათ: 1. ან არ განიხილავენ, 2. ან ვერ აცნობიერებენ რომ პარამეტრის შემცველ სავარჯისოებთან აქვთ საქმე, 3. ან არ თვლიან საჭიროდ, რომ განტოლების, უტოლობის (სისტემის) სწავლებისას რიცხვით კოეფიციენტთან ერთად ასწავლონ ასოით კოეფიციენტიანი განტოლება, უტოლობა, (სისტემა).

პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლებასთან დაკავშრებით დასმულ კითხვაზე, საჭიროა თუ არა პარამეტრის შემცველი განტოლებების სწავლება,

პასუხების სიხშირე მოცემულია ცხრილში (იხ.ცხრ.8).

ცხრილი 8

თქვენი აზრით საჭიროა თუ არა პარამეტრის შემცველი განტოლებების სწავლება?		
	სიხშირე	პროცენტი
დიახ	118	87.4
არა	2	1.5
მიჭირს პასუხის გაცემა	12	8.9
არ უპასუხა	3	2.2

გამოკითხვამ აჩვენა, რომ 118 გამოკითხული პედაგოგი (87.4%) საჭიროდ თვლის პარამეტრის შემცველი განტოლებების სწავლებას.

პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლებასთან დაკავშრებით დასმულ კითხვაზე, საჭიროა თუ არა პარამეტრის შემცველი განტოლებათა სისტემების სწავლება, პასუხების სიხშირე მოცემულია ცხრილში (იხ.ცხრ.9).

ცხრილი 9

თქვენი აზრით საჭიროა თუ არა პარამეტრის შემცველი განტოლებათა სისტემების სწავლება?		
	სიხშირე	პროცენტი
დიახ	110	81.5
არა	5	3.7
მიჭირს პასუხის გაცემა	16	11.9
არ უპასუხა	4	3

გამოკითხვამ აჩვენა, რომ 110 გამოკითხული პედაგოგი (85.1%) საჭიროდ თვლის პარამეტრის შემცველი განტოლებების სწავლებას.

პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლებასთან დაკავშრებით დასმულ კითხვაზე, საჭიროა თუ არა პარამეტრის შემცველი უტოლობების სწავლება, პასუხების სიხშირე მოცემულია ცხრილში (იხ.ცხრ.10).

ცხრილი 10

თქვენი აზრით საჭიროა თუ არა პარამეტრის შემცველი უტოლობების სწავლება?		
	სიხშირე	პროცენტი
დიახ	106	78.5

არა	7	5.2
მიჭირს პასუხის გაცემა	19	14.1
არ უპასუხა	3	2.2

გამოკითხვამ აჩვენა, რომ 106 გამოკითხული პედაგოგი (78.5%) საჭიროდ თვლის პარამეტრის შემცველი განტოლებების სწავლებას.

ცხრილი 8, ცხრილი 9 და ცხრილი 10 შედეგებიდან, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ პედაგოგები საჭიროდ მიიჩნევენ პარამეტრის შემცველი განტოლების, უტოლობის, სისტემის სწავლებას. ხოლო წინა სამი ცხრილის შედეგებიდან გამოთქმული მესამე ვარაუდი ბათილდება.

პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლებასთან დაკავშირებით დასმულ კითხვაზე, პარამეტრის თემასთან დაკავშირებული სავარჯიშები მოსწავლეებს საკმარისი რაოდენობით მიეწოდებათ? პასუხების სიხშირე მოცემულია ცხრილში (იხ.ცხრ.11).

ცხრილი 11

თქვენი აზრით, ამ თემასთან დაკავშირებით მოსწავლეებს სავარჯიშოების საკმარისი რაოდენობა მიეწოდებათ? (გთხოვთ დაასაბუთოთ თქვენი პოზიცია)		
	სიხშირე	პროცენტი
დიახ	19	14.1
არა	91	67.4
მიჭირს პასუხის გაცემა	20	14.8
არ უპასუხა	5	3.7

გამოკითხვამ აჩვენა, რომ კვლევაში მონაწილე 91 პედაგოგი (67.4%) თვლის რომ პარამეტრთან დაკავშირებული სავარჯიშოების რაოდენობა, არ არის საკმარისი.

121 პედაგოგიდან, რომლებიც გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილის ავტორობით გამოცემული სახელმძღვანელოთი მუშაობენ

86 პედაგოგი (71%) თვლის, რომ არასაკმარისი რაოდენობით მიეწოდებათ მოსწავლეებს პარამეტრთან დაკავშრებული სავარჯიშოები.

ხოლო პედაგოგოგოები, რომლებიც ნ. ჯაფარიძე, ნ. წილოსანი, ნ. წულაია ავტორობით არსებული სახლემძღვანელოთი მუშაობს 27 პედაგოგი (23.85%).

ამავე კითხვაზე პასუხის სიხშირე სამუშაო სტაჟის მიხედვით იხილეთ ცხრილ 12-ში.

ცხრილი 12

	დიახ	არა	მიჭირს პასუხის გაცემა
0-დან 5წლამდე	1	3	3
5-დან 10 წლამდე	2	13	2
10 წელზე მეტი	16	75	15

10 წელზე მეტი სამუშაო სტაჟის და გამოცდილების მქონე გამოკითხული პედაგოგებიდან 75 თვლის, რომ პარამეტრთან დაკავშირებული სავარჯიშოების რაოდენობა არ არის საკმარისი, ხოლო 15 უჭირს პასუხის გაცემა.

ვთვლით, რომ საგნის პედაგოგმა სავარჯიშოების რაოდენობა თავად უნდა „აკონტროლოს“ და იმ შემთხვევაში, როცა პირადი გამოცდილებით თვლის, რომ ძირითდ სახელმძღვანელოებში მათი რაოდენობა, ან შინაარსი არ არის საკმარისი მოცემული თემის გააზრებისთვის, უნდა გამოიყენოს დამხმარე სახელმძღვანელოებიდან ამოკრეფილი სავარჯიშებიც. ამიტომ თუ არ მიეწოდება საკმარისი რაოდენობით, აქ ცალსახად ძირითადი სახელმძღვანელოების შინაარს ვერ დავადანაშაულებთ.

ამავე კითხვაში პედაგოგებს ვთხოვეთ დაესაბუთებინათ არჩეული პასუხი. პასუხების გარჩევამ გვიჩვენა, რომ ძირითადად მოცემულია არა დასაბუთება არამედ შენიშვნები და სურვილები, მაგალითად: „არ არის საკმარისი რაოდენობა სავარჯიშოების“, „არ არის საკმარისი საათების რაოდენობა“, „სავარჯიშოები გაფანტულია“.

გამოკითხვაში მონაწილე პედაგოგებიდან, რომლებიც თვლიან, რომ საკმარისი რაოდენობითაა მოცემული სავარჯიშოები, ამას ასაბუთებენ მსგავსი სავარჯიშოების მათ მიერ გამოყენებულ დამხმარე სახელმძღვანელოებში არსებობით, რომლებსაც ისინი აგრეთვე განიხილავენ მოსწავლეებთან გაკვეთლებზე. როგორც ვხედავთ ასეთ პედაგოგების რიცხვი ძალიან მცირეა.

გამოკითხული პედაგოგები გამოთქვავენ სურვილს, რომ მოცემული იყოს თემასთან დაკავშირებული მეტი სავარჯიშო, დაეთმოს მეტი დრო, პარამეტრი გამოყოფილი იყოს ცალკე თავად.

პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლებასთან დაკავშრებით დასმულ კითხვაზე, როგორ ფიქრობთ, პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების სწავლებასთან დაკავშირებული „მეთოდური ჯაჭვი“ „შეკრულია“? სიხშირე იხილეთ ცხრილ13-ში.

ცხრილი 13

როგორ ფიქრობთ, პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების სწავლებასთან დაკავშირებით „მეთოდური ჯაჭვი“ „შეკრულია“?		
	სიხშირე	პროცენტი
დიახ	21	15.6
არა	68	50.4
მიჭირს პასუხის გაცემა	40	29.6
არ უპასუხა	6	4.4

გამოკითხვამ აჩვენა, რომ 68 გამოკითხული პედაგოგი(50.4%) თვლის, რომ პარამეტრის შემცველ განტოლებათა და უტოლობათა სწავლებასთან დაკავშირებული „მეთოდური ჯაჭვი“ არ არის „შეკრული“ და ყურადსაღებია ის 29.6% ვისაც უჭირს პასუხის გაცემა.

ამავე კითხვაზე პასუხის სიხშირე სამუშაო სტაჟის მიხედვით იხილეთ ცხრილ14-ში.

ცხრილი 14

	დიახ	არა	მიჭირს პასუხის გაცემა
0-დან 5 წლამდე	0	3	3
5-დან 10 წლამდე	4	10	3
10 წელზე მეტი	17	55	34

გამოკითხვამ აჩვენა, რომ 129 პედაგოგიდან, რომლებმაც უპასუხეს მოცემულ შეკითხვას 10 წელზე მეტი სამუშაო სტაჟის მქონე მათემატიკის მასწავლებლებიდან 55 თვლის, რომ არ არის შეკრული მეთოდური ჯაჭვი, ხოლო 34-ს უჭირს პასუხის გაცემა. ვთვლით, რომ პედაგოგის პროფესიაში სტაჟი განაპირობებს გამოცდილებას, ამიტომ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ „მიჭირს პასუხის გაცემა“ ისევე როგორც პასუხის არ გაცემა ნიშნავს, ამ ამოცანების სწავლებაში გაუწაფაობას, რადგან თუ პედაგოგი ასწავლის ასეთ ამოცანებს, განიხილავს ამ საკითხთან დაკავშირებით სავარჯიშოებს და ამის შედეგად იღებს გარკვეულ შედეგებს, მაშინ მას ჩამოყალიბებული უნდა ჰქონდეს საკუთარი აზრიც საკითხის სწავლებასთან დაკავშირებულ პრობლემებზე და აღარ უნდა უჭირდეს პასუხის გაცემა და არც პასუხს არ უნდა არიდებდეს თავს.

კითხვარის ბოლოს ვთხოვეთ პედაგოგებს გაეზიარებინათ მოსაზრებები და სურვილები პარამეტრის შემცველ განტოლებათა და უტოლობათა სწავლებასთან დაკავშირებით.

გამოკითხული 135 პედაგოგიდან არ შეავსო და ღიად დატოვა ველი 35-მა (25,9%), ხოლო დანარჩენი 100 მოსაზრება და სურვილი დავაჯგუფეთ თემებად:

- კომენტარები სავარჯიშების შესახებ
- კომენტარები სწავლების შესახებ
- კომენტარები მეთოდური რეკომენდაციების შესახებ

მსგავსი კომენტარები გავაერთიანეთ ქვეთემებში და ჩავატარეთ პასუხების რაოდენობრივი ანალიზი.(იხ.ცხრ.15)

ცხრილი 15

კომენტარები			კომენტარების რაოდენობა
1	სავარჯიშების შესახებ	სახელმძღვანელოებში მცირე რაოდენობითაა სავარჯიშოები, ხდება წყვეტა, დასამატებელია სავარჯიშოთა სხვა ტიპებიც	46
		სახელმძღვანელოებში საკმარისი რაოდენობითაა სავარჯიშოები	4
2	სწავლების შესახებ	მცირე დრო ეთმობა გაკვეთილებზე	11
		რომელ კლასშია უკეთესი მათი სწავლების დაწყება	10
		პარამეტრი უნდა იყოს გამოყოფილი ცალკე თავად	9
		რომელი უნარ ჩვევების განვითარებას უწყობს ხელს პარამეტრის შემცველი ამოცანები	8

		რთულია მოსწავლეებისათვის, უჭირთ მათი სწავლა	10
		არ ვასწავლი	1
		არ გამაჩნია მოსაზრება	1
3	მეთოდური რეკომენდაციების შესახებ	არ არის მეთოდური რეკომენდაციები, საჭიროა მეთოდური სახელმძღვანელო	7

მცირე რაოდენობით იყო ისეთი კომენტარები სადაც, მაგალითად ერთდროულად აღნიშნავდნენ, რომ ძირითად სახელმძღვანელოებში „არ არის საკმარისი რაოდენობის სავარჯიშოები“ და „ეთმობა მცირე დრო“, ან „რთულია მოსწავლეებისათვის პარამეტრის შემცველი ამოცანები“, მაგრამ „საჭიროა მათი სწავლება“, რადგან „ანვითარებს კრიტიკულ აზროვნებას“.

სავარჯიშების „საკმარისობა“ – „არ საკმარისობა“ პედაგოგის სუბიექტურ გამოცდილებაზეა დამოკიდებული, აგრეთვე რამდენად იაზრებს პედაგოგი საკითხის მნიშვნელობას და სირთულეს, იმის მიხედვით ანაწილებს და უთმობს სასწავლო დროს.

საჭიროდ არ მიგვაჩნია, რომ სახელმძღვანელოებში ცალკე თავი დაეთმოს პარამეტრის შემცველ ამოცანებს. რადგან მაშინ, ასეთი თავების გამოყოფა დაგვჭირდება ყველა სახის განტოლებათა და უტოლობათა სწავლებისას, რაც ჩვენი აზრით ზედმეტია თავად ამ ამოცანათა სპეციფიკიდან გამომდინარე.

კითხვაზე, თუ რომელ კლასშია უკეთესი პარამეტრის სწავლება. დასახელებლი იყო შემდეგი კლასები:

„მე-8 კლასიდან და ზევით“- 1კომენტარი

„მაღალ კლასებში“, პედაგოგებს ვკითხეთ და იგულისხმებოდა სწავლების საშუალო საფეხური -3 კომენტარი

„კარგია ისწავლებოდეს მე-9 კლასში“-2 კომენტარი

„დაწყებით კლასებში სასურველია მცირე დოზებით ისწავლებოდეს, ხოლო მეტი დოზებით"- 1 კომენტარი

„ სასურველია ისწავლებოდეს მე-7 კლასიდან" -1 კომენტარი

კარგი იქნებოდა სწავლების დაწყება მე-5 კლასიდან - 2 კომენტარი

ამ მონაცემების საფუძველზე შეიძლება გამოითქვას შემდეგი მოსაზრება:

წრფივი განტოლება ეროვნული სასწავლო გეგმით პირველად გვხვდება მე-7 კლასში, საბაზო საფეხურზე, შესაბამისად მათემატიკის სამივე გრიფირებულ სახელმძღვანელოშიც, ამიტომ მათი სწავლების დაწყებას დაწყებით საფეხურზე ვერ მოვახერხებთ. აგრეთვე განტოლებათა და უტოლობათა სწავლებისას ყოველ ეტაპზე, კონკრეტული სახის განტოლების თუ უტოლობის სწავლების, დროს უნდა ვასწავლოთ მოსწავლეებს შესაბამისი პარამეტრული განტოლებების და უტოლობების ამოხსნა. სულ მცირე ამის აუცილებლობა განპირობებულია იმ ფაქტორით, რომ განტოლებათა და უტოლობათა შესახებ თეორიის ახსნას ვიწყებთ პარამეტრის საშუალებით. საბაზო საფეხურიდან საშუალო საფეხურზე ამ თემის სწავლების გადადებით ირღვევა სწავლების თანმიმდევრობა და პრინციპი მარტივიდან რთულისაკენ, რის შედეგადაც ჩვენი აზრით მოსწავლეებს ხელოვნურად შევუქმნით ფსიქოლოგიურ ბარიერს პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის წინაშე. დაუშვებლად მიგვაჩნია, ის რომ, მაგალითად, არ ვასწავლოთ შედარებით მარტივი, პარამეტრის შემცველი წრფივი და კვადრატული განტოლებები და ვასწავლოთ, მაგალითად პარამეტრის შემცველი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა, რომელიც თავის ამოხსნის პროცესში ეყრდნობა და იყენებს წრფივი და კვადრატული განტოლების ამოხსნის ეტაპებს.

რაც შეეხება სირთულეს, ამასთან დაკავშრებით ვთვლით, რომ სავარჯიშო მარტივია თუ რთული ამომხსნელისათვის, ეს მხოლოდ მის სუბიექტურ გამოცდიელბაზეა დამოკიდებული. ის რის ამოხსნაშიც არ ვარ გაწაფული,

რა თქმა უნდა რთულია. ამიტომ აუცილებელია პარამეტრის შემცველი სავარჯიშების განხილვა გაკვეთილებზე.

გამოკითხვის შედეგებიდან ჩანს, რომ გამოკითხული 135 მათემატიკის მასწავლებლიდან უმეტესობა თვლის, რომ საჭიროა პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების სწავლება.

მე-7 კლასიდან დაწყებული ყველა ძირითად სახელმძღვანელოებში გვხვდება პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოები. იმ შემთხვევაში , თუ პედგოგები თვლიან, რომ მათი შინაარსი არ იძლევა საკითხის გააზრებულად სწავლების საშუალებას, დამხმარე სახელმძღვანელოებში (მათ შორის იმ სახლემძღვანელოებში, რომლებიც თავად პედაგოგებმა დაასახელეს) დიდი რაოდენობითაა შესაძლებელი ჩვენი ამოცანათა კლასიფიკაციის მიხედვით შესაბამისი სავარჯიშოების მოძიება, ამოხსნის ორივე მეთოდთან დაკავშირებით (როგორც ამოხსნის ანალიზური მეთოდის აგრეთვე გრაფიკული მეთოდის გამო მხოლოდ მესამედი იწყებს პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლებას (წრფივ განტოლებებს). ყურადსაღებია, რომ გამოკითხულ პედაგოგთა მხოლოდ 15,6% ფიქრობს, რომ პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების სწავლებასთან დაკავშირებით „მეთოდური ჯაჭვი" „შეკრულია", 34% ან თავს არიდებს პასუხს ამ კითხვას ან უჭირს პასუხის გაცემა. მოცემული შედეგებიდან შეიძლება ვივარაუდოდ, რომ იკვეთება ტენდენცია: მათემატიკის მასწავლებლებს პარამეტრის შემცველ ამოცანების სწავლებასთან დაკავშრებით არ აქვთ ჩამოყალიბებული აზრი და სწავლების შინაარსობრივ-მეთოდური ხაზი.

პედაგოგთა გამოკითხვიდან ჩანს, რომ მათი უმრავლესობა საჭიროდ მიიჩნევს პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების სწავლებას მათემატიკის სასკოლო კურსში, სახელმძღვანელოების

გამდიდრებას ასეთი სავარჯიშოებით და სპეციალური მეთოდური ლიტერატურის შექმნას, საკითხის უკეთ გააზრებასა და სწავლებისათვის.

2.6 ინტერვიუ მასწავლებელთა სახლის მოქმედ და ყოფილ ტრენერებთან

ჩატარდა ნახევრად სტრუქტურირებული ინტერვიუ მათემატიკის საბაზო საფეხურის ყოფილ და მოქმედ ტრენერებთან. ყოფილ ტრენერთან შედგა ინტერვიუ პირისპირ, ხოლო მოქმედ ტრენერთან სატელეფონო ინტერვიუ.

რადგანაც მასწავლებლის საგნის გამოცდებზე პედაგოგებს ხვდებათ პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოები და მათ პირადი მოტივაციაც აქვთ ამ საკითხის უკეთ გააზრებისთვის, აგრეთვე ზოგადი ტენდენციის დასანახად, საჭიროდ ჩავთვალეთ მასწავლებელთა სახლის საბაზო საფეხურის ტრენერებთან გასაუბრება.

თვისებრივი კვლევის ფარგლებში ჩატარებული ინტევიუებში გამოიყო შემდეგი საკითხები:

- პარამეტრის შემცველი ამოცანების განხილვა ტრენერის მხრიდან
- პედაგოგების მოთხოვნა პარამეტრის შემცველი ამოცანების განხილვის შესახებ

მათემატიკის საბაზო საფეხურის ერთ ყოფილ და ერთ მოქმედ ტრენერთან ნახევრადსტურქტურირებული ინტერვიუს დროს, ჩვენთვის საინტერესო საკითხების დასადგენად, დავსვით შემდეგი კითხვები:

1. განიხილავთ (განიხილავდით) თუ არა მასწავლებელთა ტრენინგებზე პარამეტრის შემცველ ამოცანებს (განტოლებებს, უტოლობებს და მათ სისტემებს)?

ყველა ტრენერისაგან მივიღეთ დადებითი პასუხი, და აგრეთვე ორივე ტრენერმა გააკეთა კომენტარი, რომ მასწავლებელთა სასერთიფიკაციო

გამოცდების პროგრამის შინაარსით გათვალისწინებულიცაა პარამეტრის შემცველი ამოცანების სწავლება.

2. ითხოვენ (ითხოვდნენ) თუ არა თავისი სურვილით პედაგოგები პარამეტრის შემცველი ამოცანების დამატებით განხილვას ტრენინგებზე?

ყოფილმა ტრენერმა, აღნიშნა, რომ მათემატიკის მასწავლებლები სისტემატიურად ინტერესდებოდნენ ალბათობის თეორიითა და პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოებით. თვითონაც მოჰქონდათ პარამეტრის შემცველი ამოცანები და ითხოვდნენ ერთობლივად მათი ამოხსნის გარჩევას.

მოქმედმა ტრენერმა აღნიშნა, რომ პარამეტრის შემცველ ამოცანებს იხილავენ ტრენინგებზე, თუმცა უფრო მეტი დაინტერესება იკვეთება სტერეომეტრიული ამოცანების მიმართ, ვიდრე პარამეტრის შემცველი ამოცანების მიმართ. პედაგოგები საკუთარი ინიციატივით არ ითხოვენ პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოების განხილვას ტრენინგებზე.

ტრენერების პასუხების საფუძველზე ჩნდება კითხვები: იქნებ მათემატიკის მასწავლებლებს წინა წლებში უფრო უჭირდათ პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნა და ამიტომ უფრო მეტი დაინტერესება იყო ამ საკითხთან მიმართებაში, ხოლო ეხლა ნაკლები დაინტერესება შეიძლება განპირობებული იყოს საკითხის უკეთ ფლობით? ან იქნებ წინა წლებში საქართველოში მოქმედ გრიფირებულ სახელმძღვანელოებში უფრო მეტი რაოდენობით გვხვდებოდა პარამეტრის შემცველი ამოცანები და მათემატიკის მასწავლებლებს უფრო ხშირად უწევდათ მათი განხილვა გაკვეთილებზე, ხოლო ბოლო წლებში მათმა რაოდენობამ და სირთულემაც დაიკლო, ამიტომ ნაკლები დრო ეთმობა მათ სწავლებასაც? ან იქნებ თავს არიდებენ გაკვეთლებზე მათ განხილვას? ამ კითხვების პასუხები სულ სხვა კვლევის საკითხებია.

ტრენერებთან ჩატარებული ინტერვიუს საფუძველზე შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ წლების განმავლობაში მასწავლებელთა სახლში მათემატიკის მასწავლებლების საგნის ტრენინგებზე სისტემატიურად განიხილავენ პარამეტრის შემცველ ამოცანებს.

დასკვნები და რეკომენდაციები

დასკვნები

VII-IX კლასის მათემატიკის გრიფირებულ კონკურენტ სახელმძღვანელოებში პარამეტრის შემცველი წრფივი და კვადრატული განტოლებებისა და უტოლობების (აგრეთვე მათი სისტემების) ანალიზი გვიჩვენებს, რომ არცერთ განხილულ სახელმძღვანელოში არ მოიცემა „პარამეტრიანი განტოლების“ და „პარამეტრიანი უტოლობის“ განმარტება. განხილულ სასკოლო სახელმძღვაენლოებში, სადაც მოსწავლეები ეცნობიან განტოლებებისა და უტოლობების ყველაზე მარტივ კლასებს, ზოგ ავტორთა ჯგუფის სახელმძღვანელოში არ არის მოცემული ტერმინი "პარამეტრი", ხოლო ზოგიერთ ავტორთა ჯგუფის სახელმძღვანელოში არათნმიმდევრულია მისი ხსენება. შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ ერთერთი მიზეზი, რის გამოც პარამეტრის შემცველი ამოცანები ითვლება რთულად, დაკავშრებულია მათ ამოცნობასთან. სკოლის საატესტატო გამოცდების მატემატიკის დავალებებში და აგრეთვე ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე გამოყენებულ მათემატიკის ტესტებში მოსწავლეებსა და აბიტურიენტებს ამოსახსნელ ამოცანებში ხვდებათ ტერმინი "პარამეტრი". სავარჯიშოს ამოხსნისას თავდაპირველად ხდება მოცემულობის გააზრება, თემის ამოცნობა პირველ რიგში ტერმინის მიხედვით და როცა ეს

ამოცნობა ვერ ხერხდება, ასეთი ამოცანა გადადის კოგნიტურ სქემაში „არ ვიცი".

პარამეტრის შემცველი წრფივი და კვადრატული განტოლებებისა და უტოლობების (აგრეთვე სისტემების) ამოხსნის სირთულე მოსწავლეებისათვის შეიძლება დაკავშირებული იყოს (მიუხედავად იმისა, თუ რომელი ავტორთა ჯგუფის სახელმძღვანელოთი ისწავლიან) აგრეთვე საკითხის შინაარსობრივ- მეთოდური ხაზის გაუმართაობასთან. სამივე ავტორთან გვხვდება პარამეტრის შემცველი მეორე ტიპის სავარჯიშოები, რომელთა ამოხსნაც მოსწავლეებში ხელს შეუწყობს პარამეტრის ორმგი ბუნების გააზრებას, თუმცა ფაქტიურად არ არის გამოყენებული ისეთი სავარჯიშები, რომლებიც ამოხსნის გრაფიკულ მეთოდს მოითხოვენ და ხაზს გაუსვავენ იმ სიტუაციებს, როცა ეს მეთდი უპირატესია ამოხსნის პროცესში. თითქმის არ გვხვდება სავარჯიშები, რომლებიც პირობით (ჩვენი კლასიფიკაციის მიხედვით) მესამე ტიპს განეკუთვნებიან. სადაც ამოხსნა განშტოვდება და პასუხი შედგება განშტოებების პასუხების ნაკრებისაგან, აგრეთვე მათი ამოხსნის შემდეგ მოწაფეებს მოუხდებოდათ პასუხის „წაკითხვა".

ძრითადი (გრიფირებული) სახელმძღვანელოების ანალიზიდან გამომდინარე, ვერ მოხდა საკითხის სწავლებასთნ დაკავშირებული ერთიანი სისტემის დანახვა, დაწყებული ცნების არ განმარტვიდან ან არათანმიმდევრულად გამოყენებიდან, საკითხის სწავლების მეთოდების არ გამოყენებიდან. დასტურდება ჰიპოთეზა, რომ სახელმძღვანელოებში საკითხის სწავლების სისტემატიურობის და თანმიმდევრობის პრინციპი დარღვეულია.

მიუხედავად იმისა, რომ ქართული სახელმწიფოს საგანმანათლებლო სისტემაში არის დაკვეთა პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების სწავლებაზე, ძირითადი სახელმძღვანელოების

ანალიზიდან და პედაგოგების გამოკითხვის შედეგებიდან, აგრეთვე მასწავლებელთა სახლის მოქმედ და ყოფილ ტრენერებთან ინტერვიუს ანალიზიდან გამომდინარე გვრჩება შთაბეჭდილება, რომ საკითხის სწავების მნიშვნელობა არ არის გააზრებული და სწავლება მხოლოდ საბჭოთა დროიდან შემორჩენილი ინერციით მიმდინარეობს.

რეკომენდაციები

იმისათვის, რომ მათემატიკის მასწავლებლებს ჰქონდეთ პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის გამოცდილება, მათ საკუთარი გამოცდილებით უხდებათ პობლემასთან გამკლავება. ქართულ ენაზე კონკრეტული თანამედროვე მეთოდური ლიტერატურის არ ქონის გამო, განსაკუთრებით დამწყებ პედაგოგებს მოუწევთ მეთოდური ლიტერატურის, მაგალითად რუსულ და ინგლისურ ენებზე მოძიება.

არ არის აუცილებელი სკოლის პროგრამა "გადავტვირთოთ" რთული ამოცანებით, თუმცა თუ გადავწყვიტავთ, რომ კონკრეტული საკითხი ვასწავლოთ მოსწავლეებს, მაშინ აუცილებლად უნდა ვიზრუნოთ შინაარსობრივ-მეთდური ჯაჭვის გამართვაზე. აგრეთვე აუცილებელია განსაკუთრებით დამწყები პედაგოგებისათვის რაც შეიძლება მეტი, ხელმისაწვდომი დამხმარე-მეთოდური ლიტერატურა არსებობდეს მშობლიურ ენაზე. "ვაკუუმის ამოვსება" შესაძლებელია დამხმარე სახელმძღვანელოებში მოცემული სავარჯიშოებით, თუმცა გამოკითხული პედაგოგების პასუხებიდან იკვეთება ტენდენცია, რომ 10-წელზე მეტი სამუშაო სტაჟისა და გამოცდილების მასწავლებლებიც კი ძრითადად ვერ ასრულებენ საკითხის სწავლებასთან დაკავშირებით „მისიას“.

ჩატარებული კვლევის საფუძველზე გაკეთებული ანალიზიდან აუცილებლად მიგვაჩნია მშობლიურ, ქართულ ენაზე პარამეტრთან დაკავშრებლი დამხმარე-მეთოდურ სახელმძღვანელოების შექმნა. ვთვლით, რომ, თუ პედაგოგი გაიწაფება საკითხის სწავლებაში, მაშინ ეს საკითხი დაძლეული იქნება მისი მოსწავლეების მიერაც.

საქართველოს საგანმანათლებლო სივრცეში, აქამდე არ მომხდარა მათემატიკის სასკოლო კურსის ერთერთი მნიშვნელოვანი და გამოყენებადი საკითხების განტოლებებისა და უტოლობების (აგრეთვე მათი სისტემების) ყველაზე მარტივი წრფივისა და კვადრატულის პრამეტრული სახეების სწავლებასთან დაკავშირებული პრობლემების გამოვლენა- გაანალიზება. მოცემული კვლევა განხილული უნდა იყოს როგორც პირველი მცდელობა.

კვლევის მიღებული შედეგების გათვალისწინება შეუძლიათ მათმატიკის მასწავლებლებს, სახელმძღვანელოების ავტორებს და მათემატიკის ტრენერებს.

ვინაიდან განტოლებათა და უტოლობათა კლსები მათემატიკის სასკოლო კურსში არ შემოიფარგლება მხოლოდ წრფივი და კვადრატული სახეებით, ამიტომ ჩვენს მიერ გამოყენებული მიდგომებით შესაძლებელია პარამეტრის შემცველი განტოლებათა და უტოლობათა სხვა კლსების სწავლებასთან დაკავშირებული პრობლემების დადგენა.

შესაბამისად აუცილებლად მიგვაჩნია შემდგომი კვლევა საშუალო საფეხურზე პარამეტრის შემცველი განტოლებებისა და უტოლობების (აგრეთვე მათი სისტემების) სწავლებასთნ დაკავშირებული პრობლემების გამოსავლენად.

ქართულ ენაზე დამხმარე მეთოდური ლიტერატურის სიმწირის გამო, პირადი გამოცდილებიდან გამომდინარე, წინამდებარე თავში

თავმოყრილია პარამეტრის შემცველ წრფივ და კვადრატულ განტოლებათა და უტოლობათა შესახებ თეორიული ბაზა, შესაბამისი საინტერესო საილუსტრაციო მაგალითებით, რომლის გამოყენება შეუძლიათ როგორც მათემატიკის პედაგოგებს, ასევე ტრენერებს.

საილუსტრაციო მასალა პრაქტიკული გამოყენებისათვის

განტოლება

ერთი, ან რამდენიმე ცვლადის შემცველ ტოლობას განტოლება ეწოდება.

იმის მიხედვით, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს განტოლება, იგი შეიძლება იყოს ერთცვლადიანი, ორცვლადიანი და ა.შ.

ერთცვლადიანი განტოლების ამონახსნი (ფესვი) ეწოდება ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომელიც განტოლებას ჭეშმარიტ ტოლობად აქცევს; თუ განტოლება ორ ცვლადს შეიცავს, მაშინ მისი ამონახსნი ეწოდება ცვლადების მნიშვნელობათა დალაგებულ წყვილს, მაგალითად $(x;\ y)$ წყვილს, რომელიც განსხვავდება $(y;\ x)$ წყვილისაგან. n ცვლადიანი განტოლების ამონახსნი დალაგებული n-ეულია: $(x_1;\ x_2;\ldots;\ x_n)$.

განტოლების ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. ეს სიმრავლე შეიძლება იყოს როგორც სასრული (ცარიელიც), ასევე უსასრულო.

განტოლების ამოხსნა ნიშნავს, მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას.

ერთი და იმავე ცვლადების შემცველ განტოლებებს ეწოდება ტოლფასი ან ევივალენტური, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ემთხვევა. ცხადია,

ტოლფასად ითვლებიან ის განტოლებებიც, რომელთაც არ აქვთ ფესვები - მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ცარიელია.

განტოლებათა ეკვივალენტობას ახასიათებს სიმეტრიულობის თვისება: თუ ერთი განტოლება ეკვივალენტურია მეორის, მაშინ მეორეც ეკვივალენტურია პირველის.

ეკვივალენტურ განტოლებებს ახასიათებთ ტრანზიტულობის თვისებაც: თუ ერთი განტოლება ეკვივალენტურია მეორის, ხოლო მეორე თავის მხრივ ეკვივალენტურია მესამის, მაშინ პირველი განტოლება ეკვივალენტურია მესამის.

განტოლებათა ამოხსნა, მათი ტოლფასი (ეკვივალენტური) განტოლებებით შეცვლის პროცესია.

განტოლებათა ეკვივალენტობის თვისებები უფლებას გვაძლევენ ჩავატაროთ მათზე გარდაქმნები, რომლებზეც დამყარებულია მათი ამოხსნის მეთოდები.

განტოლების ამოხსნის პროცესში მიზანშეწონილია შევცვალოთ იგი მისი ტოლფასი განტოლებით, რისთვისაც ვსარგებლობთ განტოლებათა შემდეგი თვისებებით:

1. თუ განტოლების ორივე მხარეს დავუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, ან გამოსახულებაზე, რომელიც განსაზღვრულია R-ზე, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას
2. თუ განტოლების ერთი მხარიდან მეორეში გადავიტანთ რომელიმე შესაკრებს მოპირდაპირე ნიშნით, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.
3. თუ განტლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე რიცხვზე, ან გამოსახულებაზე, რომელიც 0-გან განსხვავებულია და განსაზღვრულია R-ზე, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.

განტოლების ამოხსნის პროცესში ზოგჯერ საჭიროა ისეთი გარდაქმნის ჩატარება, რომლის შედეგადაც, საზოგადოდ, არ მიიღება მოცემული განტოლების ტოლფასი განტოლება. კერძოდ, განტოლების ორივე მხარის ახარისხებით ან ცვლადის შემცველ მთელ გამოსახულებაზე გამრავლებით შეიძლება გაჩნდეს გარეშე ამონახსნები, ამიტომ უნდა შემოწმდეს, აკმაყოფილებენ თუ არა მიღებული ამონახსნები მოცემულ განტოლებას.

თუ განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ ცვლადის შემცველ გამოსახულებაზე, შეიძლება ზოგიერთი ამონახსნი დაიკარგოს.

განტოლების ორივე მხარისთვის ცვლადი შემცველი გამოსახულების დამატებაც შეიძლება არ აღმოჩნდეს ტოლფასი გარდაქმნა. მაგალითად,

$x^2 = 4$ და $x^2 + \frac{1}{x+2} = 4 + \frac{1}{x+2}$ განტოლებები არ არის ტოლფასი.

თუ განტოლება მოცემულია

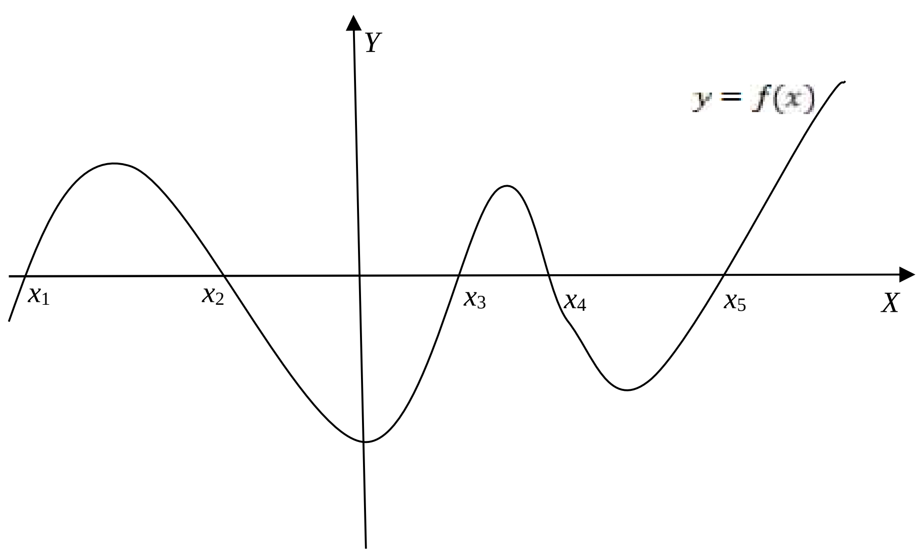
f(x).g(x)=0

სახით, მაშინ მისი ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს

f(x)=0 და g(x)=0

განტოლებების ყველა იმ ამონახსნების გაერთიანებას, რომლებიც ერთდროეულად ეკუთვნის f(x) და g(x) ფუნქციების განსაზღვრის არეებს.

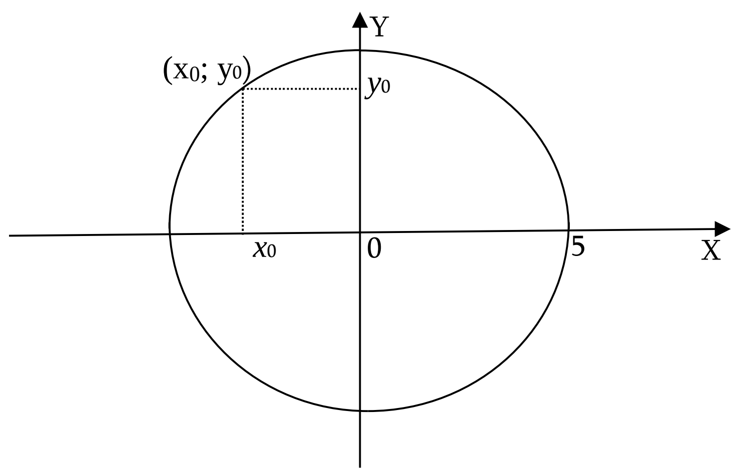
თუ $y = f(x)$ დამოკიდებულებას განვიხილავთ როგორც ორცვლადიან განტოლებას, მაშინ მას დააკმაყოფილებს ნახაზზე მოცემული მისი გრაფიკის ნებისმიერი წერტილის კოორდინეტები.



სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ მოცემულ განტოლებას ეწოდება ორცვლადიანი განტოლების გრაფიკი .

f(x)=0 განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს $y=f$(x) ფუნქციის გრაფიკის აბსცისათა OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილების სიმრავლეს.

მაგალითად, ნახაზზე $x^2 + y^2 = 25$ განტოლების გრაფიკია წარმოდგენილი. $(x_0; y_0)$ წერტილი ძევს გრაფიკზე და $x_0^2 + y_0^2 = 25$.



წრფივი ერთცვლადიანი განტოლება

$kx+b$=0 სახის განტოლებას, სადაც x ცვლადია , ხოლო k და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვები, წრფივი ერთცვლადიანი განტოლება ეწოდება.

თუ k≠0, მაშინ $kx+b$ =0 წრფივ განტოლებას პირველი რიგის განტოლება ეწოდება და მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$x=-\frac{b}{k}$$

თუ k=0 , მაშინ წრფივ განტოლებას ექნება სახე,

0x+b=0.

თუ b≠0, განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, ხოლო, როცა b=0 ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა და ემთხვევა R -ს.

ფუნქციას, რომლის მოცემა შეიძლება $y=kx+b$ სახის ფორმულით, სადაც k და b მოცემული რიცხვებია, წრფივი ფუნქცია ეწოდება.

წრფივი ფუნქციის გრაფიკს წრფე წარმოადგენს.

$kx+b$=0 განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს y= $kx+b$

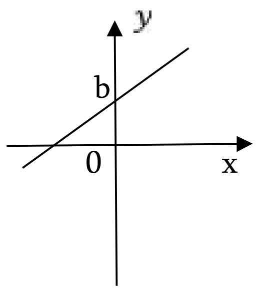
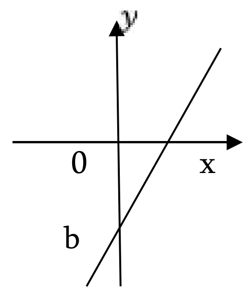
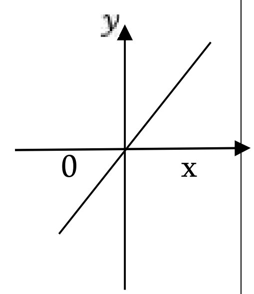
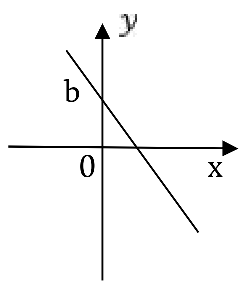
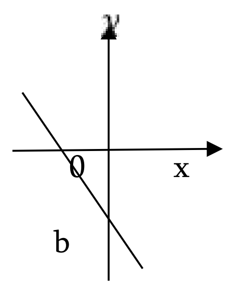
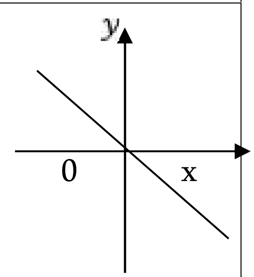
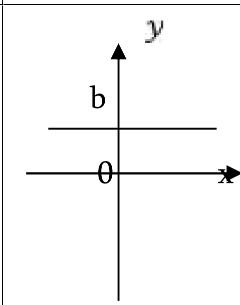
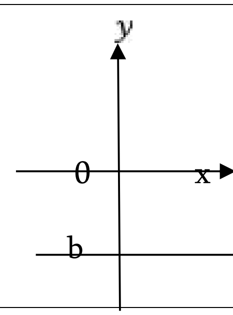
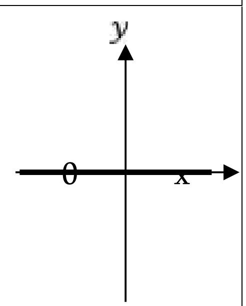
წრფის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილების აბსცისთა სიმრავლეს. თუ

k≠0, გვექნება ერთადერთი გადაკვეთის წერტილი, რომლის აბსცისაა

$$x = -\frac{b}{k}$$

თუ k=0 და b≠0 , წრფე პარალელურია OX ღერძის და მას არ ემთხვევა, ამიტომ გადაკვეთის წერტილი არა გვაქვს, ე.ი. ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია;

თუ k= b=0, წრფე ემთხვევა OX ღერძს, ე.ი. ამონახსნთა სიმრავლე არის R .

$y = kx + b$	b>0	b<0	b=0
k>0			
k<0			
k=0			

პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლება

$kx-p=0$ სახის განტოლებას, სადაც k და p პარამეტრებზეა დამოკიდებული, ხოლო x უცნობია, ეწოდება წრფივი განტოლება x-ის მიმართ. ის დაიყვანება $kx=p$ სახეზე. როცა $k\neq0$ პარამეტრების ყოველი დასაშვები მნიშვნელობების სისტემისათვის განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი; თუ $k=0$ და $p=0$, x ნებისმიერი რიცხვია, ხოლო თუ $p\neq0$ და $k=0$, მაშინ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს.

საილუსტრაციოდ ამოვხსნათ პარამეტრის შემცველი მარტივი წრფივი განტოლება:

$(a^2-1)x=a+1$

ვატარებთ წინასწარ გამოკვლევებს:

1) თუ $a=1$, მაშინ განტოლება იღებს $0\cdot x=2$ სახეს და მას არ აქვს ამონახსნი

2) თუ $a=-1$, მაშინ განტოლება იღებს $0\cdot x=0$ სახეს და ამ შემთხვევაში x ნებისმიერია

3) თუ $a\neq\pm1$, მაშინ $x=\frac{a+1}{a^2-1}$, $x=\frac{1}{a-1}$

პასუხი: თუ $a=1$, მაშინ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი;

თუ $a=-1$, მაშინ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი;

თუ $a\neq\pm1$, მაშინ $x=\frac{1}{a-1}$ - განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი.

თუ საწყის განტოლებაში a პარამეტრის ნაცვლად ჩავწერთ რიცხვს, მაგალითად 4-ს, მივიღებთ განტოლებას:

$(4^2-1)x=4+1$

$15x=5$

$$x=\frac{1}{3}$$

ორივე განტოლების შემთხვევაში მოთხოვნა იყო განტოლების ამოხსნა. მაგრამ მეორესაგან განსხვავებით, პირველ შემთხვევაში დაგვჭირდა დამატებითი გამოკვლევების ჩატარება.

ორივე განტოლების ამოხსნისას გამოვსახეთ უცნობი, პირველ შემთხვევაში პარამეტრის საშუალებით, მეორე შემთხვევაში რიცხვით.

მაგრამ მეორესაგან განსხვავებით, პირველ შემთხვევაში დაგვჭირდა დამატებითი გამოკვლევების ჩატარება, რადგან პარამეტრის შემცველი განტოლების ამოხსნა ნიშნავს იმის დადგენას, თუ პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის არსებობს ამონახსნები და ვიპოვოთ ამ მნიშვნელობებისათვის განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე.

პირველი განტოლების ამოხსნისას მოსწავლეს მოუწევს გაიაზროს პარამეტრის ორმაგი ბუნება, ერთი მხრივ, პარამეტრი მიიჩნიოს როგორც ფიქსირებული სიდიდე, რის გამოც გარდაქმნების დროს იგი შეიძლება განიხილოს როგორც რიცხვი, მაგრამ ამავე დროს, მასთან ურთიერთობის თავისუფლების ხარისხი შეზღუდულია მისი უცნობობით.

ჩვენს შემთხვევაში მოსწავლე გამოიყენებს მისთვის ცნობილ განტოლების თვისებას: უცნობი თანამამრავლი, რომ ვიპოვოთ, ნამრავლი უნდა გავყოთ ცნობილ თანამამრავლზე, მაგრამ აქ თავისუფლების ხარისხს ზღუდავს პარამეტრის შემცველ გამოსახულებაზე გაყოფა, ამიტომ საჭიროა დავადგინოთ, პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აქვს განტოლებას ამონახსნები და როგორია ისინი, და რა მნიშვნელობისათვის არ აქვს.

მეორე განტოლების ამოხსნისათვის საკმარისი იყო ბლუმის ტაქსონომიის მიხედვით აზროვნების ქვედა დონის სააზროვნო უნარები, როგორიცაა განტოლებების თვისების ცოდნა და ამ ცოდნის გამოყენებით გარკვეული პროცედურების ჩატარება. პირველი განტოლების ამოხსნაში კი დამატებით ზედა დონის სააზროვნო უნარებიც ერთვება. მოსწავლეს

უწევს განტოლების საწყისი მიმოხილვა, პირველადი დასკვნების გაკეთება და საბოლოო დასკვნაში, პასუხში სულყოფილი ანალიზის გაკეთება, ყველაფრის შეჯამება.

მაგალითად, ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება x-ის მიმართ:

$(m+1)x=n-x$

$mx+x= n-x$

$mx+2x=n$

$(m+2)x=n$

სავარაუდოდ, მოსწავლეთა უმრავლესობა დაწერს: $x=\dfrac{n}{m+2}$.

მაგრამ ამ შედეგს ვერ ჩავთვლით სრულყოფილ პასუხად, რადგან, ერთი მხრივ, ნაცნობი m და n სინამდვილეში უცნობი რიცხვებია, მაგრამ ამ განტოლების ფარგლებში ჩვენ ისინი ჩავთვალეთ ფიქსირებულებად. შედეგი არის წილადი, რომელიც როგორც მრიცხველში, ასევე მნიშვნელში შეიცავს უცნობს, ამიტომ სრულყოფილი პასუხის შესადგენად აუცილებელია გარკვეული მსჯელობის ჩატარება. თუ $m\neq-2$, მაშინ განტოლების ამონახსნია $x=\dfrac{n}{m+2}$; თუ $m=-2$ და $n\neq0$, მაშინ განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, ე.ი ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია; ხოლო თუ $m=-2$ და $n=0$, მაშინ განტოლების ამონახსნი ნებისმიერი რიცხვია ე.ი. ამონახსნთა სიმრავლეა R.

განვიხილოთ 2014 წელს ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე შეთავაზებული ამოცანა:

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც

$8x+3ax-11=0$

განტოლების ამონახსნები 1-ზე მეტია.

ამოვხსნათ განტოლება x-ის მიმართ:

$$x = \frac{11}{8+3a}, \qquad a \neq -\frac{8}{3}$$

ამოცანის პირობის გთვალისწინებით,

$$\frac{11}{8+3a} > 1,$$

ტოლფასი გარდაქმნებით მივიღებთ

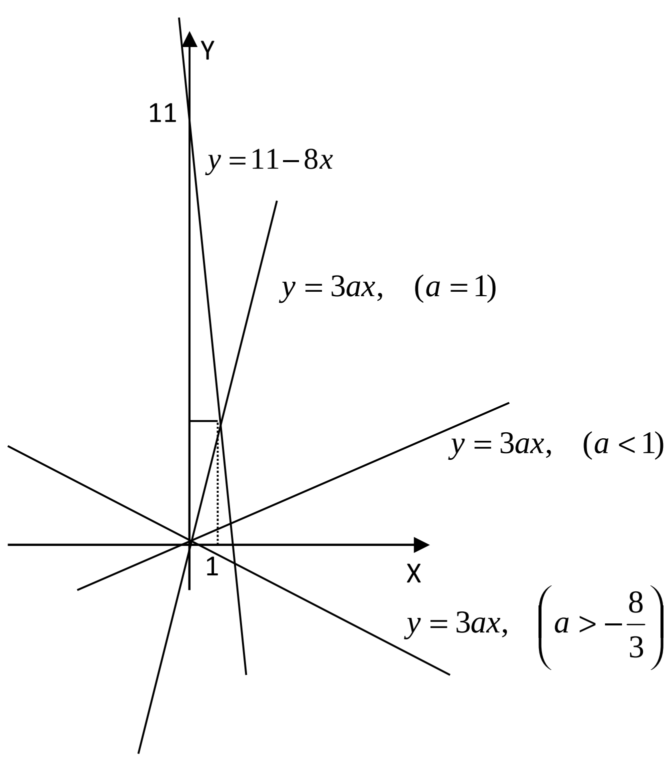
$$\frac{3(1-a)}{3a+8} > 0$$

და ინტერვალთა მეთოდის გამოყენებით დავადგენთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობას, რომელთათვისაც სრულდება ამოცანის პირობა:

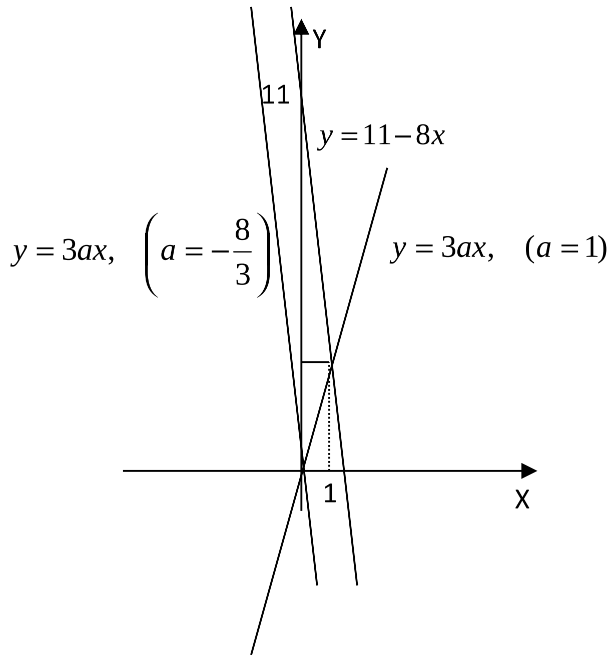
$$-\frac{8}{3} < a < 1.$$

თსუ–ის სამეცნიერო-პოპულარულ ჟურნალში „მათემატიკა“, 2015 წელი, N3, თ. ვეფხვაძისა და ლ. ქურჩიშვილის სტატიაში „გრაფიკების გამოყენებით პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების შესახებ“ შემოთავაზებულია ამ ამოცანის ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი:

შევარჩიოთ ფუნქციები $y = 3ax$ და $y = 11 - 8x$ და განვიხილოთ მათი გრაფიკების ურთიერთმდებარეობის შემთხვევები:



ნახაზებიდან ჩანს, რომ როცა $a<1$, გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის აბსცისა მეტია 1-ზე; როცა $3a=-8$, გრაფიკები პარალელური წრფეებია და არ იკვეთება; როცა $a<-\frac{8}{3}$, გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის აბსცისა ნაკლებია 1-ზე.



ამრიგად, გადაკვეთის წერტილის აბსცისა მეტია 1-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$-\frac{8}{3}<x<1.$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი ამოცანა, რომელიც ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე წლების წინ მიეცათ აბიტურიენტებს და ზემოთხსენებულ სტატიაშია განხილული:

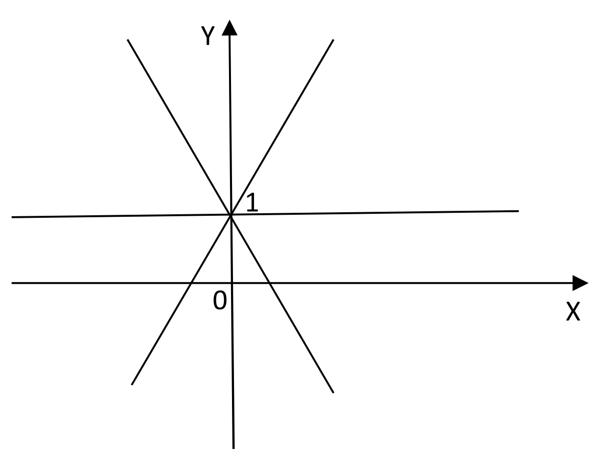
იპოვეთ პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$$2ax-3b=5x-1$$

განტოლებას არა აქვს ამონახსნი.

განვიხილოთ ფუნქციები

$$\begin{cases} y=2ax+1 \\ y=5x+3b \end{cases}$$



მოცემულ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი, თუ ამ ფუნქციების გრაფიკები არ იკვეთება.

$y = 2ax + 1$ განტოლებებით (0;1) წერტილზე გამავალი წრფეთა კონაა წარმოდგენილი.

მაშასადამე, $y = 5x + 3b$ წრფე პარალელური უნდა იყოს

პარამეტრის

ფიქსირებული მნიშვნელობებით განსაზღვრული წრფის და არ უნდა გადიოდეს (0;1) წერტილზე.

$$3b \neq 1 \quad \text{და} \quad 2a = 5$$

$$b \neq \frac{1}{3}, \qquad a = \frac{5}{2}$$

ანალიზური ხერხით ამ ამოცანის ამოსახსნელად განტოლება გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$(2a - 5) \cdot x = 3b - 1$$

განტოლებას არა აქვს ამონახსნი, როდესაც $2a - 5 = 0$ და $3b - 1 \neq 0$, ანუ $a = \frac{5}{2}$ და $b \neq \frac{1}{3}$.

ანალიზური და გრაფიკული ხერხებით ერთი და იმავე ამოცანის ამოხსნა ხელს უწყობს მათემატიკის სხვადასხვა დარგების ინტეგრაციას, ანვითარებს მოსწავლის შემოქმედებით უნარს, რადგან ერთი და იგივე ამოცანის მრავალმხრივ დანახვა, გაანალიზება ხდება.

წრფივი პარამეტრული განტოლების ამოხსნით მოსწავლეებს გაუადვილდებათ რაციონალური განტოლების ამოხსნის გაგება. განვიხილოთ განტოლება რომელიც წრფივზე დაიყვანება.

მოვიყვანოთ მაგალითი ტ. კვიციანის წიგნიდან „მათემატიკა პარამეტრის შემცველი განტოლებები, უტოლობები და სისტემები“

a და b პარამეტრების ყველა დასაშვები მნიშვნელობებისთვის ამოვხსნათ x –ის მიმართ განტოლება:

$$\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$$

ამოცანის თანახმად $x \neq \pm b^2$.

განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $b^4-x^2 \neq 0$ გამოსახულებაზე, მივიღებთ

$(b^2+x)(a^2+x)-(b^2-x)(a^2-x)=4abx+2a^2-2b^2$

$a^2b^2+b^2x+a^2x+x^2-a^2b^2+b^2x+a^2x-x^2=4abx+2a^2-2b^2$

შემდეგ მსგავსი წევრების შეერთებით და მოპირდაპირეების გაბათილების შედეგად მივიღებთ

$2b^2x+2a^2x-4abx=2a^2-2b^2$

განტოლების 2-ზე შეკვეცით და შემოკლებული გამრავლების ფორმულის გამოყენების შემდეგ მივიღებთ

$(a-b)^2x=a^2-b^2$ განტოლებას.

როცა $a=b$, მაშინ განტოლება მიიღებს $0x=0$ სახეს ე.ი. x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი შეიძლება იყოს, გარდა $x=\pm b^2$.

როცა $a \neq b$, მაშინ $x=\frac{a+b}{a-b}$.

ეხლა დავადინოთ a და b პარამეტრების ის მნიშვნელობები,

როცა $\frac{a+b}{a-b}=\pm b^2$.

$\frac{a+b}{a-b}=b^2$, როცა $a+b=ab^2-b^3$ ე. ი. როცა $a=\frac{b(1+b^2)}{b^2-1}$

$\frac{a+b}{a-b} = -b^2$, როცა $a + b = -ab^2 + b^3$ ე. ი. როცა $a = \frac{b(b^2-1)}{b^2+1}$

ამის შემდეგ შევძლებთ საბოლოო პასუხის ჩაწერას:

როცა $a \neq b$, $a \neq \frac{b(1+b^2)}{b^2-1}$, $a \neq \frac{b(b^2-1)}{b^2+1}$, მაშინ $x = \frac{a+b}{a-b}$;

როცა $a = b$, მაშინ x ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, გარდა $x = \pm b^2$;

ხოლო როცა $a = \frac{b(1+b^2)}{b^2-1}$ ან $a = \frac{b(b^2-1)}{b^2+1}$, განტოლებას ამონახსნი არ აქვს.

მოვიყვანოთ საინტერესო მაგალითი წიგნიდან П.И.Горнштеин, В.Б.Полонский, М.С. Якир “Задачи с параметрами” (1998 წელი, გამომცემლობა „Илеска“ „ Гимназия“ Москва-Харьков გვ.134)

ვთქვათ მოცემული გვაქვს ორი დებულება:

ა) $\begin{cases} (a+4)x + 3y = a+1 \\ ax + (a-1)y = a-1 \end{cases}$ სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

ბ) $5x + 4y = 6$ და $ax + 6y = 10$ განტოლებების შესაბამისი წრფეები, ერთმანეთს კვეთენ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მეორე მეოთხედში.

a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვისაა ერთერთი პირობა ჭეშმარიტი და მეორე მცდარი?

სისტემის პირველი განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით $y = -\frac{a+4}{3}x + \frac{a+1}{3}$ როცა $a = 1$, მაშინ სისტემას ერთი ამონახსნი აქვს, რადგან პირველი განტოლების შესაბამისი წრფე არ არის ვერტიკალური, ხოლო მეორე განტოლების შესაბამისი გრაფიკი, წრფე კი აბსცისათა

ღერძის პერპენდიკულარულია. თუ $a \neq 1$, მაშინ $y = -\frac{a}{a-1}x + 1$. აქედან გამომდინარე სისტემას აქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე, თუ

$$\begin{cases} \frac{a+4}{3} = \frac{a}{a-1} \\ \frac{a+1}{3} = 1 \end{cases}$$

მივიღებთ $a = 2$.

ბ) პირობაში მოცემული განტოლებები ჩავწეროთ ასე $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ და $y = -\frac{a}{6}x + \frac{5}{3}$ მათი გრაფიკები იკვეთებიან, მაშინ, როცა $-\frac{5}{4} \neq -\frac{a}{6}$ ე.ი. $a \neq \frac{15}{2}$. წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები განისაზღვრება ტოლობით

$$-\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = -\frac{a}{6}x + \frac{5}{3}.$$

აქედან გვექნება $x = \frac{2}{2a-15}$ და $y = \frac{25-3a}{15-2a}$.

წრფეების გადაკვეთის წერტილი მდებარეობს დეკარტეს მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყის მეორე მეოთხედში მაშინ, როცა $x < 0$ და $y > 0$. აქედან $a < \frac{15}{2}$.

ე.ი. ა) პირობა ჭეშმარიტია, თუ $a = 2$, ხოლო ბ) პირობა ჭეშმარიტია, თუ $a < \frac{15}{2}$.

პასუხი ჩაიწერება ასე: $a < 2$ ან $2 < a < \frac{15}{2}$.

კვადრატული განტოლება

განსაზღვრება: $ax^2+bx+c=0$ სახის განტოლებას, სადაც a,b,c $(a\neq 0)$ რაიმე რიცხვებია, ხოლო x ცვლადია, კვადრატული განტოლება ეწოდება.

a,b და c რიცხვები კვადრატული განტოლების კოეფიციენტებია, ამასთან a-ს ეწოდება პირველი კოეფიციენტი, b -ს -მეორე კოეფიციენტი, c -ს თავისუფალი წევრი.

კვადრატულ განტოლებას მეორე ხარისხის განტოლებასაც უწოდებენ, რადგან მისი მარცხენა მხარე მეორე ხარისხის მრავალწევრია.

თუ $ax^2+bx+c=0$ განტოლებაში b ან c კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მივიღებთ განტოლებას, რომელსაც არასრული კვადრატული განტოლება ეწოდება.

არსებობს სამი სახის არასრული კვადრატული განტოლება:

1) $ax^2+c=0$, სადაც $(c\neq 0)$

2) $ax^2+bx=0$, სადაც $(b\neq 0)$

3) $ax^2=0$ $(a\neq 0)$

$ax^2+c=0$, $(c\neq 0)$ სახის არასრული კვადრატული განტოლების ამოსახსნელად თავისუფალი წევრი უნდა გადავიტანოთ განტოლების მარჯვენა ნაწილში და მიღებული განტოლების ორივე მხარე გავყოთ a რიცხვზე. მივიღებთ განტოლებას:

$x^2=-\frac{c}{a}$;

მიღებული განტოლება მოცემულის ტოლფასია

თუ $c\neq 0$, მაშინ $-\frac{c}{a}\neq 0$.

თუ$-\frac{c}{a}>0$, მაშინ განტოლებას აქვს ორი ფესვი:

$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ და $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$

თუ $-\frac{c}{a} < 0$, მაშინ განტოლებას არ აქვს ნამდვილი ფესვი.

$ax^2 + bx = 0,\quad (b \neq 0)$ სახის არასრული კვადრატული განტოლების ამოსახსნელად განტოლების მარცხენა მხარე უნდა დავშალოთ მამრავლებად:

$x(ax + b) = 0.$

$x(ax + b)$ ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთერთი თანამამრავლი მაინც ნულის ტოლია:

$x = 0$ ან $(ax + b) = 0.$

ამოვხსნათ $ax + b = 0, (b \neq 0)$ განტოლება. მივიღებთ:

$ax = -b,$

$x = -\frac{b}{a}$

ამრიგად, $x(ax + b)$ ნულის ტოლია იმ შემთხვევაში, როცა $x = 0$ ან $x = -\frac{b}{a}$, ამიტომ განტოლების ფესვებია 0 და $-\frac{b}{a}$,

მივიღებთ, რომ $ax^2 + bx = 0,\quad (b \neq 0)$ სახის არასრულ კვადრატულ განტოლებას ყოველთვის აქვს ორი ფესვი.

$ax^2 = 0$ სახის არასრული კვადრატული განტოლება $x^2 = 0$ განტოლების ტოლფასია, ამიტომ მისი ერთადერთი ფესვია 0.

$ax^2 + bx + c = 0,\qquad (a \neq 0)$ სრული კვადრატული განტოლების ამოსახსნელად მისი ყველა წევრი გავყოთ a -ზე და გარდავქმნათ:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

აქედან

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

მიღებული განტოლება $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ტოლფასია, მისი ფესვების რაოდენობა და შესაბამისად სრული კვადრატლი განტოლების ფესვების რაოდენობა დამოკიდებულია $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ წილადის ნიშანზე. რადგან $a\neq 0$, ამიტომ წილადის მნიშვნელი დადებითია ნებისმიერი a-სათვის; ე.ი. წილადის ნიშანი დამოკიდებულია მისი მრიცხველის b^2-4ac ნიშანზე. b^2-4ac გამოსახულებას კვადრატული განტოლების დისკრიმინანატი (ლათინურად განმასხვავებელი) ეწოდება და აღინიშნება D ასოთი.

თუ D>0, მაშინ

სრულ კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ფესვი:

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ და $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

თუ D=0, მაშინ

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

აქედან

$$x=-\frac{b}{2a}$$

ამ შემთხვევაში განტოლებას აქვს ერთი ფესვი (ან ორი ერთმანეთის ტოლი ფესვი) $-\frac{b}{2a}$.

თუ D<0, მაშინ წილადი $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ უარყოფითია, ხოლო $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ გამოსახულების მნიშვნელობა არაუარყოფითი. ამ შემთხვევაში

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

განტოლებას და $ax^2+bx+c=0$, სადაც $(a\neq 0)$ განტოლებას ფესვები არ აქვთ.

$ax^2+bx+c=0$, სადაც $(a\neq 0)$ კვადრატული განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს კვადრატულ სამწევრს ax^2+bx+c, თუ მას აქვს ფესვები x_1და x_2, მაშინ ის იშლება მამრავლებად:

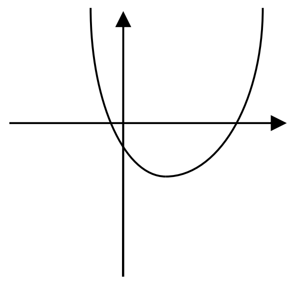
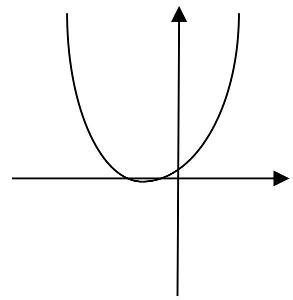
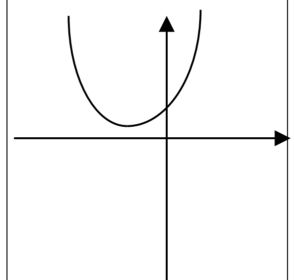
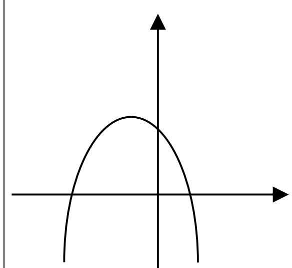
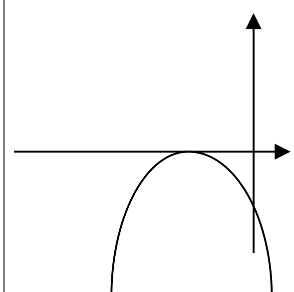
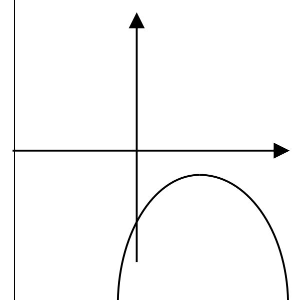
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

თუ კვადრატულ სამწევრს აქვს ერთი ფესვი $x=x_1$ (ანუ $x_1=x_2$) , მაშინ

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

თუ კვადრატულ სამწევრს ax^2+bx+c არ აქვს ფესვი, მაშინ სამწევრი არ იშლება მამრავლებად.

$y=ax^2+bx+c$ ფუნქციას, სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, a,b,c კი - რიცხვები, $a\neq 0$, კვადრატული ფუნქცია ეწოდება. მის გრაფიკს წარმოადგენს პარაბოლა.

$y = ax^2 + bx + c$, D=$b^2 - 4ac$	D>0	D=0	D<0
$ax^2 + bx + c$	ორი ფესვი x_1და x_2	ერთი ფესვი, $-\frac{b}{2a}$	არ აქვს ფესვი
$a > 0$			
$a < 0$			

პარამეტრის შემცველი კვადრატული და კვადრატულზე დაყვანადი განტოლებები

$ax^2 + bx + c = 0$ (1)

სახის განტოლებას, სადაც x უცნობია, ხოლო a, b და c გამოსახულებებია, რომლებიც მხოლოდ პარამეტრებზეა დამოკიდებული ე. ი. წარმოადგენენ ერთი ან რამოდენიმე პარამეტრის ფუნქციებს და a≠0, ეწოდება x-ის მიმართ კვადრატული.

დასაშვებად მივიჩნიოთ პარამეტრების მხოლოდ ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც a,b და c ნამდვილი რიცხვებია.

როგორი ამოცანები შეიძლება შეგვხვდეს ასეთი განტოლების ამოხსნისას?

მაგალითად: ვიპოვოთ პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც ამონახსნები დადებითია, უარყოფითია, აქვთ სხვადა სხვა ნიშანი, არიან რომელიღაც რიცხვზე მეტი ან ნაკლები, პარამეტრის რა მნიშვნელობებისთვის აქვს განტოლებას ნამდვილი ფესვი და ა.შ.

ასეთი შინაარსის ამოცანების ამოხსნისას ვისარგებლოთ კვადრატული განტოლების ამოხსნის შემდეგი თვისებებით:

თუ a>0

D>0, მაშინ (1) განტოლებას აქვს ერთმანეთისაგან განსხვავებული ორი ამონახსნი, რომელთაც აქვთ ერთი და იგივე ნიშანი, როცა c>0, და იგი იქნება b კოეფიციენტის ნიშნის საწინააღმდეგო. ე.ი. თუ b<0, მაშინ ამონახსნები დადებითია, თუ b>0 , მაშინ ამონახსნები უარყოფითია.

თუ D>0 და c<0 მაშინ (1) განტოლებას აქვს ორი ნამდვილი სხვადასხვა ნიშნის მქონე ამონახსნი, როცა c<0. ამასთან იმ ამონახსნის მნიშვნელობაა მოდულით მეტი, რომლის ნიშანიც b კოეფიციენტის ნიშნის

საწინააღმდეგოა. კერძოდ, თუ b<0, მაშინ დადებითი ამონახსნი მეტია უარყოფით ამონახსნზე, ხოლო თუ b>0, მაშინ პირიქით.

D=0, მაშინ (1) განტოლებას აქვს ორი ერთმანეთის ტოლი ამონახსნი, რომელთა ნიშნი b კოეფიციენტის ნიშნის საწინააღმდეგოა (ზოგჯერ ამბობენ, განტოლებას ერთი ამონახსნი აქვსო)

D<0, მაშინ (1) განტოლებას არ აქვს ნამდვილი მაონახსნი.

ანალოგიურად დავადგენთ კვადრატული განტოლების ამონახსნთა თვისებებს, როცა a<0.

მართებულია შემდეგი დებულებები:

თუ (1) განტოლებაში *a* და c კოეფიციენტებს შევუცვლით ადგილებს, მაშინ მივიღებთ განტოლებას, რომლის ამონახსნები, მოცემული განტოლების ამონახსნების შებრუნებულია.

თუ (1) განტოლებაში b კოეფიციენტს შევუცვლით ნიშანს, მაშინ მივიღებთ განტოლებას, რომლის ამონახსნებს ექნებათ მოცემული განტოლების ამონახსნების მოპირდაპირე ნიშნები.

თუ (1) განტოლებაში a და c კოეფიციენტებს სხვადასხვა ნიშნები აქვთ, მაშინ მას ნამდვილი ამონახსნები აქვს, რადგან a×c<0 და D>0 კოეფიციენტების ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.

თუ a>0 და D=0, მაშინ (1) განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს სრულ კვადრატს და პირიქით, თუ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს სრულ კვადრატს, მაშინ a>0 და D=0 - განტოლებას ორი ერთმანეთის ტოლი ფესვი აქვს.

თუ კვადრატული განტოლების ყველა კოეფიციენტი რაციონალურია და დისკრიმინანტი რაციონალური რიცხვის ზუსტი კვადრატია, მაშინ განტოლების ამონახსნები აგრეთვე რაციონალრული რიცხვებია.

განვიხილოთ $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ ფუნქციის გრაფიკის სიბრტყეზე მდებარეობის შემთხვევები.

ვგულისხმობთ, რომ a , b, c მოცემული რიცხვებია, x კი ცვლადი.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

აქედან გამომდინარეობს ამ ფუნქციის გრაფიკის-პარაბოლის აგების წესი.

1. პუნქტირით გავავლოთ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძი $x = -\frac{b}{2a}$;

2.სიბრტყეზე ვიპოვოთ პარაბოლის წვერო, რომლის კოორდინატებია

$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$

3. a-ს ნიშნის მიხედვით დავადგინოთ ფუნქციის ამოზნექილობა ან ჩაზნექილობა, თუ $a > 0$, წირი ჩაზნექილია, ხოლო პარაბოლის შტოები მიმართულია ზევით; თუ $a < 0$, მაშინ წირი ამოზნექილია, პარაბოლის შტოებ კი მიმართულია ქვევით

4. $D = b^2 - 4ac$ სიდიდის საშუალებით დავადგენთ პარაბოლის ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილების რაოდენობას (ორი, ერთი ან არცერთი). ვიპოვით ამ წერტილებს და აღვნიშნავთ ox ღერძზე; აგრეთვე, აღვნიშნავთ პარაბოლის oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილს;

5. მიღებულ წერტილებზე გავატარებთ პარაბოლას.

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული წესით აგებული პარაბოლა მიახლოებითია. მაგრამ უნდა გამოიკვეთოს ის ფაქტი, რომ შტოები მიმართულია საჭირო მხარეს, რომ პარაბოლა გადის ნაპოვნ წერტილებზე (წვეროზე და ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებზე) და სიმეტრიულია მისი ღერძის მიმართ.

$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ გრაფიკზე უკეთეს ინფორმაციას გვაძლევს მისი შემდეგი სახით ჩაწერა:

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

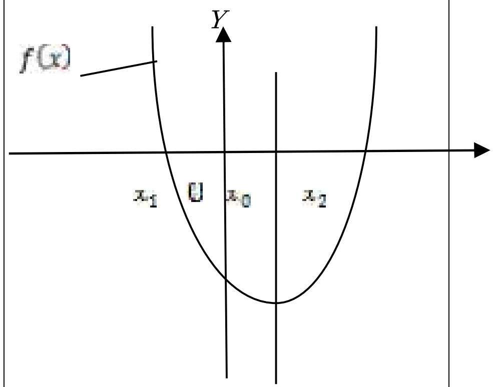
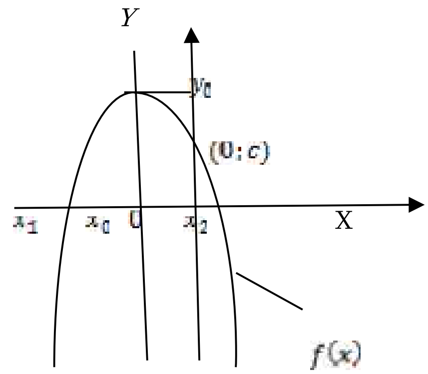
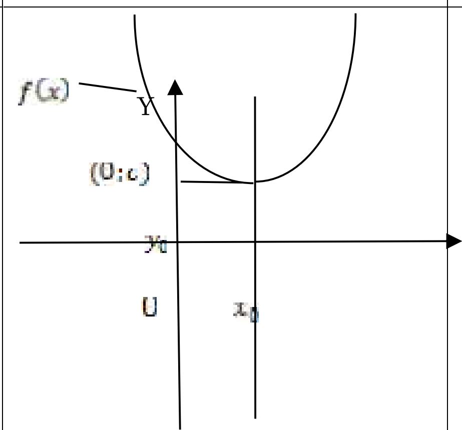
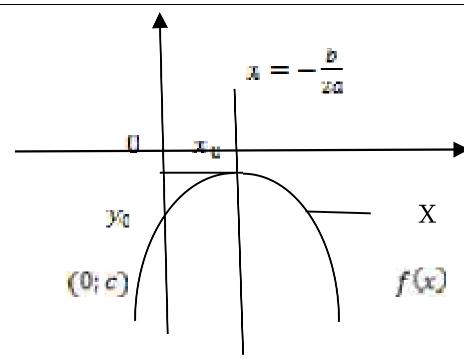
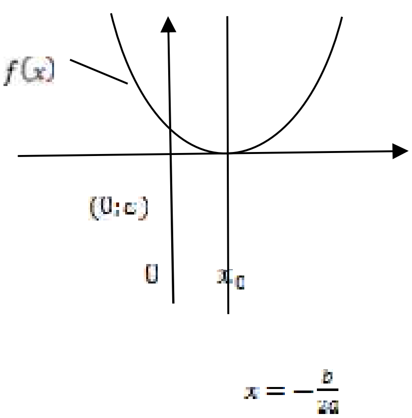
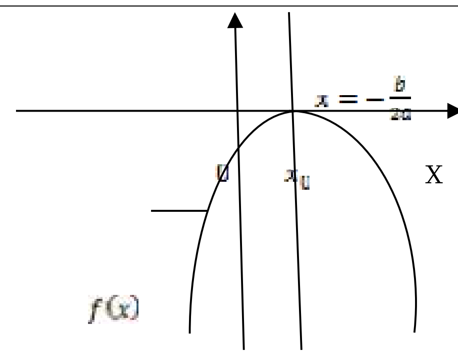
1. $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$ წრფე წარმოადგენს პარაბოლის სიმეტრიის ღერძს.

   პარაბოლის წვეროა $(x_0; y_0)$წერტილი, სადაც $y_0 = f(x_0) = \frac{4ac-b^2}{4a}$

2. როცა $a > 0$ და $D > 0$, მაშინ პარაბოლა გადაკვეთს ox ღერძს ორ წერტილში და მისი შტოები ზევითაა მიმართული; თუ $a > 0$ და $D = 0$, მაშინ პარაბოლა ეხება ox ღერძს ზევიდან; როცა $a > 0$ და $D < 0$ მაშინ პარაბოლა მთლიანად ox ღერძის ზემოთ მდებარეობს.

3. იმ შემთხვევაში, როცა $a < 0$ და $D > 0$, მაშინ პარაბოლა კვეთს ox ღერძს ორ x_1 და x_2 წერტილში, რომლებიც $ax^2 + bx + c$ სამწევრის ფესვებს წარმოადგენენ და მისი შტოები მიმართულია ქვემოთ; $a < 0$ და $D < 0$ მაშინ პარაბოლა მთლიანად ox ღერძის ქვემოთ მდებარეობს; როცა $a < 0$ და $D = 0$ მაშინ პარაბოლა ox ღერძს ეხება ქვემოდან.

თუ $y = f(x)$ განვიხილავთ როგორც ორცვლადიან განტოლებას, მაშინ მას დააკმაყოფილებს ნახაზზე აგებული გრაფიკის ნებისმიერი წერტილის კოორდინეტები.

D a	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$		
$D < 0$		
$D = 0$		

განვიხილოთ კვადრატული განტოლება

$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$

როცა მისი a , b, c ნამდვილი კოეფიციენტებიდან ერთერთი მაინც დამოკიდებულია პარამეტრზე. განტოლების ამონახსნები აღვნიშნოთ x_1და x_2-ით ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ $x_1 \leq x_2$. არაერთი ამოცანის ამოხსნისას საჭიროა დავადგინოთ პარამეტრის მნიშვნელობათა სიმრავლე, რათა შევადაროთ განტოლების ამონახსნები რაღაც m რიცხვს, ან მოცემულ m და n რიცხვებს.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები, განტოლების მარცხენა მხარეში მყოფი სამწევრი აღვნიშნო, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$= - $\frac{b}{2a}$.

როგორი სახის სავარჯიშოები შეიძლება შეგვხვდეს?

1)პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს

$ax^2 + bx + c = 0$ განტოლებას ორი ამონახსნი, რომელთაგან თითოეული მეტია მოცემულ m რიცხვზე? (ვგულისხმობთ, რომ ორი ერთმანეთის ტოლი ამონახსნი ორი ამონახსნია)

იმისათვის, რომ კვადრატული განტოლების ამონახსნები, ანუ $f(x)$ კვადრატული სამწევრის ორივე ფესვი მეტი იყოს m -ზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 > m \\ f(m) > 0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 > m \\ f(m) < 0 \end{cases}$$

სადაც $f(m) = am^2 + bm + c$. ეს პირობები ასე ჩავწეროთ:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 > m \\ af(m) > 0 \end{cases}$$

თუ პირობით მოგვთხოვენ, რომ განტოლებას ჰქონდეს ორი დადებითი ამონახსნი, მაშინ $m=0$ და

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 > 0 \\ af(0) > 0 \end{cases}$$

2)პარამეტრის რა მნიშვენლობისათვის აქვს

$ax^2+bx+c=0$ განტოლებას ორი ამონახსნი, რომელთაგან თითოეული ნაკლებია მოცემულ m რიცხვზე?

იმისათვის, რომ განტოლების ორივე ამონახსნი, ანუ $f(x)$ კვადრატული სამწევრის ორივე ფესვი იყოს m რიცხვზე ნაკლები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 < m \\ f(m) > 0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ x_0 < m \\ f(m) < 0 \end{cases}$$

პირობები ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 < m \\ af(m) > 0 \end{cases}$$

თუ განტოლების ამოხსნისას მოითხოვება, რომ მას ჰქონდეს ორი უარყოფითი ამონახსნი, მაშინ პირობა მიიღებს სახეს

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 < m \\ af(0) > 0 \end{cases}$$

3)პარამეტრის რა მნიშვენელობისათვის აქვს

$ax^2+bx+c=0$ განტოლებას ორი ამონახსნი, რომელთაგან ერთი ნაკლებია მოცემულ m რიცხვზე, ხოლო მეორე კი მეტი?

იმისათვის, რომ განტოლებას ჰქონდეს ერთი ამონახსნი m რიცხვზე მეტი, ხოლო მეორე m -ზე ნაკლები, აუცილებელია და საკმარისია, რომ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(m) < 0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} a < 0 \\ f(m) > 0 \end{cases}$$

ეს პირობა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$a \cdot f(m) < 0$$

4)პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აქვს

$ax^2 + bx + c = 0$ განტოლებას ორი ამონახსნი, რომლებიც მოცემულ m და n რიცხვებს შორის მდებარეობენ ($m < n$)?

იმისათვის, რომ განტოლების ამონახსნები, ანუ რაც იგივეა, $f(x)$ კვადრატული სამწევრის x_1დაx_2 ფესვები აკმაყოფილებენ

$m < x_1 \leq x_2 < n$უტოლობას, აუცილებელი და საკმარისი სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq o \\ x_0 \in (m;n) \\ f(m) > 0 \\ f(n) > 0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} a < 0 \\ D \geq o \\ x_0 \in (m;n) \\ f(m) < 0 \\ f(n) < 0 \end{cases}$$

ამ პირობებს შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ m < x_0 < n \\ af(m) > 0 \\ af(n) > 0 \end{cases}$$

5) ვიპოვოთ, პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$ax^2 + bx + c = 0$ განტოლებას აქვს ორი სხვადასხვა ამონახსნი, რომელთაგან მხოლოდ უდიდესია მოთავსებული მოცემულ m და n $(m < n)$ რიცხვებს შორის.

იმისათვის, რომ განტოლების მხოლოდ უდიდესი ამონახსნი მდებარეობდეს $[m, n]$ მონაკვეთის შიგნით, აუცილებელია და საკმარისია, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(m) < 0 \\ f(n) > 0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} a < 0 \\ f(m) > 0 \\ f(n) < 0 \end{cases}$$

ეს პირობები შეგვიძლია გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0 \\ a \cdot f(n) > 0 \end{cases}$$

6) პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის ეკუთვნის $x^2 + bx + c = 0$ განტოლების მხოლოდ უმცირესი ამონახსნი (m, n) შუალედს?

იმისათვის, რომ განტოლების მხოლოდ უმცირესი ამონახსნი მდებარეობდეს (m, n) შუალედში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(m) > 0 \\ f(n) < 0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} a < 0 \\ f(m) < 0 \\ f(n) > 0 \end{cases}$$

ეს პირობები გადაიწერება ასეთი სახით:

$$\begin{cases} a \cdot f(m) > 0 \\ a \cdot f(n) < 0 \end{cases}$$

7) პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის $[m, n]$ მონაკვეთი მთლიანად მოთავსებულია (x_1, x_2) შუალედში, სადაც x_1 და x_2 არის $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ამონახსნები?

იმისათვის, რომ განტოლების უმცირესი ამონახსნი მოცემულ m რიცხვზე ნაკლები იყოს, ხოლო უდიდესი ამონახსნი მოცემულ n რიცხვზე $(m < n)$ მეტი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს შემდეი პირობები:

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(m) < 0 \\ f(n) < 0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} a < 0 \\ f(m) > 0 \\ f(n) > 0 \end{cases}$$

ეს პირობები გადაიწერება ასე:

$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0 \\ a \cdot f(n) < 0 \end{cases}$$

8) ვიპოვოთ პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების უმცირესი ამონახსნი $x_1 \in (m_1; n_1)$ და უდიდესი ამონახსნი $x_2 \in (m_2; n_2)$, სადაც $m_1 < n_1 < m_2 < n_2$.

პირობა დაკმაყოფილდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულდება შემდეგი პირობები:

$$\begin{cases} f(m_1) \cdot f(n_1) < 0 \\ f(m_2) \cdot f(n_2) < 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} f(m_1) \cdot f(n_1) < 0 \\ f(m_2) \cdot f(n_2) < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

9) ვიპოვოთ პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ამონახსნები არ აღემატებიან მოცემულ m რიცხვს, ამასთან ცნობილია, რომ $a > 0$.

პირობა შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი ექნება შემდეგ პირობებს:

$$\begin{cases} f(m) \ge 0 \\ m \ge x_0 \\ D \ge 0 \end{cases}$$

სადაც $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

10) პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის არ გააჩნია $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლებას $[m, n]$ მოცემულ მონაკვეთზე არცერთი ამონახსნი, თუ ცნობილია, რომ $a > 0$?

პირობა სრულდება, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$D < 0 \quad \text{ან} \quad \begin{cases} D \ge 0 \\ f(m) > 0 \\ m > x_0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} D \ge 0 \\ f(n) > 0 \\ n < x_0 \end{cases} \quad \text{ან} \quad \begin{cases} f(m) < 0 \\ f(n) < 0 \end{cases}$$

11) ვიპოვოთ პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $ax^2+bx+c=0$განტოლების ორი ამონახსნიდან ერთი მაინც მეტია მოცემულ m რიცხვზე, თუ $a>0$.

ამ პირობის შესასრულებლად აუცილებელია და საკმარისი, რომ სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:

$$f(m)<0 \text{ ან } \begin{cases} D\geq 0 \\ m<x_0 \end{cases}$$

12) პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აქვს $ax^2+bx+c=0$ განტლებას ისეთი ნამდვილი ამონახსნები, რომელთაგან ერთი მაინც ეკუთვნის $[m,n]$ მონაკვეთს, როცა $a>0$?

განტოლების თუნდაც ერთი ამონახსნი რომ აკმაყოფილებდეს ამ პირობას, აუცილებელია და საკმარისი, სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:

$$f(m)\cdot f(n)\leq 0 \text{ ან } \begin{cases} f(m)>0 \\ f(n)<0 \\ D\geq 0 \\ m<x_0<n \end{cases}$$

13) როდის აქვს $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას ზუსტად ერთი ნამდვილი ამონახსნი, რომელიც მოცემულ m რიცხვზე მეტია, თუ

$a>0$?

დასმული პირობები სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$f(m)<0 \text{ ან } \begin{cases} f(m)>0 \\ D=0 \\ m<x_0 \end{cases}$$

14) პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აქვს $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას (m, n) ინტერვალზე ზუსტად ერთი ამონახსნი, თუ $a>0$?

ამ პირობის დასაკმაყოფილებლად აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$f(m)\cdot f(n)<0 \text{ ან } \begin{cases} f(m)=0 \\ m<x_0<\frac{m+n}{2} \end{cases} \text{ ან } \begin{cases} f(n)=0 \\ \frac{m+n}{2}<x_0<n \end{cases}$$

მოვიყვანოთ მაგალითად განტოლება გ. იასტრებინეცკის წიგნიდან "Уравнения и неравенства, содержащие параметры":

$mx^2+3mx-(m+2)=0$

გამოვიკვლიოთ ეს განტოლება m პარამეტრის მნიშვნელობებისათვის.

როცა m=0, განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$0x^2+0x-2=0$

და მას ამონახსნი არა აქვს.

თუ m≠0, განტოლება კვადრატულია. დისკრიმინანტი

$D=9m^2+4m(m+2)=13m^2+8m$

თუ $13m^2+8m\geq 0$, ე.ი.

$m\leq -\frac{8}{13}$, ან $m>0$,

$$x=\frac{-3m\pm\sqrt{m(13m+8)}}{2m}$$

მაშინ მას აქვს ორი ნამდვილი ამონახსნი (თუ D=0, ეს ამონახსნები ტოლია).

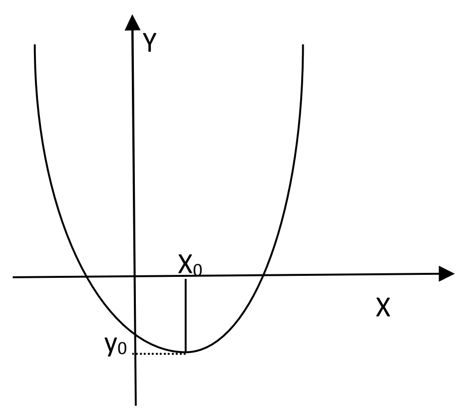
განვიხილოთ ამოცანა ტ. კვიციანის წიგნიდან „მათემატიკა პარამეტრის შემცველი განტოლებები, უტოლობები და სისტემები":

a-ს რა მნიშვნელობებისთვის იქნება $y=x^2-2ax+a-3$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე $[-3;+\infty)$შუალედი?

პირველი კოეფიციენტი 1-ის ტოლია, მეორე კოეფიციენტი $(-2a)$-ს, თავისუფალი წევრი კი $a-3$.

x^2-ის კოეფიციენტი დადებითა, ამიტომ პარაბოლის შტოები მიმართულია იქნება ზევით, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე - $[y_0;+\infty)$ შუალედი, ანუ $[-3;+\infty)$.

$y_0=-3 \;=>\; D=12 \;=>\; D=4a^2-4(a-3)=12 \;=>\; a(a-1)=0 \;=>\; a=0$ ან $a=1$



შემოწმებით დავადგენთ, რომ $a=0$ და $a=1$ მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ ამოცანის პირობას.

პასუხია: $a=0$ $a=1$.

ამოვხსნათ განტოლება გ. იასტრებინეცკის წიგნიდან “Уравнения и неравенства, содержащие параметры”

$$\frac{x}{b+1}+\frac{2x}{x-2}=\frac{3b-4}{(b+1)(x-2)}$$

თუ $(b+1)(x-2)\neq 0$, განტოლება

$x^2+2bx-3b+4=0$ განტოლების ტოლფასია

აქედან

$x_1=-b-\sqrt{b^2+3b-4}$, $x_2=-b+\sqrt{b^2+3b-4}$

აუცილებლად უნდა შემოწმდეს ხომ არ არსებობს b- ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ მიღებული ფესვებიდან ერთ-ერთი 2-ის ტოლი იყოს. ასეთი მნიშვნელობა არსებობს.

ჩავსვათ $x^2+2bx-3b+4=0$ განტოლებაში $x=2$, მივიღებთ b =-8. b-ს ამ მნიშვნელობისთვის $x=2$ ან $x=14$.

მაშასადამე, როცა b =-8, საწყის განტოლებას აქვს ერთი ფესვი $x=14$, ე.ი. როცა

b ≠-8, b≠-1 , განტოლებას აქვს ორი ფესვი:

$$x=-b\pm\sqrt{b^2+3b-4}$$

ეს ფესვები ნამდვილია, თუ b ≤-4 (b ≠-8), ან როცა b ≥1.

როცა b =-1 განტოლებას არ აქვს აზრი.

განვიხილოთ ასეთი ამოცანა, რომელიც მოცემული იყო თსუ მისაღებ გამოცდებზე მათემატიკაში 1979 წელს და რომელიც განხილულია თ. ვეფხვაძისა და ლ. ქურჩიშვილის ზემოთხსენებულ სტატიაში:

იპოვეთ a -ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც

$$a^2x^2+(2a-1)x-(a+1)=0$$

განტოლების ერთი ფესვი მეტია 1-ზე, მეორე ფესვი ნაკლებია 1-ზე.

$$f(x)=a^2x^2+(2a-1)x-(a+1)$$

გრაფიკზე დაკვირვებით დავრწმუნდებით, რომ აღნიშნული

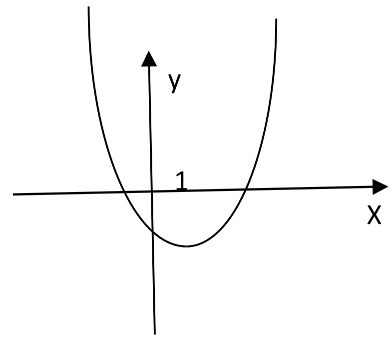
განტოლების ერთი ფესვი მეტია 1-ზე, მეორე ნაკლებია 1-ზე,

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(1) < 0$, ანუ

$$a^2 + 2a - 1 - a - 1 < 0$$

$$a^2 + a - 2 < 0$$

$$a \in (-2; 1)$$



ტ. კვიციანის წიგნიდან „მათემატიკა პარამეტრის შემცველი განტოლებები,

უტოლობები და სისტემები“:

განვიხილოთ კიდევ ერთი განტოლება

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$$

თუ, a =0 განტოლებას არ აქვს აზრი, x-ის მნიშვნელობა კი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს: x≠-1, x≠-2. გავამრავლოთ განტოლების ორივე მხარე $a(x+1)(x+2) \neq 0$ გამოსახულებაზე, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას

$$x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 2a - 3 = 0$$

აქედან $x_1 = a + 1$ $x_2 = a - 3$

მიღებულ ფესვებში შეიძლება შეგვხვდეს გარეშე ფესვებიც, რომელთა შემთხვევაში $(x+1)(x+2) = 0$. მათი დადგენისათვის აუცილებელია გავარკვიოთ m -ის რომელი მნიშვნელობებისთვისაა ფესვები (ან ერთი ფესვი) -2 ან -1.

$x_1 = a + 1 = -2$ როცა $a = -3$, ამასთან $x_2 = a - 3 = 6$

$x_1 = a + 1 = -1$ როცა $a = -2$, ამასთან $x_2 = a - 3 = -5$

$x_2 = a - 3 = -2$ როცა $a = 1$, ამასთან $x_1 = a + 1 = 2$

$x_2 = a - 3 = -1$ როცა $a = 2$, ამასთან $x_1 = a + 1 = 3$

ე.ი. თუ $a \neq 0,\ a \neq -3,\ a \neq \pm 2, a \neq 1,\ x_1 = a + 1,\ x_2 = a - 3$;

თუ $a = -3,\ x = -6$;

თუ $a = -2,\ x = -5$;

თუ $a = 1;\ x = 2$;

თუ $a = 2,\ \ x = 3$;

თუ $a = 0$, განტოლებას არ აქვს აზრი

უტოლობა

ორ ალგებრულ გამოსახულებას, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულები არიან > (მეტი) ან < (ნაკლები) ნიშნით, აგრეთვე ≥ (მეტია ან ტოლი) ან ≤ (ნაკლებია ან ტოლი) ნიშნით, უტოლობა ეწოდება.

ორ უტოლობას, რომლებიც შეიცავენ ერთი და იგივე ნიშანს > ან <, ეწოდებათ ერთნაირი აზრის უტოლობები. თუ ერთ უტოლობაში გვაქვს > ნიშანი, ხოლო მეორეში < ნიშანი, მაშინ მათ ურთიერთსაწინააღმდეგო აზრის უტოლობები ეწოდებათ.

ყოველ უტოლობაში მარცხენა და მარჯვენა მხარეები განიხილება მათში შემავალი ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეზე. ცვლადების მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომლისათვისაც უტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეში მდგომ გამოსახულებებს ერთდროულად აქვთ აზრი, უტოლობის დასაშვებ მნიშვნელობათა არე ეწოდება. ცვლადი სიდიდეების დასაშვები მნიშვნელობებისათვის უტოლობა გარდაიქმნება რიცხვით უტოლობად, სამართლიან (ჭეშმარიტ) ან არასამართლიან (მცდარ) უტოლობად.

უტოლობას, რომელიც მართებულია მასში შემავალი ცვლადი სიდიდეების ყველა დასაშვები მნიშვნელობებისათვის, ეწოდება იგივური. ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობა აგრეთვე იგივურია.

ცვლადის მნიშვნელობას, რომელიც ერთცვლადიან უტოლობას ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად აქცევს, ერთცვლადიანი უტოლობის ამონახსნი ეწოდება. თუ უტოლობა შეიცავს ერთზე მეტ ცვლადს, მაშინ მისი ამონახსნი ეწოდება, შესაბამისად ცვლადების მნიშვნელობათა დალაგებულ წყვილს, სამეულს და ა.შ., რომელიც უტოლობას ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად აქცევს.

უტოლობის ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. უტოლობის ამოხსნა ნიშნავს, მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას.

ერთი და იმავე ცვლადების შემცველ უტოლობებს ეწოდება ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია, როცა თითოეული ამონახსნი დალაგებულია ერთი და იმავე მიმდევრობით.

უტოლობებს, რომლებსაც ტოლი ამონახსნები აქვთ ტოლფასი უტოლობები ეწოდებათ.

უტოლობის ამოხსნისას ხდება მისი შეცვლა უფრო მარტივი ტოლფასი უტოლობით, რისთისაც სარგებლობენ შემდეგი თვისებებით:

1. თუ უტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, მივიღებთ მოცემული უტოლობის ტოლფას უტოლობას.

2. თუ უტოლობის ერთი მხრიდან მეორეში გადავიტანთ რომელიმე შესაკრებს მოპირდაპირე ნიშნით, მივიღებთ მოცემულის ტოლფას უტოლობას.

3. თუ უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ერთსა და იმავე დადებით რიცხვზე ან უტოლობაში შემავალი ცვლადების შემცველ ერთსა და იმავე გამოსახულებაზე, რომელიც დადებითია მასში შემავალი

ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის , მივიღებთ მოცემული უტოლობის ტოლფას უტოლობას.

4. თუ უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ერთსა და იმავე უარყოფით რიცხვზე ან უტოლობაში შემავალი ცვლადების შემცველ ერთსა და იმავე გამოსახულებაზე, რომელიც უარყოფითია მასში შემავალი ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და უტოლობის ნიშანს შევცვლით მოპირდაპირეთი, მივიღებთ მოცემული უტოლობის ტოლფას უტოლობას.

პარამეტრის შემცველი წრფივი უტოლობა

წრფივი ერთცვლადიანი უტოლობები (მკაცრი და არამკაცრი) ეწოდება შემდეგი სახის უტოლობებს:

$ax+b>0$ (1) $\quad ax+b\geq 0$ (3)

$ax+b<0$ (2) $\quad ax+b\leq 0$ (4)

ყოველ $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$ ან $ax+b\leq 0$ უტოლობას სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, ან პარამეტრიანი ფუნქციებია, ხოლო x ცვლადი სიდიდეა, ეწოდება წრფივი ერთუცნობიანი უტოლობა. $ax+b>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე განისაზღვრება a რიცხვის ნიშნით:

1) თუ $a>0$, მაშინ $x\in\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$;

2) თუ $a<0$, მაშინ $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$;

ანალოგიურად, $ax+b<0$ უტოლობისათვის გვექნება:

1) თუ $a>0$, მაშინ $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$; 2) თუ $a<0$, მაშინ $x\in\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$;

$ax+b\geq 0$. თუ $a>0$, მაშინ $x\in\left[-\frac{b}{a};+\infty\right)$; თუ $a<0$, მაშინ $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right]$

$ax+b\leq 0$. თუ $a>0$, მაშინ $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right]$; თუ $a<0$, მაშინ $x\in\left[-\frac{b}{a};+\infty\right)$.

შენიშვნა:

1. თუ $a=0$, $b\leq 0$, მაშინ $ax+b>0$ $\Rightarrow$ $x\in\varnothing$,

თუ $b>0$, მაშინ $ax+b>0$ $\Rightarrow x\in R$;

2. თუ $a=0$, $b<0$, მაშინ $ax+b<0$ $\Rightarrow x\in R$,

თუ $b\geq 0$, მაშინ $ax+b<0$ $\Rightarrow x\in\varnothing$.

ამოვხსნათ წრფივი უტოლობა:

$(m-1)x<5m$

როცა m=1, მაშინ 0x<5, რაც მართებულია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.

როცა m>1 გვექნება $x<\frac{5m}{m-1}$, ხოლო როცა m<1, მაშინ $x>\frac{5m}{m-1}$.

განვიხილოთ გ. იასტრებინეცკის წიგნიდან “Уравнения и неравенства, содержащие параметры”

წრფივ უტობოლობაზე დაყვანადი უტოლობა და ამოვხსნათ x- ის მიმართ.

$\frac{2x-5}{m-1}-\frac{x+7}{3}\leq\frac{3x-2m}{2(m-1)}$

როცა m=1, მაშინ უტოლობას არ აქვს აზრი.

როცა m>1 ე.ი. m-1>0, მაშინ საწყისი უტოლობა იქნება შემდეგი უტოლობის ტოლფასი.

$6(2x-5)-2(m-1)(x+7)\le 3(3x-2m)$

ან

$(2m-5)x\ge -8(m+2)$

აქედან, როცა m>2,5 მივიღებთ $x\ge\frac{-8(m+2)}{2m-5}$

თუ $1<m<2{,}5$ მივიღებთ $x\le\frac{-8(m+2)}{2m-5}$

თუ m=2,5, მაშინ $(2m-5)x\ge -8(m+2)$ უტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს: $0x\ge -36$

ე.ი. x–ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

თუ m<1, ხოლო თუ m-1<0 და საწყისი უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ (m-1)-ზე (ამასთან ერთად შევატრიალებთ უტოლობის ნიშანს), მივიღებთ შემდეგ უტოლობას

$6(2x-5)-2(m-1)(x+7)\ge 3(3x-2m)$

ან

$(2m-5)x\le -8(m+2)$,

რომელიც საწყისი უტოლობის ტოლფასი იქნება.

აქედან $x\ge\frac{-8(m+2)}{2m-5}$, რადგან 2m-5<0, როცა m<1.

ჩავწეროთ პასუხი:

თუ m<1, ან m>2,5, მაშინ $x\ge\frac{-8(m+2)}{2m-5}$;

თუ $1<m<2{,}5$, მაშინ $x\le\frac{-8(m+2)}{2m-5}$;

თუ m=2,5, x-ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია;

თუ m=1, მოცემულ უტოლობას არ აქვს აზრი.

განვიხილოთ კიდევ ერთი უტოლობა გ. იასტრებინეცკის წიგნიდან "Уравнения и неравенства, содержащие параметры":

$$\frac{2x-m}{(m-2)(x+3)}-\frac{m}{m-2}<\frac{3}{x+3}$$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე $m\neq2$, $x\neq-3$

გაერთმნიშვნელიანებით მივიღებთ

$$\frac{(2x-m)-m(x+3)}{(m-2)(x+3)}<\frac{3}{x+3}$$

$$\frac{(m-2)x-(6-7m)}{(m-2)(x+3)}>0$$

ან

$$\frac{x-\frac{6-7m}{m-2}}{x+3}>0$$

რაც ორი სისტემის გაერთიანების ტოფასია:

$$\begin{cases}\frac{6-7m}{m-2}<x\\-3<x\end{cases}$$

და

$$\begin{cases}\frac{6-7m}{m-2}>x\\-3>x\end{cases}$$

თითოეული მათგანის ამოხსნისათვის შევადაროთ სიდიდეები $\frac{6-7m}{m-2}$ და -3

ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი სხვაობა

$$\frac{6-7m}{m-2}-(-3)=-\frac{4m}{m-2}$$

$-\frac{4m}{m-2}<0$ როდესაც $\frac{4m}{m-2}>0$, ეი როდესაც m<0 ან m>2;

$-\frac{4m}{m-2}=0$ როდესაც m=0;

$-\frac{4m}{m-2}>0$ როდესაც $\frac{4m}{m-2}<0$ ე.ი. როდესაც 0<m<2

შესაბამისად,

$\frac{6-7m}{m-2}<-3$ როდესაც m<0 ან m>2.

$\frac{6-7m}{m-2}\geq-3$ როდესაც $0\leq m<2$

აქედან გამომდინარეობს $\frac{x-\frac{6-7m}{m-2}}{x+3}>0$ უტოლობის ამოხსნა და შესაბამისად საწყისი უტოლობის ამოხსნაც.

როდესაც m<0 ან როცა m>2, ამონახსნთა სიმრავლეა

$$\left(-\infty;\frac{6-7m}{m-2}\right)\cup(-3;+\infty);$$

როდესაც $0\leq m<2$, ამონახსნთა სიმრავლეა

$$(-\infty;-3)\cup\left(\frac{6-7m}{m-2};+\infty\right).$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი

გ. იასტრებინეცკის წიგნიდან “Уравнения и неравенства, содержащие параметры”:

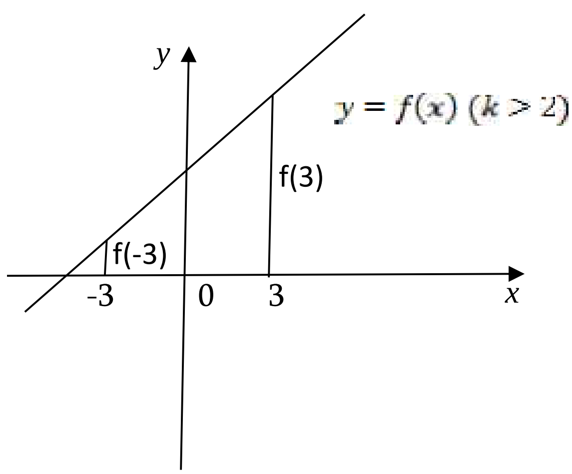
ვიპოვოთ k–ს ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$(k-2)x+4k+2>0$

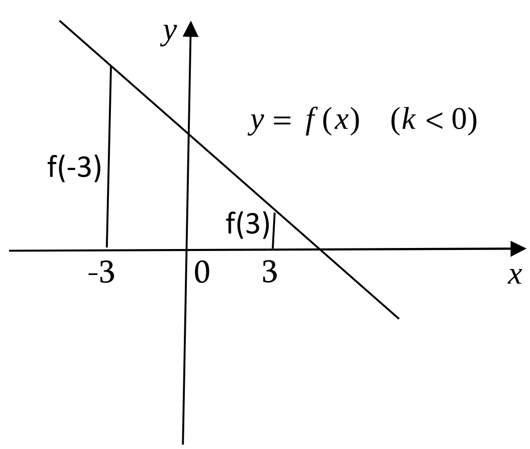
უტოლობა სრულდება ყველა იმ x–სთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|x|\leq 3$.

განვიხილოთ $f(x)=(k-2)x+4k+2$ ფუნქცია. f ფუნქცია k-ს ნებისმიერი ფიქსირებული მნიშვნელობსათვის წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას. OXY სიბრტყეზე f ფუნქციის გრაფიკს შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი მდებარეობა, მაგრამ $f>0$ პირობის შესასრულებლად $x\epsilon[-3;3]$ ინტერვალზე ფუნქციას უნდა ჰქონდეს ნახაზზე ნაჩვენები ერთერთი მდებარეობა.

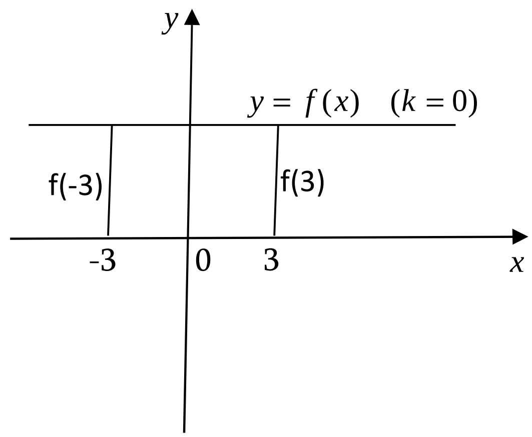
ა)



ბ)



გ)



როგორც ნახაზებიდან ჩანს, იმისათვის რომ შესრულდეს ამოცანის პირობა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობათა შემდეგ სისტემას:

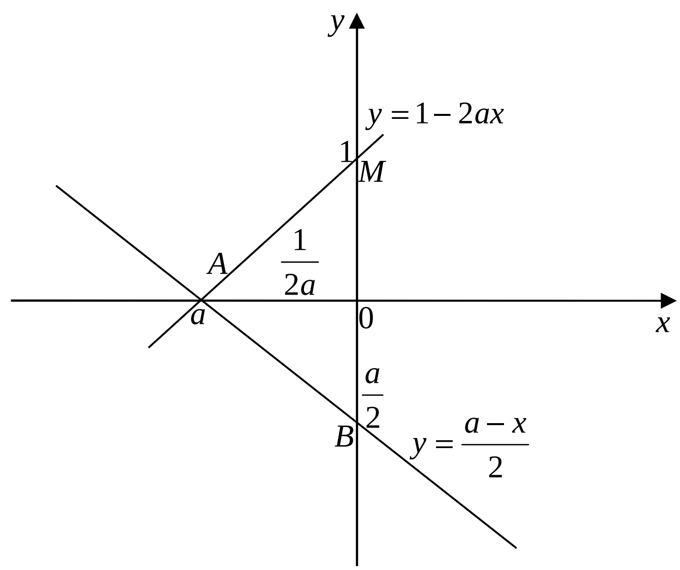
$$\begin{cases} f(-3) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(k-2)+4k+2>0 \\ 3(k-2)+4k+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -8 \\ k > \dfrac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow k > \frac{4}{7}$$

ჩავწეროთ პასუხი: $k \epsilon (\frac{4}{7}; +\infty)$.

განვიხილოთ П.И.Горнштеин, В.Б.Полонский, М.С. Якир "Задачи с параметрами" წიგნში (1998 წელი, გამომცემლობა „Илеска" „ Гимназия" Москва-Харьков) მოყვანილი სისტემა:

ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მოიძებნება x და y უარყოფითი რიცხვების წყვილი, რომელიც აკამყოფილებს პირობას: $\begin{cases} 2ax + y = 1 \\ x + 2y > a \end{cases}$

პირობით, $x < 0$, $y < 0$, საიდანაც $a < x + 2y < 0$, ანუ $a < 0$. $x + 2y > a$ უტოლობა ფარგლავს ნახევარ სიბრტყეს $x + 2y = a$ „მცურავი" საზღვრით.



უტოლობათა სისტემა

$$x<0, \quad y<0, \quad x+2y>a$$

შემოსაზღვრავს OAB სამკუთხედის შიდა არეს, რომლის წვეროების კოორდინატებია O(0;0), $A(a;0)$, B(0; $\frac{a}{2}$).

$y=-2ax+1$ ოჯახის ყველა წრფე გადის M(0;1) წერტილზე. ცხადია, რომ საწყის სისტემას ამონახსნი აქვს მაშინ, როცა მოცემული ოჯახის წრფეები აბსცისათა ღერძს კვეთენ A და O წერტილებს შორის მდებარე წერტილებში.

$y=-2ax+1$ წრფისათვის, როდესაც a ფიქსირებულია, აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილი იქნება $x=\frac{1}{2a}$. აქედან უნდა მოვითხოვოთ, რომ $a<\frac{1}{2a}<0$.

ჩავწეროთ პასუხი: $a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

პარამეტრის შემცველი კვადრატული უტოლობა

კვადრატული უტოლობები (მკაცრი და არამკაცრი) ეწოდება შემდეგი სახის უტოლობებს:

$$ax^2+bx+c>0 \quad (1) \qquad ax^2+bx+c\geq 0 \quad (2)$$

$$ax^2+bx+c<0 \quad (3) \qquad ax^2+bx+c\leq 0 \quad (4)$$

სადაც $a\ (a\neq 0),\ b$ და cნამდვილი რიცხვებია ან წარმოადგენენ რომელიღაც პარამეტრის ფუნქციებს (დასაშვებია პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც a, b და c-ნამდვილებია). (1), (2), (3) და (4) უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლე დამოკიდებულია $D=b^2-4ac$ დისკრიმინანტზე და

თუ $D\geq 0$, მაშინ დამოკიდებული იქნება აგრეთვე ax^2+bx+c კვადრატული სამწევრის ფესვებზე.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

D დისკრიმინანატს (1), (2), (3) და (4) უტოლობების დისკრიმინანატსაც უწოდებენ.

განვიხილოთ (1) უტოლობის ამოხსნა, როცა $a>0$, $D=b^2-4ac>0$. მაშინ ax^2+bx+c კვადრატულ სამწევრს აქვს ორი სხვადასხვა ნამდვილი ფესვი.

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $\quad x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ (5) ამასთან $x_1<x_2$. ამ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია, მართებულია ტოლობა

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

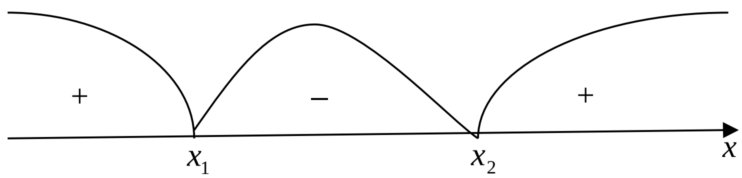
ამიტომ (1) უტოლობა ტოლფასია უტოლობისა

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0 \quad (6)$$

რადგან $a>0$, ამიტომ (6) ტოლფასი იქნება უტოლობისა

$(x-x_1)(x-x_2)>0 \quad (7)$

აღვნიშნოთ რიცხვთა ღერძზე x_1და x_2 წერტილები.



ცხადია, რომ ნამრავლი $(x-x_1)(x-x_2)$ დადებითია ნებისმიერი $x \in (-\infty;x_1) \cup (x_2;+\infty)$ და უარყოფითია ნებისმიერი $x \in (x_1;x_2)$-ისთვის. აქედან გამომდინარეობს, რომ (7) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება x -ის ყველა მნიშვნელობა $x<x_1$ და $x>x_2$ სიმრავლეებიდან. რადგან (7) უტოლობა ტოლფასია (1) უტოლობის, ამიტომ x -ის მხოლოდ ეს მნიშვნელობები იქნება (1) უტოლობის ამონახსნები, (1) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

$$(-\infty;\, x_1) \cup (x_2;\, +\infty).$$

ანალოგიურად, როცა $a>0$ და $D>0$, მაშინ (2) უტოლობის ამონახსნია

$$(-\infty;\, x_1] \cup [x_2;\, +\infty).$$

განვიხილოთ (1) უტოლობის ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა $a>0$ და $D=0$. მაშინ ax^2+bx+c კვადრატულ სამწევრს აქვს ორი ფესვი, რომლებიც ერთმანეთს ემთხვევა

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=x_0$$

ამ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია, მართებულია იგივეობა

$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$

ამიტომ (1) უტოლობა, როცა $a>0$ შეიძლება გადავწეროთ ასეთი სახით $a(x-x_0)^2>0$ (8)

რომელიც ჭეშმარიტია, ნებისმიერი x-სათვის, გარდა $x=x_0$ -სა. მაშასადამე, განსახილველ შემთხვევაში (1) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით $(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$ ან R\$x_0$, ხოლო (2) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე ამავე პირობებში ($a>0, D=0$) იქნება R, ანუ $(-\infty;+\infty)$.

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (3) უტოლობას, როცა $a>0$ და $D=0$, ამონახსნი არ აქვს, ხოლო (4) უტოლობას ექნება მხოლოდ $x=x_0$ მონახსნი.

განვიხილოთ (1) უტოლობის ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როდესაც $a>0$ და $D<0$, მაშინ ax^2+bx+c კვადრატულ სამწევრს ფესვები არ აქვს. ამ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია, სამართლიანია ტოლობა

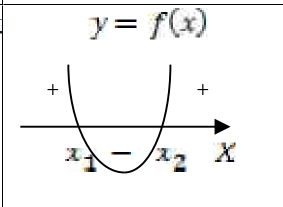
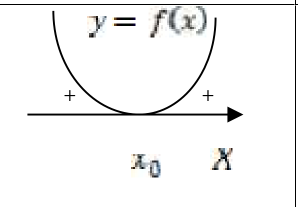
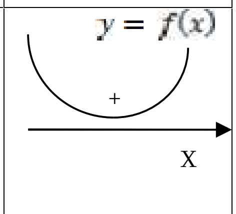
$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-D}{4a^2}\right)$$

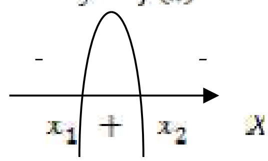
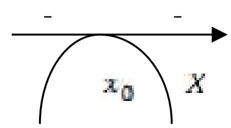
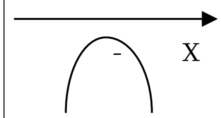
ამიტომ (1) უტოლობა ჩაიწერება ასეთ სახით

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-D}{4a^2}\right)>0 \qquad (9)$$

რადგან $a>0$ და $D<0$, ამიტომ (9) უტოლობა მართებულია ნებისმიერი x -სთვის. შესაბამისად, (1) და (2) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება *R*. (3) და (4) უტოლობას არ აქვს ამონახსნი, როცა $a>0$ და $D<0$.

კვადრატული უტოლობის ამოხსნა წარმოვადგინოთ ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით.

N N	a და D-ს მნიშვნელობები	$a > 0, D > 0$	$a > 0\,,\, D = 0$	$a > 0, D < 0$
0	1	2	3	4
1	$y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკი			
2	$ax^2 + bx + c > 0$ უტოლობის ამოხსნა	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
3	$ax^2 + bx + c \geq 0$ უტოლობის ამოხსნა	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
4	$ax^2 + bx + c < 0$ უტოლობის ამოხსნა	$(x_1; x_2)$	ამონახსნი არ აქვს	ამონახსნი არ აქვს
5	$ax^2 + bx + c \leq 0$ უტოლობის ამოხსნა	$[x_1; x_2]$	$\{x_0\}$	ამონახსნი არ აქვს

N N	a და D-ს მნიშვნელობები	$a<0, D>0$	$a<0$, $D=0$	$a<0, D<0$
0	1	2	3	4
1	$y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის გრაფიკი	$y=f(x)$ 	$y=f(x)$ 	$y=f(x)$ 
2	$ax^2+bx+c>0$ უტოლობის ამოხსნა	$(x_1;x_2)$	ამონახსნი არ აქვს	ამონახსნი არ აქვს
3	$ax^2+bx+c\geq 0$ უტოლობის ამოხსნა	$[x_1;x_2]$	$\{x_0\}$	ამონახსნი არ აქვს
4	$ax^2+bx+c<0$ უტოლობის ამოხსნა	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$
5	$ax^2+bx+c\leq 0$ უტოლობის ამოხსნა	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$

ამოვხსნათ $x^2+2x+a>0$ უტოლობა.

x^2+2x+a სამწევრისთვის $D_1=1-a$.

როცა D=0, ე.ი. როცა $a=1$, მაშინ მოცემული უტოლობა მიიღებს სახეს $(x+1)^2>0 \Rightarrow x\in R\backslash\{-1\}$

როცა $D<0$, ე.ი. როცა $a>1$, მაშინ $x\in R$

როცა D>0, ე.ი. როცა $a<1$, მაშინ x^2+2x+a სამწვრის ფესვებია

$x_1=-1-\sqrt{1-a}$, $x_2=-1+\sqrt{1-a}$

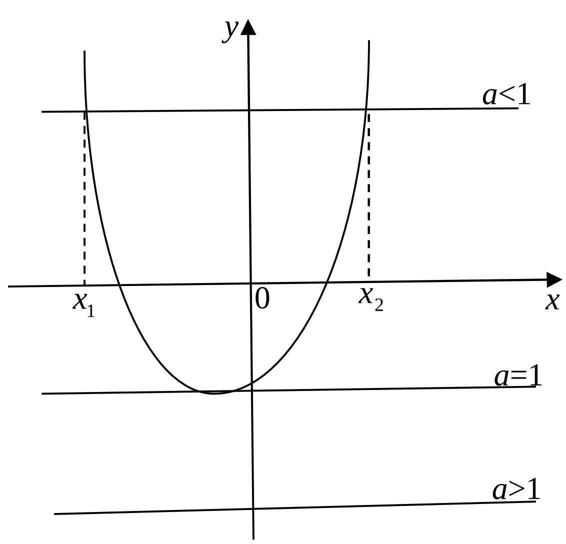
და უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება:

$(-\infty;-1-\sqrt{1-a})\cup(-1+\sqrt{1-a};+\infty)$

უტოლობის ამოხსნის ანალიზურ მეთოდთან ერთად მოვიყვანოთ მისი გრაფიკული ამოხსნა:

$x^2+2x+a>0$ უტოლობა წარმოვადგინოთ $x^2+2x>-a$ სახით და ავაგოთ $y=x^2+2x$ ფუნქციის გრაფიკი. $x^2+2x=-a$ განტოლების ამონახსნებია $y=x^2+2x$ პარაბოლისა და $y=-a$ წრფის გადაკვეთის წერტილების აბსცისები.

თუ $-a>-1$, ე.ი. როც $a<1$, მაშინ $x^2+2x>-a$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა $x<x_1$ და $x>x_2$; როცა $-a=-1$, ე.ი. $a=1$, მაშინ $x\in R\backslash\{-1\}$ როცა $-a<-1$, ე.ი., როცა $a>1$, მაშინ $x\in R$.



პასუხი: როცა $a > 1$, მაშინ $x \in R$;

როცა $a = 1$, მაშინ $x \in R\backslash\{-1\}$;

როცა $a < 1$,მაშინ$x \in \left(-\infty; -1-\sqrt{1-a}\right) \cup \left(-1+\sqrt{1-a}; +\infty\right)$ განვიხილოთ მაგალითი:

$mx^2 - 2(m-1)x + (m+2) < 0$

როცა $m = 0$, მაშინ უტოლობა იღებს $2x+2<0$ სახეს, რომლის ამონახსნია $x<-1$.

განვიხილოთ ფუნქცია:

f(x)= $mx^2 - 2(m-1)x + m + 2$, $m \neq 0$.

f(x)<0 უტოლობა კვადრატულია x-ის მიმართ.

ვთქვათ, f(x)-ის დისკრიმინანტია D

$$\frac{1}{4}D = (m-1)^2 - m(m+2) = 1 - 4m$$

თუ D<0, ე.ი. $m>\frac{1}{4}$, მაშინ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის f(x)-ის ნიშანი ემთხვევა m-ის ნიშანს. ე. ი f(x)>0 როცა $-\infty < x < \infty$.

ამრიგად, როცა $m>\frac{1}{4}$, f(x)<0 უტოლობას არ აქვს ამონახსნი.

თუ D=0, ე.ი. $m = \frac{1}{4}$, მაშინ $f(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^2$,

ე. ი. f(x)≥0 როცა $-\infty < x < \infty$.

შესაბამისად, როცა $m = \frac{1}{4}$, f(x)<0 უტოლობას აქვს ამონახსნი.

განვიხილოთ D>0 შემთხვევა, ე.ი. $m < \frac{1}{4}$ (m≠0).

x-ის ორი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის:

$x_1 = \frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m})$ და $x_1 = \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m})$ f(x)=0.

აქ განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1. $m<0$.

ამ შემთხვევაში $f(x)<0$ უტოლობის ამოხსნა ნიშნავს x-ის იმ მნიშვნელობებების მოძებნა, რომელთათვისაც f(x)-ის ნიშანი ემთხვევა m-ის ნიშანს. ამ კითხვაზე პასუხი რომ გავცეთ, შევნიშნოთ, რომ

$$-\sqrt{1-4m} < \sqrt{1-4m}$$

ე.ი.

$$m-1-\sqrt{1-4m} < m-1+\sqrt{1-4m}$$

მაგრამ, რადგან $m<0$, მაშინ

$$\frac{1}{m}\left(m-1-\sqrt{1-m}\right) > \frac{1}{m}\left(m-1+\sqrt{1+m}\right)$$

თუ R-ით აღვნიშნავთ უტოლობის ამონახსთა სიმრავლეს, მაშინ

$$R = \left(-\infty; \frac{1}{m}\left(m-1-\sqrt{1-4m}\right)\right) \cup \left(\frac{1}{m}\left(m-1+\sqrt{1-4m}\right); +\infty\right)$$

2. $0 < m < \frac{1}{4}$

ეხლა საწყისი უტოლობის ამოხსნისათვის, საკმარისოა მივუთითოთ x-ის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც f(x) და

m-ს საპირისპირო ნიშნები ექნებათ.

რადგან $0 < m < \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{m}(m-1-\sqrt{1-4m}) < \frac{1}{m}(m-1+\sqrt{1-4m})$$

და უტოლობის ამონახსნია

$$R = \left(\frac{1}{m}\left(m-1-\sqrt{1-4m}\right); \frac{1}{m}\left(m-1+\sqrt{1-4m}\right)\right)$$

შევაჯამოთ და ჩავწეროთ პასუხი:

როცა $m=0$, $R=(-\infty;+\infty)$

როცა $m<0$, $R=\left(-\infty;\frac{1}{m}\left(m-1-\sqrt{1-4m}\right)\right)\cup\left(\frac{1}{m}\left(m-1+\sqrt{1-4m}\right);+\infty\right)$

როცა $0<m<\frac{1}{4}$, $R=\left(\frac{1}{m}\left(m-1-\sqrt{1-4m}\right);\frac{1}{m}\left(m-1+\sqrt{1-4m}\right)\right)$

როცა $m\geq\frac{1}{4}$, მაშინ უტოლობას არ აქვს ამონახსნი, $R=\varnothing$.

განვიხილოთ მაგალითი წიგნიდან П.И.Горнштеин, В.Б.Полонский, М.С. Якир “Задачи с параметрами” (1998 წელი, გამომცემლობა „Илеска“ „ Гимназия“ Москва-Харьков):

ვიპოვოთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც

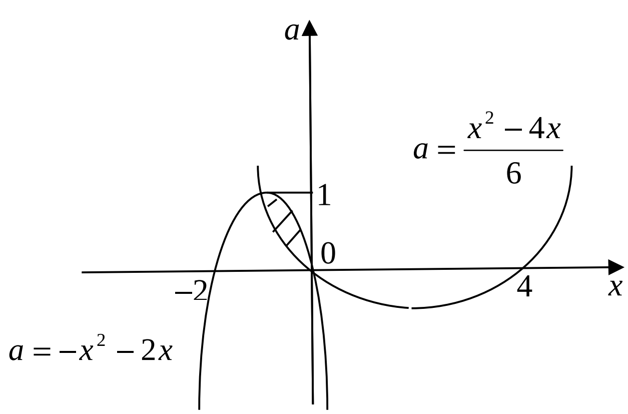
$$\begin{cases} x^2+2x+a\leq 0 \\ x^2-4x-6a\leq 0 \end{cases}$$

სისტემას აქვს ერთი ამონახსნი.

გადავწეროთ სისტემა შემდეგნაირად

$$\begin{cases} a\leq -x^2-2x \\ a\geq \dfrac{x^2-4x}{6} \end{cases}$$

ამ სისტემის ყველა ამონახსნი $(x;\ a)$ წყვილებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ მოცემულ უტოლობებს. ამონახსნი გრაფიკულად წარმოადგენს ორი პარაბოლის კვეთით მიღებულ არეს.



ნახაზიდან ჩანს, რომ როცა $a>1$ ან $a<0$, სისტემას ამონახსნი არა აქვს; როცა $0<a<1$, აქვს უამრავი ამონახსნი

ამოცანის პირობას (სისტემას აქვს ერთი ამონახსნი) მხოლოდ $a=0$ და $a=1$ წრფეები აკმყოფილებენ. შესაბამისად ჩავწეროთ პასუხი: $a=0$ ან $a=1$.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. აკადემიკოს ილია ვეკუას სახელობის ფიზიკა-მათემატიკის ქალაქ თბილისის N42 საჯარო სკოლის 2015-2016 სასწავლო წლის სასკოლო სასწავლო გეგმა . (2015). Retrieved 4 25, 2017, from http://vekua42.edu.ge

2. ბექაური თ.,საგინაშვილი ა., ბექაური გ.,. (2012-2017). *მათემატიკა VII კლასი, მოსწავლის წიგნი.* თბილისი: საქართველოს განათლების და მეცნიერების სამინისტრო.

3. ბექაური თ.,საგინაშვილი ა., ბექაური გ.,. (2012-2017). *მათემატიკა VIII კლასი, მოსწავლის წიგნი.* თბილისი: საქართველოს განათლების და მეცნიერების სამინისტრო.

4. ბექაური თ.,საგინაშვილი ა., ბექაური გ.,. (2012-2017). *მათემატიკა IX კლასი, მოსწავლის წიგნი.* თბილისი: საქართველოს განათლების და მეცნიერების სამინისტრო.

5. გაგნიძე ა., ლელაძე დ.,. (2006). *მათემატიკა, ამოცანათა კრებული IV გამოცემა.* თბილისი: უნივერსალი.

6. გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2009). *როგორ მოვემზადოთ ერთიანი ეროვნული გამოცდებისათვის.* თბილისი.

7. განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო (2014). *მიმდინარე სასწავლო გეგმები 2011-2016.* Retrieved 3 15, 2017, from http://ncp.ge: http://ncp.ge/ge/curriculum/satesto-seqtsia/mimdinare-esg-2011-2016

8. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.,. (2012). *მათემატიკა VII კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

9. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.,. (2012). *მათემატიკა VIII კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

10. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.,. (2012). *მათემატიკა IX კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

11. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.,. (2012). *მათემატიკის ამოცანათა კრებული VII კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

12. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.,. (2012). *მათემატიკის ამოცანათა კრებული VIII კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

13. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.,. (2012). *მათემატიკის ამოცანათა კრებული IX კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

14. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.,. (2003). *ალგებრა VII კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

15. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.,. (2003). *ალგბრა VIII კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

16. გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ.,. (2005). *ალგებრა IX კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

17. გოგიშვილი გ, ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ. . (2008). *გავიმეოროთ მათემატიკა, წიგნი აბიტურიენტებისა და მათემატიკის მასწავლებლებისთვის I ნაწილი.* თბილისი: ინტელექტი.

18. ვეფხვაძე თ., ქურჩიშვილი. (2015, N 3). გრაფიკების გამოყენებით პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების შესახებ. *სამეცნიერო პოპულარული ჟურნალი "მათემატიკა"*

19. ვულფოლკი ა. (2009). *განათლების ფსიქოლოგია.* თბილისი: ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა.

20. თოფურია ს.,აბესაძე გ., ოზბეგაშვილი გ, ხოჭოლავა ვ., მეტრეველი ზ., მაჭარაშვილი ნ., . (1991). *მათემატიკა I ნაწილი.* თბილისი: განათლება.

21. თოფურია ს.,ოზბეგაშვილი გ, ხოჭოლავა ვ., მეტრეველი ზ., მაჭარაშვილი ნ. (2006). *მათემატიკა პირველი ნაწილი ალგებრა და ანალიზის საწყიდები (თეორია და ამოცანათა კრებული)* თბილისი

22. კვიციანი ტ., (1999). *მათემატიკა -პარამეტრის შემცველი განტოლებები, უტოლობები და სისტემები .* თბილისი: ტექნიკური უნივერსიტეტი.

23. კობაიძე ვ. (2013). *მათემატიკა-სახელმძღვანელო ეროვნული საატესტატო გამოცდებისთვის მოსამზადებლად , მეორე გამოცემა.* თბილისი: შპს აბიტურიენტთა მომზადების ცენტრი.

24. მაკარიჩევი ი.,მინდიუკი ნ., ნეშკოვი კ., სუვოროვა ს. (1998). *ალგებრა მე-8 კლასის სახელმძღვანელო, მეათე გამოცემა.* თბილისი: განათლება.

25. მაკარიჩევი ი.,მინდიუკი ნ., ნეშკოვი კ., სუვოროვა ს. (1998). *ალგებრა მე-9 კლასის სახელმძღვანელო, მეათე გამოცემა.* თბილისი: განათლება.

26. მძინარიშვილი ლ., ზერიძე ლ., გელაშვილი მ., გველესიანი ს., დავითაძეა., მელაძე ო., მიმინოშვილი მ., მირზიაშვილი გ., რუხაძე რ., ჩეჩელაშვილი ნ., ხომერიკი ნ. . (1988). *მათემატიკის ამოცანათა კრებული (მეთოდური მითითებებითა და ამოხსნებით).* თბილისი: განათლება.

27. ლარიჩევი პ. (1971). *ალგებრის ამოცანათა კრებულიVII-VIIIკლასისთვის, ოცდამესამე გამოცემა.* თბილისი: განათლება.

28. ლექსიკონი. (2008). საქართველოს პარლამენტის ეროვნული ბიბიოთეკა. Retrieved 5 15, 2017, from http://www.nplg.gov.ge: http://www.nplg.gov.ge/gwdict/index.php?a=term&d=3&t=29733

29. სკანავი მ.ი.,(1976). *მათემატიკის მოცანათა კრებული უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში საკონკურსო გამოცდებისთვის .* თბილისი: განათლება.

30. ფხაკაძე შ. (1974). *განტოლებათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი* თბილისი: თსუ-ს გამომცემლობა.

31. ქართული საბჭოთა ენციკლოპედია (1984) თბილისი

32. ღვაზერიძე ზ., დვალიშვილი ფ., მოსიძე ა., გელაშვილი კ., სირბილაძე გ. (2008). *მათემატიკა აბიტურიენტებისათვის, მესამე გამოცემა.* თბილისი.

33. ღვაზერიძე ზ., დვალიშვილი ფ., მოსიძე ა., გელაშვილი კ., სირბილაძე გ. (2014). *მათემატიკა ალგებრა და ანალიზის საწყისები მეექვსე გამოცემა.* თბილისი.

34. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი. (2015). *2015 წლის ეროვნულ გამოცდებზე გამოყენებული ტესტები, პასუხები და შეფასების სქემა.* Retrieved 7 4, 2017, from https://edu.aris.ge: https://edu.aris.ge/news/2015-wlis-ertian-erovnul-gamocdebze-gamoyenebuli-testebi-da-pasuxebi-sagnebis-mixedvit.html

35. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2012). *ერთიანი ეროვნული გამოცდების ტესტები.* Retrieved 7 4, 2017, from https://eegtests.wordpress.com/: https://eegtests.wordpress.com/2013/06/01/2012-%E1%83%94%E1%83%A0%E1%83%9D%E1%83%95%E1%83%9C%E1%83%A3%

E1%83%9A%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98-
%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%A1%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%91%
E1%83%98/#more-261

36. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2011). *ერთიანი ეროვნული გამოცდების ტესტები.* Retrieved 7 4, 2017, from https://eegtests.wordpress.com/: https://eegtests.wordpress.com/2012/04/08/2011-%E1%83%94%E1%83%A0%E1%83%9D%E1%83%95%E1%83%9C%E1%83%A3%E1%83%9A%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98-%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%A1%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98/

37. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2010). *ერთიანი ეროვნული გამოცდების ტესტები.* Retrieved 7 4, 2017, from https://eegtests.wordpress.com/: https://eegtests.wordpress.com/2012/04/08/2010-%E1%83%94%E1%83%A0%E1%83%9D%E1%83%95%E1%83%9C%E1%83%A3%E1%83%9A%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98-%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%A1%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98/

38. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2009). *ერთიანი ეროვნული გამოცდების ტესტები.* Retrieved 7 4, 2017, from https://eegtests.wordpress.com/: https://eegtests.wordpress.com/2012/04/08/2009-%E1%83%94%E1%83%A0%E1%83%9D%E1%83%95%E1%83%9C%E1%83%A3%E1%83%9A%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98-%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%A1%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98/

39. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2008). *ერთიანი ეროვნული გამოცდების ტესტები.* Retrieved 7 4, 2017, from https://eegtests.wordpress.com/: https://eegtests.wordpress.com/2012/04/08/2008-%E1%83%94%E1%83%A0%E1%83%9D%E1%83%95%E1%83%9C%E1%83%A3%E1%83%9A%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98-%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%A1%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98/

40. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2007). *ერთიანი ეროვნული გამოცდების ტესტები.* Retrieved 7 4, 2017, from https://eegtests.wordpress.com/:

https://eegtests.wordpress.com/2012/04/08/2007-%E1%83%94%E1%83%A0%E1%83%9D%E1%83%95%E1%83%9C%E1%83%A3%E1%83%9A%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98-%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%A1%E1%83%A2%E1%83%94%E1%83%91%E1%83%98/

41. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2016, 7). ტესტი მათემატიკაში. Retrieved 4 3, 2017, from http://www.naec.ge: http://www.naec.ge/uploads/images/doc/MASC_SERT/masc-2016-07-math-geo.pdf

42. წულაძე ლ., (2008). რაოდენობრივი კვლევის მეთოდები სოციალურ მეცნიერებებში. Retrieved 3 5, 2017, from http://css.ge: http://css.ge/files/Books/Books/raodenobrivi_kvlevis_meTodebis_saxelomzgv.pdf

43. ჯაფარიძე ნ., წილოსანი მ., წულაია ნ. (2012). *მათემატიკა VII კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.

44. ჯაფარიძე ნ., წილოსანი მ., წულაია ნ. (2012). *მათემატიკა VIII კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.

45. ჯაფარიძე ნ., წილოსანი მ., წულაია ნ. (2012). *მათემატიკა IX კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.

46. ჯაფარიძე ნ., წილოსანი მ., წულაია ნ. (2012). *მათემატიკა X კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.

47. ჯაფარიძე ნ., წილოსანი მ., წულაია ნ. (2007). *მათემატიკა VIII კლასი.* თბილისი: საქართველოს მაცნე.

48. ჯაფარიძე ნ., წილოსანი მ., წულაია ნ. (2005). *მათემატიკა IX კლასი.* თბილისი: საქართველოს მაცნე.

49. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. (1998). *Задачи с параметрами .* Москва- Харьков: “Илекса” “Гимназия”.

50. Википедия. (n.d.). Уравнение (неравенство) с параметрами. Retrieved 2 15, 2017, from https://ru.wikipedia.org: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_(%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE)_%D1%81_%D0%BF%D0%

B0%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B8

51. Выгодский М. Я., (1966). *Справочник по элементарной математике издательство* . Москва : Наука.
52. Пойа Д., (1976). *Математическое открытие.* Москва : Наука.
53. Уравнения и неравенства с параметром как средство формирования исследовательских умений учащихся в 7–9 классах. (2011, 4 24). Retrieved 7 13, 2017, from http://knowledge.allbest.ru: http://knowledge.allbest.ru/pedagogics/3c0a65625a3ac78b5c43a88521316d37_2.html
54. Фуше А.,(1969). *Педагогика математики.* Москва : Просвещение.
55. Ястреинецкий Г.А.,(1972). *Уравнения и неравенства, содержащие параметры.* Москва : Просвещение.
56. КожуховС.К. (2013). *Уравнения и неравенства с параметром* Retrieved 2 12, 2017, from http://alexlarin.net: http://alexlarin.net/ege/2015/skk.pdf
57. Мирошин В. В., (2008). Формирование содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе математики общеобразовательной школы. Retrieved 8 25, 2016, from https://old.mgpu.ru: https://old.mgpu.ru/materials/4/4623.pdf
58. Толпекина Т. Н. (2002). *Методика организации учебных исследований при обучении учащихся решению уравнений, неравенств и их систем с параметрами* . Retrieved 2 2, 2017, from http://www.dissercat.com: http://www.dslib.net/teoria-vospitania/metodika-organizacii-uchebnyh-issledovanij-pri-obuchenii-uchawihsja-resheniju-uravnenij.html
59. Фалилеева М.В.(2013, N4). *МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ.* Retrieved 12 15, 2016, from www.fundamental-research.ru: https://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=31396
60. Ohse D.,(2009) *Basics of Algebra, Financial Mathematics and Statistics Part 2 :Applications 2nd Edition by Prof. Gmbh ProCredit Academy*

61. PISA. (2016, 11 25). PISA მოსწავლეთა შეფასების საერთაშორისო პროგრამა. Retrieved 2 15, 2017, from http://www.naec.ge: http://www.naec.ge/#/ge/post/1499

დანართები

დანართი 1

ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე მათემატიკის ტესტურ დავალებებში პარამეტრის შემცველი ამოცანები:

2005 წლის

ვარიანტი 1 N40

p და q 2-ზე მეტი მარტივი რიცხვებია და p> q . იპოვეთ ნატურალურ რიცხვთ ყველა ისეთი (x,y) წყვილი, რომელიც აკმაყოფილებს $x^2 - y^2 = pq$ ტოლობას.

ვარიანტი 2 N40

a და b ურთიერთმარტივი ნატურალური რიცხვებია, იპოვეთ ნატურალური რიცხვებისაგან შემდგარი ყველა ისეთი (x,y) წყვილი, რომელთათვისაც ჭეშმარიტია $ax + by = 4ab$ ტოლობა.

ვარიანტი 3 N40

ორ მოსწავლეს უნდა ამოეხსნა ერთი და იგივე კვადრატული განტოლება ცვლადის მიმართ. პირველ მოსწავლეს დაავიწყდა კოეფიციენტის გადაწერა, მან მოცემული განტოლების ნაცვლად უშეცდომოდ ამოხსნა განტოლება და მიიღო ფესვები 1 და 10. მეორე მოსწავლემ არასწორად გადაწერა საწყისი განტოლების კოეფიციენტი. ამის შემდეგ მანაც უშეცდომოდ ამოხსნა დაწერილი განტოლება და მიიღო ფესვები $\frac{2}{3}$ და 5. რისი ტოლი იყო თავდაპირველი განტოლების ფესვები?

ვარიანტი 4 N40

a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის აკმაყოფილებს $\begin{cases} ax+4y=-x \\ (a+1)x-3y=3 \end{cases}$ სისტემის (x,y) ამონახსნი $x-y<1$ უტოლობას?

2006 წელი

ვარიანტი 1 N32

იპოვეთ m-ის მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $\begin{cases} mx+5y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ სისტემას არ გააჩნია ამონახსნი.

ვარიანტი 1 N40

მოსწავლემ განიხილა $(a+1)x^2+2x-a=0$ სახის კვადრატული განტოლებები, სადაც a პარამეტრი ღებულობს ყველა მთელ მნიშვნელობას 1-დან 99-ის ჩათვლით. შემდეგ, ამოხსნა თითეული ეს განტოლება და იპოვა მიღებული ყველა ამონახსნის ნამრავლი. რისი ტოლია ეს ნამრავლი?

ვარიანტი 2 N32

იპოვეთ m-ის მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $\begin{cases} mx+5y=3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ სისტემას არ გააჩნია ამონახსნი.

ვარიანტი 2 N40

მოსწავლემ განიხილა $10x^2-px+p=0$ სახის კვადრატული განტოლებები, სადაც p პარამეტრი ღებულობს ყველა მთელ მნიშვნელობას -20-დან 80-ის ჩათვლით. ამ განტოლებებიდან მან ამოხსნა ყველა ის განტოლება, რომელთაც ორ-ორი ამონახსნი გააჩნდა. შემდეგ კი მან იპოვა ყველა მიღებული ამონახსნის ჯამი. რისი ტოლია ეს ჯამი?

ვარიანტი 3 N37

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $y = x^2 - 6ax + 9a^2 + 4$ პარაბოლის წვერო კოორდინატთა სათვიდან დაშორებულია 5-ის ტოლი მანძილით.

ვარიანტი 3 N40

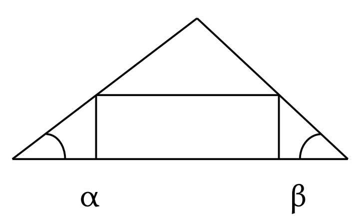
იპოვეთ m პარამეტრის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $2x + 6 = m$ და $4x^2 - 4(m+1)x + (m+4)(m-2) = 0$ განტოლებათა ფესვები წარმოადგენენ გეომეტრიული პროგრესიის მეზობელ წევრებს.

ვარიანტი 4 N37

იპოვეთ a და b პარამეტრები, თუ ცნობილია, რომ $y = ax^2 + bx + 5$ პარაბოლის გრაფიკი გადის (1;-2) და (-2;3) წერტილებზე.

ვარიანტი 4 N39

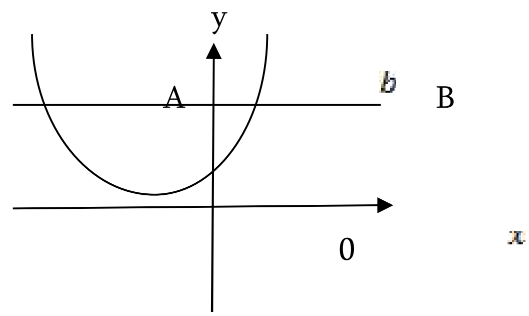
სამკუთხედში, რომლის ფუძეებთან მდებარე კუთხეების სიდიდეებია α და β , ჩართულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი ორი წვერო სამკუთხედის ფუძეზე მდებარეობს, ხოლო დანარჩენი ორი წვერო სამკუთხედის ფერდებზე (იხ. ნახაზი). იპოვეთ ამ ტიპის მართკუთხედებს შორის უდიდესისი ფართობის მქონე მართკუთხედის გვერდების შეფარდება.



2007 წელი

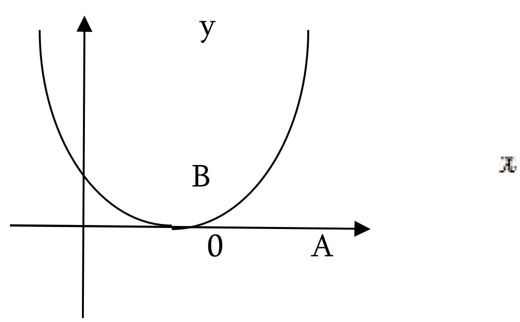
ვარიანტი 1 N37

$y = b$ წრფე კვეთს $y = x^2 + 3x + 4$ პარაბოლას A და B წერტილებში (იხ.ნახაზი). იპოვეთ b პარამეტრის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც A და B წერტილებს შორის მანძილი 5-ის ტოლია.



ვარიანტი 2 N37

$y = x^2 + px + q$ განტოლებით მოცემული ფინქციის გრაფიკი აბსცისათა ღერძს ეხება A წერტილში და ორდინატთა ღერძს კვეთს B წერტილში (იხ. ნახაზი). იპოვეთ p და q კოეფიციენტების მნიშვნელობები, თუ A და B წერტილებს შორის მანძილი $2\sqrt{3}$-ის ტოლია.



2008 წელი

ვარიანტი 1 N34

b პარამეტრის რა მნიშვნელობებისატვის წარმოადგენს $\sqrt{b+3}\cdot x^2-2bx+8=0$ განტოლების ამონახსნს რიცხვი 2?

ვარიანტი 1 N40

k პარამეტრის თითოეული მთელი მნიშვნელობისათვის, რომლისთვისაც $x^2+(k-10)x+9=0$ განტოლებას გააჩნია ორი განსხვავებული დადებითი x_1და x_2 ამონახსნი, შეადგინეს გამოსახულება $x_1^2+x_2^2$. რა უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს ამ გამოსახულებამ?

ვარიანტი 2 N37

a პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის გააჩნია

$$\begin{cases} x^2+y^2=2a+4 \\ x+y=a+3 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემას ერთადერთი ამონახსნი?

ვარიანტი 2 N40

k პარამეტრის თითოეული მთელი მნიშვნელობისათვის, რომლისთვისაც $x^2-x\sqrt{5k-1}+20-k=0$ განტოლებას გააჩნია ორი განსხვავებული დადებითი x_1და x_2 $(x_1>x_2)$ამონახსნი შეადგინეს გამოსახულება$x_1^2-x_2^2$. რა უმცირესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს ამ გამოსახულებამ?

2009 წელი

ვარიანტი 1 N31

იპოვეთ a და b პარამეტრების ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც

$(a+1)x-2b=bx+3$ განტოლებას აქვს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა.

ვარიანტი 2 N31

იპოვეთ a და b პარამეტრების ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $2ax-3b=5x-1$ განტოლებას არ აქვს ამონახსნი.

ვარიანტი 2 N40

მეწარმემე 5 მილიონ ლარად შეიძინა პირველი საწარმოს აქციათა სრული ღირებულების m%, ხოლო 7 მილიონ ლარად კი-მეორე საწარმოს აწციათა სრული ღირებულების n%. იპოვეთ პირველი და მეორე საწარმოს აქციათა სრული ღირებულების ყველა შესაძლო მნიშვნელობები, თუ ცნობილია, რომ ეს ღირებულებები მილიონ ლარებში გამოისახება მთელი რიცხვებით და

$m+n=100.$

2010 წელი

ვარიანტი 1 N36

მოძებნეთ pპარამეტრის ყველა მნიშვნელობა მარტივ რიცხვთა სიმრავლიდან, რომლისთვისაც $6x^2-12x+3=p(x-2)$განტოლებას x ცვლადის მიმართ გააჩნია ერთი მაინც მთელი ამონახსნი.

ვარიანტი 2 N36

იპოვეთ $y=p$ და $y=|x^2+2x-15|$ ფუნქციათა გრაფიკების ყველა გადაკვეთის წერტილი, რომლის ორივე კოორდინატი მთელი რიცხვია, თუ p პარამეტრი იღებს ყველა მნიშვნელობებს მარტივ რიცხვთა სიმრავლიდან.

2011 წელი

ვარიანტი 1 N36

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მთელი მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-2a)$ და $y=\log_3(x-2a^3-3a^2)$ ფუნქციათა გრაფიკები გადაიკვეთებეიან წერტილებში, რომელთა კოორდინატები მთელი რიცხვებია.

ვარიანტი 2 N36

იპოვეთ ყველა ისეთი მთელი x და y რიცხვების წყვილი, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას $x^2-6xy+10y^2=4$.

2012 წელი

ვარიანტი 1 N40

a პარამეტრის თითოეული მნიშვნელობისათვის (-5;2) შუალედიდან განვიხილოთ O^{xy} მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეში $\begin{cases} 5+a-|2y|\geq 0 \\ |x|\leq \frac{|a-2|}{2} \end{cases}$ უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლით განსაზღვრული ფიგურა. იპოვეთ ამ ფიგურების ფართობებს შორის უდიდესი და დაადგინეთ a -ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მიიღწევა ეს უდიდესი ფართობი.

ვარიანტი 2 N40

a პარამეტრის თითოეული დადებითი მნიშვნელობისათვის განვიხილოთ O^{xy} მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეში $\begin{cases} 2-|ay|\geq 0 \\ x^2-a^2\leq 0 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემი ამონახსნთა სიმრავლით განსაზღვრული ფიგურა. იპოვეთ ამ ფიგურების პარამეტრებს შორის უმცირესი და დაადგინეთ a -ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მიიღწევა ეს უმცირესი პარამეტრი.

2013 წელი

ვარიანტი 1 N40

მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეში განვიხილოთ t პარამეტრზე დამოკიდებული წერტილები: $A(\cos(3-t);\sin(3-t))$, $B(\cos t;\sin t)$ და $C(-\cos t;-\sin t)$. t პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის მიიღებს ABC სამკუთხედის ფრთობუ უდიდეს მნიშვნელობას, თუ $t \in (0;1)$?

ვარიანტი 2 N40

მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეში განვიხილოთ t პარამეტრზე დამოკიდებული წერტილები: $A(2\cos t;2\sin t)$, $B(-\cos(2-t);-\sin(2-t))$, $C(-2\cos t;-2\sin t)$ და $D(\cos(2-t);\sin(2-t))$. t პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის მიიღებს ABCD ოთხკუთხედის ფართბი უდიდეს მნიშვნელობას, თუ $t \in (0;1)$?

2014 წელი

ვარიანტი 1 N36

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $5x - 2ax - 15 = 0$ განტოლების ამონახსნები ნაკლებია 3-ზე.

ვარიანტი 1 N40

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც

$\sin(\sqrt{ax - x^2}) = 0$

განტოლების ყველა ამონახსნის ჯამი 100-ის ტოლია.

ვარიანტი 2 N36

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $8x + 3ax - 11 = 0$ განტოლების ამონახსნები მეტია 1-ზე.

2015 წელი

ვარიანტი 1 N35

იპოვეთ k პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $y = kx - 5$ წრფეს $y = 8x^2$ პარაბოლასთან აქვს ერთი მაინც საერთოდ წერტილი.

ვარიანტი 2 N35

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $y = x + 3(a - 2)$ წრფე არ კვეთს $y = x^2 - 2x + 2a$ პარაბოლის გრაფიკს.

2016 წელი

N23

b პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება $3x + 2y - 8 = 0$ და $2x - by = 2y - 5$ განტოლებებით განსაზღვრული წრფეები ურთიერთმართობული მართკუთხა საკოორდინატო სიბრტყეში?

ა) $-\frac{10}{3}$ ბ) $-\frac{4}{3}$ გ)1 დ)3

N26

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $y = \log_{a^2+1,5a} x$ ფორმულით განსაზღვრული ფუნქცია იქნება ზრდადი.

ა) $(\frac{1}{2}; +\infty)$

ბ)$(1; +\infty)$

გ)$(-\infty; 0)$

დ)$(-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

დანართი 2

მოსწავლეთა შეფასების საერთაშორისო პროგრამა

PISA

2009 წლის კვლევის ეროვნული ანგარიში

მათემატიკის მიღწევის დონეების აღწერა

მიღწევის დონეები	დავალებების მახასიათებლები
მე-6 საფეხური	მეექვსე საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ საკუთარი დაკვირვებებიდან ან კომპლექსური პრობლემური სიტუაციის მოდელირებიდან მიღებული ინფორმაციის კონცეპტუალიზაცია, განზოგადება და გამოყენება. მათ შეუძლიათ სხვადასხვა წყაროსა და რეპრეზენტაციის ერთმანეთთან დაკავშირება. ამ საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ უფრო მაღალი რიგის სააზროვნო უნარების გამოყენება და მსჯელობა. გარდა ამისა, ამ მოსწავლეებს აქვთ უნარი, გამოიყენონ ცოდნა სიმბოლური და ფორმალური მათემატიკური ოპერაციებისა და ურთერთკავშირების შესახებ და მათზე დაყრდნობით შეიმუშაონ შესაფერისი მიდგომები და სტრატეგიები ახალი სიტუაციის/პრობლემის გადასაჭრელად. ამ საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ თავიანთი ემოციების, ინტერპრეტაციების, მიგნებების, არგუმეტებისა და მათი შესაბამისობების მიხედვით ქცევებისა და ფიქრის პროცესის ფორმულირება და ზუსტად გადმოცემა.
მე-5 საფეხური	მეხუთე საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ შექმნან და იმუშაონ მოდელებთან კომპლექსურ სიტუაციებში, დაადგინონ წინააღმდეგობა და დააზუსტონ დაშვებები. მათ შეუძლიათ ამ მოდელებთან დაკავშირებული კომპლექსური პრობლემების გადაჭრის დროს შესაფერისი სტრატეგიის შერჩევა, შედარება და შესაბამისობის მიხედით შეფასება. ამ საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ სტრატეგიულად მუშაობა და ფართო, კარგად განვითარებული სააზროვნო და სამსჯელო უნარების გამოყენება. მათ შეუძლიათ საკუთარი ქმედებების გაანალიზება და ინტერპრეტაციისა და მსჯელობის ფორმულირება და გადმოცემა.
მე-4 საფეხური	მეოთხე საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ ეფექტიანად მუშაობა ექსპლიციტურად მოცემულ მოდელებთან, რომლებიც შეეხება კომპექსურ კონკრეტულ სიტუაციას და შეიძლება მოიცავდეს წინაღობას ან მოითხოვდეს დაშვებების გაკეთებას. მათ შეუძლიათ სხვადასხვა რეპრეზენტაციის, მათ შორის სიმბოლური რეპრეზენტაციის, შერჩევა და

	ინტეგრირება, მათი რეალურ სიტუაციებთან პირდაპირ დაკავშირება. ამ საფეხურზე მოსწავლეები იყენებენ კარგად ჩამოყალიბებულ უნარებს, შეუძლიათ მოქნილები იყვნენ აზროვნებისას და ავლენენ მოცემული კონტექსტების გარკვეულ ცოდნას. მათ აქვთ უნარი საკუთარ ინტერპრეტაციებზე, არგუმენტებსა და ქმედებებზე დაყრდნობით ახსნან რაიმე ფენომენი და გასაგებად ჩამოაყალიბონ შესაბამისი არგუმენტები.
მე-3 საფეხური	მესამე საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ ნათლად აღწერილი პროცედურების შესრულება, მათ შორის ისეთების, რომლებიც მოითხოვს თანმიმდევრული/ეტაპობრივი ქმედებების განხორციელებას. მათ შეუძლიათ პრობლემის გადაჭრის მარტივი მეთოდის შერჩევა და გამოყენება. ამ ეტაპზე მოსწავლებს შეუძლიათ სხვადასხვა წყაროს გამოყენების ანდა მათზე მსჯელობის მეშვეობით მრავალი რეპრეზენტაციის განმარტება და სათანადოდ გამოყენება. მოსწავლეებს აქვთ უნარი მოკლედ და ნათლად ახსნან ფენომენი, გადმოსცენ მიღებული შედეგები და იმჯელონ ამ საკითხის შესახებ.
მე-2 საფეხური	მეორე საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ სიტუაციების ინტერპრეტირება და ამოცნობა ისეთ კონტექსტში, რომელიც არ შემოიფარგლება უბრალოდ პირდაპირი ციტირებით. მათ შეუძლიათ შესაბამისი ინფორმაციის მიღება ერთი წყაროდან და ერთი რეპრეზენტაციის გამოყენება. ამ საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ გამოიყენონ ძირითადი ალგორითმები, ფორმულები, პროცედურები ან პირობები. ამ საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ პირდაპირი მსჯელობა და ასევე შედეგების პირდაპირ ახსნა და წარმოდგენა.
პირველი საფეხური	პირველ საფეხურზე მოსწავლეებს შეუძლიათ ისეთ შეკითხვებზე გასცენ პასუხები, რომლებიც ეხება მათთვის ნაცნობ კონტექსტს, რომელშიც ყველა საჭირო ინფორმაცია ექსპლიციტურადაა მოცემული, შეკითხვები კი - მკაფიოდ ჩამოყალიბებული. მათ შეუძლიათ ინფორმაციის ამოცნობა და განსაზღვრული პროცედურის შესრულება, რომელიც თვალნათლივაა მოცემული ინსტრუქციების სახით. მოსწავლეები ასრულებენ მარტივ მოქმედებებს და მიჰყვებიან შეკითხვის შემდეგ უშუალოდ მოცემულ ინსტრუქციას.

დანართი 3

პარამეტრის შემცველი სავარჯიშოები მათემატიკის გრიფირებულ სახელმძღვანელოებში

მე-7 კლასის სახელმძღვანელო "მათემატიკა"- ავტორები: გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი.

მოცემულ სახელმძღვანელოში პარამეტრის შემცველ წრფივი განტოლებაზე გვხვდება გვ. 142-ზე N8, N9 და N10 სავარჯიშოები, რომლებიც ფაქტიურად წრფივი განტოლების ამოხსნადობის შესახებ თეორიის ცოდნის შემოწმებაა.

N8 თუ $a \neq 0$, მაშინ $ax = b$ განტოლებას

1) ორი ფესვი აქვს 2) არა აქვს ფესვი 3) ერთ ფესვი აქვს: $\frac{b}{a}$.

N9 თუ $a = 0$ და $b \neq 0$, მაშინ $ax = b$ განტოლებას

1) ერთ ფესვი აქვს: $x = \frac{b}{a}$ 2) არა აქვს ფესვი 3) ორი ფესვი აქვს

N10 თუ $a = 0$, $b = 0$, მაშინ $ax = b$ განტოლებას

1) ერთ ფესვი აქვს 2) უამრავი ფესვი აქვს 3) ფესვი არა აქვს.

აგრეთვე მათი მსგავსი სავარჯიშო N21 გვ. 143 -ზე:

დაასრულეთ მოცემული განტოლების ჩაწერა $ax = b$ სახემდე, რომ შესრულდეს მითითებული პირობა:

ა) $\cdots x = 3$, განტოლებას ფესვი არა აქვს;

ბ) $2x = \cdots$ განტოლების ფესვია მხოლოდ 0;

გ) $\cdots x = \cdots$ განტოლებას უამრავი ფესვი აქვს;

დ) $\cdots x = 5$ განტოლებას ერთადერთ ფესვი აქვს -$\frac{1}{5}$.

მე-8 კლასის სახელმძღვანელო "მათემატიკა"- ავტორები: გ. გოგიშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი

გვ.64 შეარჩიეთ სწორი პასუხი:

N12 მოცემულია დებულება:

- ყოველ წრფივ განტოლებას$(ax = b)$ ერთადერთი ამონახსნი აქვს. ამ დებულების

მცდარობის დამადასტურებელი კონტრმაგალითია განტოლება

1)$-5x = 17$

2)$(a^2 + 1)x = -5$

3)$-5x = 0$

4)$0 \cdot x = 0.$

გვ.94

N10 ცნობილია, რომ უსგ $(a, b) = k$ და $ax + c$ განტოლებას აქვს მთელი ამონახსნი. მაშინ

1) c არის k-ს გამყოფი
2) k არის c -ს გამყოფი
3) k არ არის c -ს გამყოფი.

N16 თუ (3;5) არის $ax + by = c$ $(a \neq 0, b \neq 0)$განტოლების ამონახსნი, მაშინ (3;-5) არის

1) $ax - by = c$ განტოლების ამონახსნი
2) $-ax + by = c$ განტოლების ამონახსნი
3) $ax + by = -c$ განტოლების ამონახსნი

4) $-ax-by=c$ განტოლების ამონახსნი

გვ.95

N17 t-ს რა მთელი მნიშვნელობისთვის არის $x=1+2t; y=1+t$ რიცხვების წყვილი $x+2y=3$ განტოლების ამონახსნი?

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

N18 t -ს ნებისმიერი მთელი მნიშვნელობისთვის $x+2y=3$ განტოლების მთელი ამონახსნია

1) $x=1+2t, y=1+t$

2) $x=1+2t, y=1-t$

3) $x=2-t, y=2+t$

4) $x=1-2t, y=1-t$

N19 t-ს რა მთელი მნიშვნელობისთვის არის $x=2-t; y=2+t$ რიცხვების წყვილი $x+2y=3$ განტოლების ამონახსნი?

1) -3 2) 1 3) 2 4) 0

N21 თუ $b=0,\ a\neq 0,\ c\neq 0$, მაშინ $ax+by=c$ განტოლების გრაფიკული გამოსახულება

1) აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფეა
2) ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფეა
3) ორდინატთა ღერძის მართბული წრფეა.

N23 თუ წრფე აბსცისათა ღერძის პარალელურია და მისი განტოლება $ax+by=c$, მაშინ

1) $b=0,\ a\neq 0,\ c\neq 0$
2) $a=0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$

3) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

გვ.96

N29 ცნობილია, რომ $12u - 15v = 132$ განტოლების ერთ-ერთ ამონახსნია რიცხვთა წყვილი, რომელშიც $v = 0$. იპოვეთ u -ს შესაბამისი მნიშვნელობა.

საინტერესო ამოცანაა N3 გვ.97 ჯგუფური სავარჯიშოსათვის

1 ტონა ხორბალი გადაიტანეს 60კგ. და 80კგ. ტევადობის სავსე ტომრებით. თითოეული ზომის რამდენი ტომარა იყო გამოყენებული? სულ მცირე რამდენი ტომარა იქნებოდა საჭირო?

- შეადგინეთ ამოცანის პირობის მიხედვით წრფივი ორუცნობიანი განტოლება

  60კგ-იანი ტომრების x ოდენობისა და 80 კგ-იანი ტომრების y ოდენობის მიმართ.

- შეიძლება თუ არა ამოცანის პირობის მიხედვით x ან y უარყოფით რიცხვები ან

  ნული იყოს?

- შეეცადეთ იპოვოთ მიღებული ორუცნობიანი სისტემის რაიმე ერთი ამონახსნი $(x_0; y_0)$.
- გამოიყენეთ წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ერთ-ერთი თვისება

  და ჩაწერეთ რაიმე t ცვლადის გამოყენებით ნებისმიერი მთელი ამონახსნი.

- შეეცადეთ იპოვოთ t-ს ის მნიშვნელობები, როცა ეს განტოლება არაუარყოფით

  მთელ რიცხვებში ამოიხსნება.

- რომელია მათ შორის ის $(x; y)$ ამონახსნი, რომლისთვისაც $x + y$ უმცირესია, რის

  ტოლია ესუმცირესი მნიშვნელობა?

გვ.99

N2 a და b რიცხვების $(a; b)$ წყვილი არის

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი, თუ ჭეშარიტია ტოლობები

1) $a_1a + b_1b = c_1$ და $a_2b + b_2b = c_2$

2) $a_1b + a_1a = c_1$ და $a_2b + a_2b = c_2$

3) $a_1a + b_1b = c_1$ და $a_2a + b_2b = c_2$

გვ.101

N11 ცნობილია, რომ $(a; -7)$ წყვილი არის $2x + y = 12$ განტოლების ამონახსნი. არის თუ არა ეს წყვილი $\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ 10x + 12y = 11 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნიც?

N12 ცნობილია, რომ $(2a; a + 4)$ წყვილი არის $4x + 2y = -3$ განტოლების ამონახსნი. არის თუ არა ეს წყვილი $\begin{cases} 3y - x = 11 \\ 2,5x + 2y = 0,3 \end{cases}$ სისტემის ამონახსნიც?

გვ.105

N4 ვთქვათ,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

სისტემის მეორე განტოლებაში შემავალი რიცხვები a_2, b_2და c_2შესაბამისადa_1, b_1, c_1რიცხვების პროპორციულია, მაშინ განტოლებებით მოცემული წრფეები

1) ერთ წერტილში იკვეთება და სისტემას ერთადერთ ამონახსნი აქვს
2) არ იკვეთება და სისტემას არა აქვს ამონახსნი
3) ერთმანეთს ემთხვევა-სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს.

N7 ვთქვათ, სისტემა მოცემულია შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} y = k_1 x + l_1, \\ y = k_2 x + l_2. \end{cases}$$

ა) თუ $k_1 = k_2$და $l_1 = l_2$, მაშინ რა შეიძლება ვთქვათ ამ განტოლებებით მოცემული წრფეესზის შესახებ? სოსტემის ამონახსნების შესახებ (არსებობზს ერთადერთ ამონახსნი, უამრავი ამონახსნი, თუ ამონახსნი არ არსებობს)?

უპასუხეთ ანალოგიურ კითხვებს შემდეგ შემთხვევაში:

ბ)$k_1 = k_2, l_1 \neq l_2$.

გ) რა შემთხვევა დაგვრჩა განსახილველი?– $k_1 \neq k_2$. ამჯერადაც უპასუხეთ წინა შემთხვევების ანალოგიურ კითხვებს (წინასწარ კი იპოვეთ სათანადო წრფეთა საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთს წერტილთა კოორდინატები).

გვ.106

N11 ცნობილია, რომ

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 10x + ky = 3 \end{cases}$$

სისტემას არ აქვს ამონახსნი. იპოვეთ k .

ასეთივე შინაარსისაა მომდევნო სავარჯიშო N12.

ხოლო სავარჯიშო N13-ში მოითხოვენ პარამეტრის პოვნას, როცა სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.

გვ.107

N14 ცნობილია, რომ

$$\begin{cases} ax + y = b \\ 6x + 5y = 15 \end{cases}$$

სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს. იპოვეთ a და b.

N16 ცნობილია, რომ $a_1x + b_1y = c_1$და $a_2x + b_2y = c_2$ განტოლებების გრაფიკები კოორდინატთა სათავეში იკვეთება. დაასახელეთ

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის რაიმე აონახსნი. რამდენი ამონახსნი შეიძლება ჰქონდეს ამ სისტემას?

N19 ცნობილია, რომ

$$\begin{cases} ax + y = c \\ 1{,}5x - y = -1 \end{cases}$$

სისტემას არ აქვს ამონახსნი. ამასთანავე, პირველი განტოლების გრაფიკი ორდინატთა ღერძს (0; 3,5) წერტილში კვეთს. იპოვეთ a და c.

გვ.111

N19 (მოცემულია 4 მაგალითი) გამოიყენეთ სისტემის ამოხსნის ჩასმის ხერხი და მოცემული სისტემა შეცვალეთ მისი ტოლფასი სისტემით, რომლის ერთ-ერთი განტოლებაx და y ცვლადებიდან მხოლოდ ერთ-ერთს შეიცავს. იპოვეთ a-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს:

ა) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 1.5y = a \end{cases}$

გვ.112

N20 (მოცემულია 4 მაგალითი) ჩასმის ხერხის გამოყენებით შეცვალეთ მოცემული სისტემა მისი ტოლფასი სისტემით, რომლის ერთ-ერთი განტოლება მხოლოდ ერთ უცნობს შეიცავს და იპოვეთ a-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას არ აქვს ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 4x - 12y = a \end{cases}$

გვ.117

N13 (მოცემულია 4 მაგალითი) გამოიყენეთ სისტემის ამოხსნის შეკრების ხერხი და იპოვეთ a -ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას არა აქვს ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 10x + ay = 5 \end{cases}$

მომდევნო სავარჯიშო N14-ში მოცემულია მსგავსი ერთ პარამეტრიანი 4 სისტემა, სადაც მოითხოვენ პარამეტრის იმ მნიშვნელობების პოვნას, რომ მოცემულ სისტემებს უამრავი ამონახსნები ქონდეს.

გვ.122

N12 მოცემული ორი მგზავრის მოძრაობის გრაფიკი აბცისათა ღერძზე გადაზომილია დრო, ხოლო ორდინატთა ღერძზე მანძილი. დასაწყისში მგზავრებს შორის მანძილიS_0 კმ-ია, დროის t_0მომენტში ერთის სიჩქარე 1,2-ჯერ მეტია მეორე მგზავრის სიჩქარეზე და მოითხოვენ t_0 და S_0 რიცხვების შერჩევას, ამოცანის შედგენას და უცნობი სიჩქარეების მიმართ წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის შედგენით და ამოხსნით ამოცანის ამოხსნას.

გვ.123-ზე მოცემულია პროექტი სადაც მოცემულია აგრეთვე მოძრაობის გრაფიკი. მოითხოვენ ამოცანის შედგენას და გარკვეული ანალიზის ჩატარებას.

გვ.144

N17 ცნობილია, რომ $\sqrt{x} = m$. მაშინ

1) $x^2 = m^2$ 2) $x = \sqrt{m}$ 3) $x^2 = m$ 4) $x = m^2$.

გვ.235

ჯგუფური სავარჯიშო: გრაფიკზე მოცემულია ორი წრფე $y = k_1x + l_1$ და $y = k_2x + l_2$. ითხოვენ მათი ურთიერთმდებარეობის დასაბუთებას პითაგორას თეორემის გამოყენებით და მის გარეშეც, აგრეთვე კონკრეტული შემთხვევის განხილვაც.

გვ.274

N14 თუ $k < 0$ და $kx < 5$, მაშინ

1) $x > \frac{k}{5}$ 2) $x < \frac{k}{5}$ 3) $x > -\frac{5}{k}$ 4) $x > \frac{5}{k}$.

N15 თუ $b < 0$ და $3x \geq b$, მაშინ

1) $x \leq -\frac{b}{3}$ 2) $x \geq \frac{3}{b}$ 3) $x \leq \frac{b}{3}$ 4) $x \geq \frac{b}{3}$.

გვ.280

N11 ცნობილია, რომ ტოლფასია უტოლობები

$ax \geq 12$ და $x \leq \frac{12}{a}$.

მაშინ აუცილებლად

1) $a > 12$ 2) $a > 0$ 3) $a < 0$ 4) $a \geq 0$

მე-9 კლასის სახელმძღვანელო "მათემატიკა"- ავტორები: გ.გოგიშვილი, თ.ვეფხვაძე, ი.მებონია, ლ.ქურჩიშვილი

გვ.9 მოცემულია 5 ერთნაირი ტიპის სავარჯიშო (N6-დან N10-ის ჩათვლით).

მაგლითად :

N8 თუ რაიმე a და b ნატურალური რიცხვებისთვის $ax = b$ განტოლების ფესვიც ნატურალურია, მაშინ

1) a არის b -ს ჯერადი
2) a არის b -ს გამყოფი
3) a და b თანამარტივი რიცხვებია
4) აუცილებლად, $a = b$.

გვ.63

N7 a-ს მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც $\begin{cases} x > 5 \\ x < a \end{cases}$ სისტემას არ აქვს ამონახსნი, არის

1) 5-ზე მეტი რიცხვები
2) 7-ზე მეტი რიცხვები
3) რიცხვები, რომლებიც 5-ს არ აღემატება
4) 6-ზე მეტი რიცხვები.

N8 თუ A არის უტოლობის $ax + b > 0$ ამონახსნთა სიმრავლე,

B არის $cx + d > 0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე (x უცნობია), მაშინ

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d > 0 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე აუცილებლად არის

1) $A \cup B$ 2) $A \cap B$ 3) A 4) B.

გვ.65

N20 იპოვეთ a, თუ ცნობილია, რომ

$$\begin{cases} 3x-6\geq 0 \\ 10+3x\leq a-4 \end{cases}$$

უტოლობათა სისმეტას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

გვ.67

N37 a-ს რა მნიშვნელობებისათვის არის $3x-2a=5$ განტოლების ამონახსნი 10-ზე ნაკლები არაუარყოფითი რიცხვი?

გვ.68

N39 იპოვეთ a-ს იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლეთათვისაც

$$\begin{cases} 100-25{,}5x\geq -2 \\ 4x+a-2\geq 5 \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემას არა აქვს ამონასხსნი.

გვ.108-109-ზე მოცემულია 3 სავარჯიშო (N3,N7 და N8) რომლებიც $y=kx+l$ წრფივ ფუნქციის გრაფიკის მდებარეობას ეხება, k კოეფიციენტის მიხედვით.

გვ.110-ზე არის 3 ერთნაირი ტიპის სავარჯიშო (N16,N17 და N18). მაგალითად:

N17 ცნობილია, რომ $y=kx+l$ ფუნქციის გრაფიკი გადის (2;3) და (3;2) წერტილებზე. იპოვეთk და l.

გვ.152-153-ზე მოცემულია 8 მარტივი სავარჯიშო (N1,N2,N3,N6,N8,N9,N16 და N17)

მაგალითად:

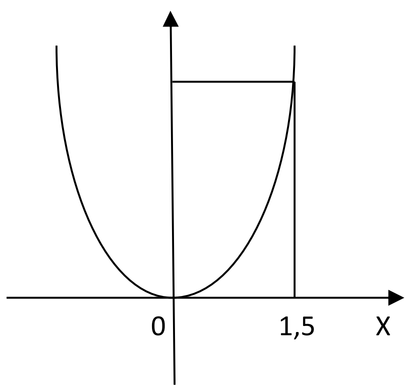
N6 თუ $y=-2x^2$ პარაბოლასა და$y=a$ წრფეს არა აქვს საერთო წერტილი, მაშინ

1) $a > 0$ 2) $a = 0$ 3) $a < 0$ 4) aნებისმიერია.

N9 იპოვეთb , თუ ცნობილია, რომ $y = x^2$პარაბოლის წერტილია:

ა) A (-1,2; b); ბ) B(b; 4,84).

N16 სურათზე $y = ax^2$პარაბოლაა გამოსახული .იპოვეთ a.



გვ. 158-159-ზე მოცემულია 5 სავარჯიშო (N1, N2, N3, N4 და N5) ოთხ მათგანში პარაბოლის გრაფიკული გამოსახულებაა და ითხოვენ გრაფიკის მიხედვით ოთხი სავარაუდო ვარიანტიდან კოეფიციენტების ნიშნების გამოცნობას, ზოგიერთში დისკრიმინანტის ნიშნის გამოცნობასაც. N2-ში კი მოითხოვენ 4 ვარიანტიდან

$y = ax^2 + bx + c$ პარაბოლის წვეროს წერტილის გამოცნობას.

გვ.161

N18 ცნობილია, რომ $y = x^2 + ax + 3$ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძია$x = 6$. იპოვეთ a და პარაბოლის წვერო. ააგეთ პარაბოლა.

N19 ცნობილია, რომ $y = 4x^2 - 16x + 13$ და $y = ax^2 - 2x + b$ პარაბოლის წვეროები ერთ წერტილშია. იპოვეთ a და b.

N20 ცნობილია, რომ $y = ax^2 - 3x - 8$ პარაბოლა აბსცისათა ღერძს (-2;0) წერტილში კვეთს. იპოვეთ a , სიმეტრიის ღერძი, აბსცისათა ღერძთან მეორე გადაკვეთის წერტილი და ააგეთ პარაბოლა.

გვ. 164-166-ზე მოცემულია 11 სავარჯიშო

სადაც N8, N9,N10, N11, N13,N20,N21, N22, N23,N24 და N25 ერთნაირი ტიპისაა.

მაგალითად:

N8 $ax^2 - 4x + 1 = 0$ კვადრატულ განტოლებას ერთი ფესვი აქვს, როცა

1) $a > 4$ 2) $a < 4$ 3) $a = 4$ 4) $a = -4$.

N24 იპოვეთ a -ს უმცირესი მთელი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$y = x^2 - 6x + 5a$ კვადრატულ ფუნქციას ნული არა აქვს.

N15 k-ს რა მნიშვნელობბებისთვის კვეთს $f(x) = kx^2 - 5x - 7$ ფუნქციის გრაფიკი x ღერძს ორ წერტილში?

N16 და N17-ში პარაბოლებია გამოსახული და თითოეულ შემთხვევაში ითხოვენ კოეფიციენტების ნიშნების დადგენას.

N10 სავარჯიშოში ითხოვენ კვადრატული განტოლების ამონახსნის განსაზღვრას ზოგადი ფორმულიდან, როდესაც დისკრიმინანტი 0-ია, ხოლო სავარჯიშო N13 არის D_1-ის ფორმულის გამოყვანა.

გვ. 170 არის ორი სავარჯიშო, რომლებიც თეორიის ცოდნის შემოწმებაა:

N40 თუ $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2 მაშინ $ax^2 + bx + c =$

1) $b(x - x_1)(x - x_2)$ 2) $c(x - x_1)(x - x_2)$

3) $-b(x - x_1)(x - x_2)$ 4) $a(x - x_1)(x - x_2)$.

N41 თუ $ax^2+bx+c=0$ განტოლებას მხოლოდ ერთი ფესვი აქვს ეს ფესვია α, მაშინ

$ax^2+bx+c=$

1) $(x-\alpha)^2$ 2) $a(x-\alpha)^2$

3) $b(x-\alpha)^2$ 4) $c(x-\alpha)^2$.

გვ.171-ზე მოცემულია 7 ერთნაირი ტიპის სავარჯიშო (N43, N44, N45, N46, N47, N48 და N52). მაგალითად:

N46 ცნობილია, რომ $x^2+mx-m^2=0$ განტოლების ფესვები $x^2+kx-4=0$ განტოლების ფესვების 2-ზე გამრავლებით მიიღება. იპოვეთ k და m .

N52 ვთქვათ, x_1 და x_2 არის $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ფესვები. გამოსახეთ $x_1^2+x_2^2$ გამოსახულება a, b და c კოეფიციენტებით.

გვ.177-ზემოცემულია 3 ერთნაირი ტიპის სავარჯიშო N11 (8 მაგალითით) N12 (4 მაგალითით) N13 (4 მაგალითით).

N11 a -ს რა მნიშვნელობისთვისაა უტოლობა ჭეშმარიტი ნებისმიერი x -ისთვის:

ა)$x^2-4x+a\geq 0$

N13 იპოვეთ a -ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი x -ისთვის:

ბ) $y=\sqrt{ax^2-x-4}$

გვ. 190 და 191-ზე გვხვდება ორი სავარჯიშო N7 და N8, რომელებშიც მოცემულია ბიკვადრატული განტოლების ზოგადი სახე და მოითხოვება ფესვების რაოდენობებსა და კოეფიციენტებისა, აგრეთვე და დისკრიმინანტს შორის კავშირის დადგენა. ეს სავარჯიშოები თეორიის ცოდნის შემოწმებაა.

N7 $ax^4+bx^2+c=0$ ბიკვადრატულ განტოლებას ოთხი ფესვი აქვს, როცა

1) $b^2-4ac=0$ 2) $b^2-4ac>0, \frac{c}{a}>0, \frac{b}{a}<0$

3) $b^2-4ac>0, \frac{c}{a}>0, \frac{b}{a}>0$ 4) $b^2-4ac>0, \frac{c}{a}<0$.

N8 თუ $b^2-4ac<0$, მაშინ $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$ განტოლებას

1) ერთი ფესვი აქვს 2) არა აქვს ფესვი

3) ორი ფესვი აქვს 4) ოთხი ფესვი აქვს.

გვ.205

N16 თუ $a\neq 0, b=0$ და $ax+by+c=0$ მაშინ განტოლებით მოიცემა

1) x ღერძის პარალელური წრფე

2) y ღერძის პარალელური წრფე

3) კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფე

4) წრეწირი.

გვ. 213-ზე მოცემულია 3 სავარჯიშო N2, N3 და N4. აქედან N3 და N4 ერთნაირი ტიპისაა.

მაგალითად:

N2 ცნობილია, რომ $ax+3y-4>0$ უტოლობის ერთერთ ამონახსნია (-5;8) წყვილი. მაშინ

1) $a>0$ 2) $a>8$ 3) $a<0$ 4) $0<a<8$.

N3 ვთქვათ, $b>0$. შეარჩიეთ უტოლობა, რომლის ამონახსნთა სიმრავლე ემთხვევა $ax+by+c>0$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეს.

1) $y>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 2) $y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 3) $y>\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ 4) $y>-\frac{a}{b}x+\frac{a}{b}$.

მე-7 კლასის სახელმძღვანელო "მათემატიკა"- ავტორები: ნ.ჯაფარიძე, მ.წილოსანი და ნ.წულაია

გვ.215

N8 იპოვეთ a, თუ $ax + 7 = 4x - 1$ განტოლეის ამონახსნია $x = -2$.

გვ. 220

N9* იპოვეთ, რა რიცხვია განტოლებაში აღნიშნული a ასოთი, თუ ცნობილია, რომ განტოლების ამონახსენია 2, ხოლო უცნობი აღნიშნულია ასოთი x:

ა)$x + 5 = a;$

ბ)$2x - 7a = -3;$

გ)$ax + 3 = 5$.

გვ.238

N14* a-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება

$(2a - 1)x + a - 3 = 0$ განტოლების ფესვი:

ა) 2-ის ; ბ) 0-ის ; გ) -1-ის ტოლი.

N16* იპოვეთ ისეთი $a \in Z$, რომ $(a - 1)x = 12$ განტოლებას ნატურალური ამონახსენი ჰქონდეს.

მე-8 კლასის სახელმძღვანელო "მათემატიკა"- ავტორები: ნ.ჯაფარიძე, მ.წილოსანი და ნ.წულაია

გვ. 106

N2 რიცხვითი ღერძის საშუალებით აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მპყვანილი უტოლობათა სისტემა ტოლფასია ორმაგი უტოლობისა:

ბ) $\begin{cases} x > -a \\ x < a \end{cases}$ და $-a < x < a$, თუ $a > 0$.

თავი III რიცხვით უტოლობის თვისებები

დამატებითი სავარჯიშოები

გვ.111

N25 a -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს განტოლებას

1)დადებითი ფესვი, 2)უარყოფით ფესვი:

ა)$7x = 12a$

ბ)$2x - a = 3a + 5$

გ)$5x - 4 = 2a + 3$

N26* m-ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება განტოლების ფესვი 1)3-ზე მეტი, 2)2-ზე ნაკლები:

ა)$2x = 3m - 1;$

ბ)$7x - m = 2m + 1.$

გვ. 113

N45*იპოვეთ a -ს მთელი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას

ა) $\begin{cases} x > 0 \\ x \le a + 1 \end{cases};$ ბ)$\begin{cases} x > 0 \\ x \le 9 \end{cases}$

მხოლოდ ოთხი ნატურალური ამონახსენი აქვს.

გვ.249 თავი V- დამატებითი სავარჯიშოები ორუცნობიან განტოლებათა სისტემა.

N27* გრაფიკულად დაადგინეთ a -ს რა მნიშვნელობებისათვის ექნება განტოლებას

1) ერთადერთი ამონახსენი; 2) არცერთი ამონახსენი; 3) უამრავი ამონახსენი:

ა)$ax = x + 2;$

ბ)$(a - 1)x = 5x;$

გ)$(a + 1)x = 5.$

N30 იპოვეთ a -ს მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ წყვილი ა)(3;-3); ბ)(5;-7) არის $(a-1)x+y=2a-1$ განტოლების ამონახსენი.

N37 იპოვეთ a -ს მნიშვნელობა, თუ $ax+(5a-1)y=1$ განტოლების გრაფიკი გადის:

ა)A(-1;3); ბ)B(2;-3) წერტილზე a -ს შესაბამისი მნიშვნელობისათვის ააგეთ მოცემული განტოლების გრაფიკი.

N38 $2x-5y=1$და$(2a-1)x+y=a$ წრფეები იკვეთება A(3;*) წერტილში. ვარსკვლავის ნაცვლად ჩასვით საჭირო რიცხვი და იპოვეთ a -ს მნიშვნელობა.

N39*b-ს რა მნიშვნელობისათვის იკვეთება $bx+2y=5$ და $x+y=4$ წრფეები ღერძზე მდებარე წერტილში?

გვ 250

N42 * 3 სისტემა

იპოვეთ c-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სისტემას 1)ამონახსენი არ აქვს; 2)აქვს უამრავი ამონახსენი; 3)აქვს ერთადერთი ამონახსენი:$(c \neq 0)$ (სამი სისტემა)

ა)$\begin{cases} cx+3y=17 \\ 4x-10y=45 \end{cases}$

მე-9 კლასის სახელმძღვანელო "მათემატიკა"- ავტორები: ნ.ჯაფარიძე, მ.წილოსანი და ნ.წულაია

გვ. 47

N4$x^2=b-1$ განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ამონახსენი, თუ:

ა) $b>0$; ბ) $b\geq 0$;გ) $b<0$; დ)$b>1$.

N7 თუ $x^2+kx+15=0$ განტოლების ფესვია 5, მაშინ $k=$

ა)5; ბ)-8; გ) 8; დ)10.

გვ. 49

N13 a -ს რა მნიშვნელობისათვის არის განტოლების ერთ-ერთი ფესვი 2-ის ტოლი.

ა)$5a = 2x^2$;

N14 და N15 სავარჯიშოები მსგავსია, მაგალითად:

N14 დაამტკიცეთ, რომ თუ$a + b + c = 0$, მაშინ $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ერთერთი ფესვი 1-ის ტოლია.

N16 (4 კვადრატული განტოლება) და N17 (4 კვადრატული განტოლება) მოითხვება პარამეტრის მნიშვნელობის დადგენა განტოლების ამონახსნებთან მიმართებაში.

N16* იპოვეთ a-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას ექნება ერთი ამონახსენი:

ა)$2x^2 - (3a - 1)x + a - 1 = 0$

გვ 55

N63 დაშალეთ მამრავლებად შემდეგი სამწევრი:

ე)$x^2 - ax - 2a^2$

N65 $x^2 + 4x + q = 0$განტოლების ფესვების სხვაობა 6-ის ტოლია. იპოვეთ q.

N70 განსაზღვრეთ a -ს მნიშვნელობა, რომლისათვისაც

$a^2 + a(x - 1) = 2 + \frac{7}{2x}$განტოლებას აქვს მოდულით ტოლი და ნიშნით განსხვავებული ფესვები.

N71 იპოვეთ a-ს მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $7x^2 - a(x - 1) = 7$განტოლების ფესვები აკმაყოფილებს პირობას:$x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$.

N72 $x^2+px+35=0$ განტოლების ფესვების ჯამი ფესვების ნამრავლზე 23-ით ნაკლებია. იპოვეთ p და განტოლების ფესვები.

გვ. 94-95 მოცემულია 4 მსგავსი სავარჯიშო სადაც ითხოვენ გამოტოვებული ადგილების შევსებას:

N3 თუ $y=ax^2$ პარაბოლის შტოები მიმართულია ქვევით, მაშინ $a\ ?\ 0$.

გვ 97-ზე მოცემული ორი სავარჯიშო N16 და N17 დამოუკიდებელი კვლევისთვის. პირველში მოცემულია ორი პარამეტრის შემცველი კვადრატული ფუნქცია და კომპიუტერული პროგრამის Geogebra-ს მეშვეობით ითხოვენ მათი გრაფიკების აგებას და მათ შორის მსგავსება-განსხვავებაზე მსჯელობას, აგრეთვე პარამეტრის გავლენის დადგენას წვერს კოორდინატზე. შემდეგ სავარჯიშოში ითხოვენ ორი კვადრატული ფუნქციის მოცემული ზრდადობის შუალედისთვის პარამეტრის ყველა მნიშვნელობის დადგენას.

გვ. 103-ზე მოცემულია ორი მსგავსი სავარჯიშო N6 დაN7, სადაც კვადრატული ფუნქციის ზოგადი სახეა მოცემულია და a, b და c რიცხვების პოვნას ითხოვენ კონკრეტული მოცემული წერტილების გრაფიკზე მდებარეობის მიხედვით.

გვ. 110 მოცემულია ორი მსგავსი სავარჯიშო პარამეტრის შემცველ კვადრატულ ფუნქციაზე სადაც მოითხოვენ გამოტოვებული ადგილების დადგენას.

მაგალითად:

1. $y=2x^2+bx-5$ ფუნქცია უარყოფითია, როცა მოთავსებულია ფესვებს ?

გვ. 111-ზე მოცემულია 6 სავარჯიშო (N 4-დან N9-ის ჩათვლით). ამ სავარჯიშოებში მოცემულია კვადრატული ფუნქციის ზოგადი სახეები და მაგალითად ფუნქციის ნულების, ან ორდინატთა ღერძთან კვეთის

წერტიილს მიხედვით ან მოცემული გრაფიკის მიხედვით მოითხოვება სიმეტრიის ღერძის, ან პარამეტრების ან პარამეტრების ნიშნების დადგენა.

მომდევნო გვ. 112-ზე გვხვდება კიდევ ერთი ზოგადი სახით ჩაწერილი კვადრატული ფუნქცია (N17*), სადაც გარკვეული პირობების ჩამოყალიბებით მოითხოვენ ფუნქციების ნულების განლაგებას.

გვ.115 III თავი პარაბოლის მდებარეობა საკოორდინატო ღეძების მიმართ

N9 * a პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის იქნება მართებული უტოლობა ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის?

ა)$2x^2-(a+1)x+3>0$;

ბ)$a^2x^2+2ax+1>0$;

გ)$(a-1)x^2-(a-1)x+a+1>0$.

გვ.116

N12 იპოვეთ a -ს ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $2x^2+ax+1\leq 0$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა.

გვ.120

N5 k-ს რა მნიშვნელობისთვის ექნება $y=kx^2-5x+a$ პარაბოლასა და $kx+y+3=0$ წრფეს : ა) ერთი; ბ) ორი; გ) არც ერთი საერთო წერტილი.

მე-10 კლასის სახელმძღვანელო "მათემატიკა"- ავტორები: ნ.ჯაფარიძე, მ.წილოსანი და ნ.წულაია

გვ. 30

N23 სქემატურად დახაზეთ $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ ფუნქციის გრაფიკი, თუ ცნობილია, რომ $af(1) < 0$. როგორაა განლაგებული $x = 1$ წერტილის მიმართ მოცემული ფუნქციის ნულები?

გვ.32

N6 იპოვეთ a-ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც y ფუნქციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა $x = 2$ წერტილში.

$$y = \begin{cases} x + 1, & \text{თუ } x < 2 \\ a, & \text{თუ } x = 2 \\ 5 - x, & \text{თუ } x > 2 \end{cases}$$

გვ. 84 მოცემულია პარაგრაფი 1 პარამეტრის შემცველი განტოლება

პარაგრაფში მოცემულია წრფივი განტოლების ამოხსნის საკითხი პარამეტრებთან მიმართებაში. მოცემულია სქემა:

$ax = b$

- $a = 0$
  - $b = 0$: $0 \cdot x = 0$, $x \in R$
  - $b \neq 0$: $0 \cdot x = b$, $x \in \emptyset$
- $a \neq 0$: $x = \dfrac{b}{a}$

აქვე მოცემლია პარამეტრის შემცველი წრფივი ორი განტოლების ამოხსნის მგალითი:

ა) $(a-1)x = a^2 - 1$

1) თუ $a-1 \neq 0, a \neq 1$,მაშინ$(a-1)x = (a-1)(a+1)x = a+1$.

2) თუ $a = 1$,მაშინ გვექნება:$0 \cdot x = 0x \in R$.

პასუხი:$a \neq 1, x = a+1; a = 1, x \in R$.

შემდეგ მოცემული 3 მსგავსი სავარჯიშო სადაც მოითხოვენ გამოტოვებული ადგილის შევსებას. მაგალითად:

გვ 85

N3 $(a^2-9)x = a+3$ განტოლებას უამრავი ამონახსენი აქვს, თუ $a = ?$

ამავე გვერდზეა პარამეტრის შემცველი სავარჯიშო N1, რომელშიც მოცემულია 12 მსგავსი მაგალითი შემდეგი პირობით:

ამოხსენით განტოლება x-ის მიმართ:

ზ) $(a+2)x = a^2 - 4$

გვ 86

N2 პარამეტრის რა მნიშვნელობისას არის განტოლების ფესვი:

ა) $ax = 3a - 5, \ x_0 = -1;$

სულ 4 მაგალითი.

N3 k პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის:

1) არა აქვს განტოლებას ამონახსენი?

2) აქვს განტოლებას უამრავი ამონახსენი?

3)აქვს განტოლებას ერთადერთი ამონახსენი?

დ)$x^2 - kx + k + 3 = 0$.

სულ 4 მაგალითი.

N4 a და b-ს რა მნიშვნელობისთვისაა წყვილი (3;-1) სისტემის ამონახსენი?

ა) $\begin{cases} 3x-5y=a \\ 2x+y=b \end{cases}$

სულ 3 მაგალითი.

N6* a -ს რა მნიშვნელობისთვის არა აქვს $\frac{5x+5a}{5-x}=0$ განტოლებას ამონახსნი.

N7 როგორია c პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ $y=x^2+c$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია

ა) I და II მეორე მეოთხედებში ბ) ოთხივე მეოთხედში?

N8 $y=x^2+c$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს წერტილი (1;8). იპოვეთ $y(-4);y(0);y(-1)$

N9 a-ს რა მნიშვნელობისთვის აქვს $(a^2-5a+6)x=a^2+2a-15$ განტოლებას:

ა)ერთი ამონახსნი; ბ) უამრავი ამონახსნი; გ) არა აქვს ამონახსნი.

ამავე გვერდზე მოცემულია სავარჯიშოები გამეორებისათვის.

N13* $x^2+px+q=0$ განტოლების ფესვებია 3;-4. იპოვეთ $x^4+px^2+q=0$ განტოლების ფესვების კვადრატების ჯამი.

N14* $ax^2+bx+c=0$ კვადრატული განტოლების ამონახსნებია 2;-3. იპოვეთ

$a(\frac{2x}{x+1})^2+b\left(\frac{2x}{x+1}\right)+c=0$ განტოლების ამონახსნები.

გვ. 92 მოცემულია სავარჯიშო ორი მაგალითით

N13* a -ს რა მნიშვნელობისათვის ექნება განტოლებას ზუსტად სამი განსხვავებული ამონახსნი:

ა)$(x+5)(x-7)(x+1)(x-a)=0;$

გვ. 99-ზე მოცემულია პარამეტრის შემცველი ორი კვადრატული განტოლება.

N9* m-ის რომელი მნიშვნელობისთვის სრულდება უტოლობა ნებისმიერ x-ისთვის.

ა) $mx^2-9mx+5m+1>0;$

გვ. 100 პარაგრაფი 6 პარამეტრის შემცველი უტოლობა

პარაგრაფში მოცემულია წრფივი ზოგადი უტოლობის ამოხნსა:

ამოვხსნათ$ax<b$ უტოლობა, თუ$a,b \in R$:

1.$a>0$

$|\ ax<b\ :a, a>0$

$x<\frac{b}{a} \quad x \in \left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$

2. $a<0$

$|\ ax<b\ :a, a<0$

$a>\frac{b}{a} \quad x \in (\frac{b}{a};\infty)$

3. $a=0,\ 0 \cdot x<b$

I თუ $b>0$, გვექნება, $\begin{cases} 0 \cdot x<b \\ b>0 \end{cases} x \in R.$

II თუ $b \le 0$, გვექნება,$\begin{cases} 0 \cdot x<b \\ b \le 0 \end{cases} x \in \emptyset.$

შემდეგ ნიმუშად განხილულია პარამეტრის შემცველი არამკაცრი უტოლობის ამოხსნა.

ამოხსენით $3ax-(8-ax) \ge 2a$ უტოლობა.

ამოხსნა:

$(3ax-(8-ax) \ge 2a\ )$გავხსნათ ფრჩხილები

$(3ax - 8 + ax \geq 2a)$ დავალაგოთ წევრები

$(4ax \geq 2a + 8)$

$(2ax \geq a + 4)$

შემდგომ ეტაპზე უნდა გამოვიყენოთ უტოლობის (ცვლადის შემცველი) მე-2 ან მე-3 თვისება -უტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $2a$-ზე (x-ის კოეფიციენტზე). მაგრამ, რადგან $2a$ გამოსახულების მნიშვნელობა (დადებითია იგი, უარყოფითი თუ ნული), დამოკიდებულია a -ს მნიშვნელობაზე. ამიტომ განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა.

I შემთხვევა: თუ $a = 0$, მაშინ უტოლობას ექნება შემდეგი სახე:

$2 \cdot 0x \geq 0 + 4$

$0 \cdot x \geq 4$

მიღებულ უტოლობას არ აკმაყოფილებს x -ის არც ერთი მნიშვნელობა, ე.ი. $x \in \emptyset$.

II შემთხვევა:თუ $a > 0$, მაშინ:

$(2ax \geq a + 4):2a,\ 2a > 0$

$$x \geq \frac{a+4}{2a}$$

III შემთხვევა: თუ $a < 0$, მაშინ:

$(2ax \geq a + 4):2a,\ 2a < 0$

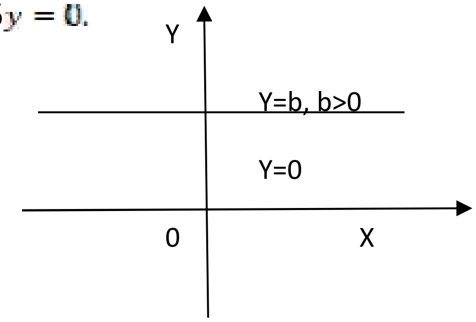
$$x \leq \frac{a+4}{2a}$$

ამრიგად, A=∅, თუ $a = 0; \mathrm{A} = \left[\frac{a+4}{2a}; \infty\right)$,თუ $a > 0;\ \mathrm{A} = \left[\infty; \frac{a+4}{2a}\right)$,თუ $a < 0$.

აქვეა მოცემულია $kx > b$ უტოლობა და აგებულია $y = kx$ და $y = b$ ფუნქციათა გრაფიკები.

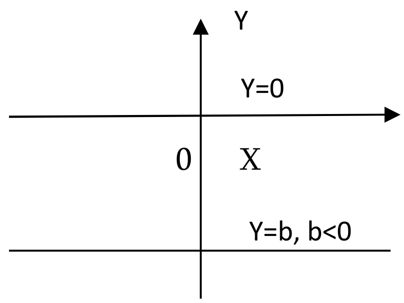
I თუ $k = 0$, მაშინ $y = 0$.

ა)



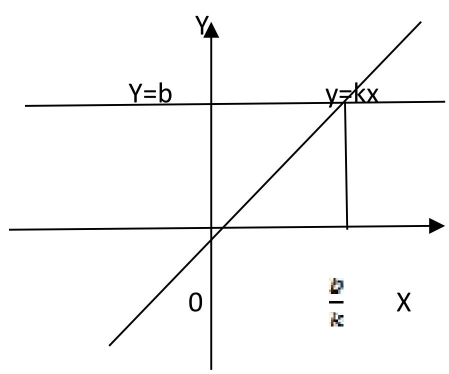
$x \in \emptyset$

ბ)



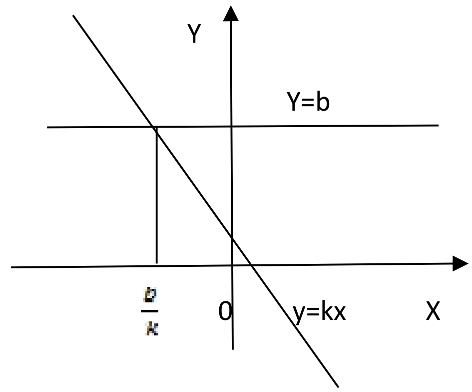
$x \in R$

II თუ $k > 0$



$x > \frac{b}{k}$

III თუ $k < 0$



$x < \frac{b}{k}$

გვ. 101, 102-ზე მოცემულიპარამეტრის შემცველი 7 საინტერესო სავარჯიშო 1-დან 7-ის ჩათვლით.

N1 ამოხსენით უტოლობა x ცვლადის მიმართ (6 უტოლობა)

ა) $2x + 3a > 4(x - 2a) + 7$

N2 იპოვეთ aპარამეტრის ყველა მნისვნელობა, რომელთაგან თითოეულისთვის მოცემული უტოლობის ამონახსნია. (2 უტოლობა)

ბ)$(2a - 3)x + 3 \leq ax - 2a(x - 1) x_0 = -1$

N3 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის მოცემულ სისტემას აქვს 1) უამრავი ამონახსნი; 2) ერთი ამონახსნი; 3) არც ერთი ამონახსნი. (4 უტოლობა)

გ) $\begin{cases} 2x - 5 \geq 2 - 3(x - 1) \\ 2(x + a) \leq 4a - 2 \end{cases}$

N4 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის მოცემული სისტემის ამონახსნია 1) (3; ∞) ინტერვალი; 2)$[5; \infty)$ ინტერვალი. (2 სისტემა)

ბ) $\begin{cases} x > 3 \\ 2x + 3 \geq 2a \end{cases}$

N5* იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის მოცემულ სისტემას არ აქვს ამონახსნი: (2 სისტემა)

ბ) $\begin{cases} 2ax - 1 > 0 \\ x > 8a \end{cases}$

N6 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის მოცემულ უტოლობას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და იპოვეთ ეს ამონახსნი. (4 უტოლობა)

გ)$(ax - 3)(2x - 6) \leq 0$

N7 a -ს რა მნიშვნელობებისათვის დააკმაყოფილებს $ax^2 + (4a + 1)x + 4a - 1 < 0$ უტოლობას x -ის ყველა მნიშვნელობა?

გვ. 108

N5 a-ს რა მნიშვნელობისთვის აქვს განტოლებას მხოლოდ ერთი ფესვი: (4 სავარჯიშო)

ბ)$|2x + 1| = 2a + 1$

N6 a-ს რა მნიშვნელობისთვის აქვს განტოლებას ორი ფესვი: (4 სავარჯიშო)

ა) $|x + 2| = a - 5$

N7 a-ს რა მნიშვნელობისთვის არა აქვს ამონახსენი შემდეგ განტოლებებს: (4 სავარჯიშო)

ბ)$|x^2 - 1| = a^2 - a$

N8* a-ს რა მნიშვნელობისთვის არა აქვს ამონახსენი შემდეგ უტოლობებს:(4 სავარჯიშო)

გ) $\sqrt{(x+2)^2} \leq 2a+1$

N9 იპოვეთ c პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც განტოლებას ამონახსენი არა აქვს. (2 სავარჯიშო)

ა) x^4+4x^2+c=0

N10* a -ს რა მნიშვნელობისთვის აქვს განტოლებას x^4-13x^2+a=0

ა) ოთხი ამონახსენი; ბ) ორი ამონახსენი.

გვ. 109

N13 იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის

$ax^2+4x>1-3a$ უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი ნამდვილი რიხცვისთვის.

N14 იპოვეთ a -ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=\frac{1}{5x^3+3x^2-4x+2a}$ არ არის განსაზღვრული $x=-1$ წერტილში.

N18* შეიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის შიგნით: (4 სავარჯიშო)

დ) $(2a-3)\sqrt{25-3a}$, და $a \in [2;5]$

გვ.110

N1 a -ს რამდენი ნატურალური მნიშვნელობა არსებობს, რომლისთვისაც $|8-x|=8-a$ განტოლებას აქვს ამონახსენი:

ა) 8; ბ) 7; გ) 2; დ) 1.

N2 იპოვეთ a -ს ყველა მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $2|x-5|=a+1$ განტოლებას გააჩნია ამონახსენი:

ა) $a \in [-1;1]$; ბ) a$\in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; გ) $a \in [-1;\infty)$; დ) a$\in (-1;\infty)$

N8 თუ $a=3$, მაშინ $ax-(a-2)x+2=7-a$ განტოლების ამონახსენია:

ა) 3; ბ) 1; გ) 2; დ) 0.

გვ. 111

N10 $\frac{2x-a}{x-3}=0$ განტოლების ამონახსენია , თუ:

ა)$a \neq 0$; ბ)$a=3$; გ) $a=8$; დ) $a=4$.

N11 $(a^2-4)x=a+2$ განტოლებას უამრავი ამონახსენი აქვს , როცა:

ა) $a=2$; ბ) $a=-2$; გ) $a=2$და $a=-2$; დ)ასეთი a არ არსებობს.

N12 $(k^2+4)x=k-2$ განტოლებას ერთი ამონახსენი აქვს , როცა:

ა) k ნებისმიერია; ბ) $k \neq -2$; გ) $k \neq 2$; დ) $k \neq \pm 2$.

მე-7 კლასის სახელმძღვანელო "მათემატიკა"- ავტორები: თ.ბექაური, ა.საგინაშვილი, გ.ბექაური

გვ. 212

N27 k-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნბეა $7x^2-3kx+5x-9$ მრავალწევრი $7x^2-8x-9$ სამწევრის ტოლი?

გვ. 217

N20 იპოვეთ m-ის ისეთ მნიშვნელობა, რომლისთვსაც x^2+mx-3და $x^2-5x+13$ სამწევრების ნამრავლი შეიცავს x^2-ს.

გვ.231

N6 k-ს რა რიცხვითი მნიშვნელობისათვის იქნება $x-5k+7,5=2,8$ განტოლების ამონახსნი

0,3 ტოლი?

N7 m-ს რა რიცხვითი მნიშვნელობისათვის იქნება $2x+3m-2,9=11,8$ გნტოლების ამონახსნი 1,35-ის ტოლი?

მე-8 კლასის სახელმძღვანელო "მათემატიკა"- ავტორები: თ.ბექაური, ა.საგინაშვილი, გ.ბექაური

გვ.176

N30 რიცხვით ღერძზე მიუთითე a პარამეტრის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $x^2 = a + 6$ განტოლებას

ა) აქვს ორი ამონახსნი; ბ) არა აქვს ამონახსნი; გ) აქვს ერთი ამონახსნი.

გვ. 226 მოცემულია 5 ერთანაირი ტიპის სავარჯიშო (N11, N12, N13, N14 და N15).

მაგალითდ:

N12 იპოვეთ $y = kx - 6$ ფუნქციის საკუთხო კოეფიციენტი თუ ცნობილია, რომ მისი გრაფიკი აბსცისთა ღერძს (-2;0) წერტილში კვეთს.

N15 იპოვეთ $y = 1{,}2x + b$ ფუნქციის b კოეფიციენტი თუ ცნობილია, რომ მისი გრაფიკი (1;4) წერტილზე გადის.

გვ. 227

N26 მოცემულია $y = kx + b$ ფუნქცია და ორი პირობა: I. $k > 0$; II. $b < 0$. იმისათვის, რომ ჭესმარიტი იყოს გამონათქვამი მოცემული ფუნქციის გრაფიკი არ გაივლის II მეოთხედში ა) საკმარისია I პირობა; ბ) საკმარისია II პირობა; გ) საკმარისია ორივე პირობა ერთად და არცერთი ცალკე არაა საკმარისი; დ) ეს ორი პირობა არაა საკმარისი.

გვ. 232

N14 $ax + y = 10$ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია (2;-4). იპოვეთ ამ განტოლების აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

N18 მოცემულია სისტემა: $\begin{cases} x - 3y = a \\ 2x + 4y = b \end{cases}$ ცნობილია, რომ (5;2) წყვილი წარმოადგენს ამ სისტემის ამონახსნს. იპოვეთ a და b.

N21 იპოვეთ a და b კოეფიციენტის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც

$\begin{cases} ax-3y=1 \\ 5x-6y=b \end{cases}$ სისტემას ა) აქვს უამრავი ამონახსნი ბ) არა აქვს ამონახსნი.

N22 k საკუთხო კოეფიციენტის რა მნიშვნელობისათვის გადის $y=kx$ ფუნქციის გრაფიკი $2x-y=2$ და $x+y=4$ განტოლებათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილზე?

გვ. 232

N26 დაამტკიცე, რომ $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ სისტემას მაშინ და მხოლოდ მაშინ

ა) აქვს უამრავი ამონახსნი, როცა $a_1xb_2=a_2xb_1$ და $a_1xc_2=a_2xc_1$;

ბ) არა აქვს ამონახსნი, როცა $a_1xb_2=a_2xb_1$ და $a_1xc_2\neq a_2xc_1$;

გ) აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა $a_1xb_2\neq a_2xb_1$.

გვ. 239

N22 ამოხსენით სისტემა ჩასმის ხერხით (მოცემულია 4 მაგალითი)

ა) $\begin{cases} x-y=a \\ x+y=a+2b \end{cases}$;

N26 ნუგზარი და დიტო ერთად pკგ-ს იწონიან. ნუგზარის წონის $n\%$ დიტოს წონის $m\%$ -ის ტოლია. განსაზღვრე თითოეული ბიჭის წონა.

გვ.246 მოცემულია 4 ერთნაირი ტიპის სავარჯიშო (N16, N17, N18 და N19).

N16 aცვლადის რა მნიშვნელობებისათვის არის $[a;+\infty)\cup(-\infty;1)$ სიმრავლე მთელი რიცხვითი ღერძი?

N19 a ცვლადის რა მნიშვნელობებისათვის იქნებ $ax+9>11$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე $(-\infty;-2)$?

გვ.247

N11 $kx+y=10$ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია (-2;40). იპოვეთ ამ განტოლების აბცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

N12 მოცემულია სისტემა: $\begin{cases} x - 3y = a \\ 2x + 4y = b \end{cases}$. ცნობილია, რომ (5;2) წყვილი წარმოადგენს ამ სისტემის ამონახსნს. იპოვეთ a და b.

გვ.249

N21 S=240-60t ფორმულით მოცემულია A ქალაქიდან B ქალაქისკენ ავტომობილის B-მდე S მანძლის t დროზე დამოკიდებულების ფუნქცია. ა) რა მანიძლია ქალაქებს შორის? ბ) რა სიჩქარით მოძრაობს ავტომობილი? გ) რა დროს იქნება ავტომობილი A ქალაქიდან 90კმ მანძილზე? დ) რა დროს ჩავა ავტომობილი B ქალაქში?

N23 kსაკუთხო კოეფიციენტის რა მნიშვნელობისათვის გადის $y = kx$ ფუნქციის გრაფიკი $x - y = 1$ და $x + y = 5$ განტოლებათა გრაფიკების გადაკვეთის წერტილზე?

გვ. 251-ზე სავარჯიშო N21-ში მოცემულია $y = kx + b$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი და მისი მეშვეობით ითხოვენ ოთხი შესაძლო ვარიანტიდან k და b კოეფიციენტების ნიშნების შესახებ სწორი პასუხის შერჩევას.

მე-9 კლასის სახელმძღვანელო "მათემატიკა"- ავტორები: თ.ბექაური, ა.საგინაშვილი, გ.ბექაური

გვ. 53

N10 იპოვეთ aკოეფიციენტის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $ax^2 + 7x + 6 = 0$ განტოლება ა) აქვს მხოლოდ ერთ ფესვი; ბ) არა აქვს ამონახსნი

N11 p -ს რა მნიშვნელობებისთვის აქვს $x^2 + px + 25 = 0$ განტოლებას მხოლოდ ერთი ფესვი?

გვ54

N12 ამოხსენი $\frac{gt^2}{2} - vt = 0$ განტოლება t-ს მიმართ.

N15 იპოვეთ aკოეფეციენტის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$ax^2+ax+6=0$ განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი.

N16 p -ს რა მნიშვნელობებისთვის აქვს $x^2+px+p=0$ განტოლებას მხოლოდ ერთი ფესი?

N17 a-ს რა მნიშვნელობისათვისაა $ax^2+(a+1)x-8=0$ განტოლების ამონახსნი (-2)-ის ტოლი? a-ს მიღებული მნიშვნელობისათვის იპოვეთ განტოლების მეორე ფესვი.

გვ.58

N11 ამოხსენით განტოლება x-ის მიმართ (მოცემულია 4 მაგალითი):

დ) $abx^2-(a^2-b^2)x-\ ab=0,\ ab\neq 0$

გვ.64 მოცემულია სამი ერთმანეთის მსგავსი სავარჯიშო (N17, N18 და N19), აგრეთვე ერთმანეთის მსგავია N20 დაN21

N17 $ax^4+bx^2+c=0$ განტოლების ფესვებია 5 და-3.

იპოვეთ $ax^2+bx+c=0$ განტოლების ფესვები.

N20 p -ს რა მნიშვნელობებისათვის აქვს $3x^2+2px+5=0$ განტოლებას ერთი ფესვი?

გვ.65 მოცემულია ჯგუფური სამუშაო თამაში „ჯაჭვი“ სადაც მონაწილეობს სამი გუნდი. თითოეულ გუნდს აძლევენ 6 განტოლებას აქედან 5) და 6) პარამეტრის შემცველია.

5) k-ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს $16x^2+kx+9=0$ განტოლებას ერთ ფესვი?

6) $x^2+bx+24=0$ განტოლების ერთი ფესვია 8. იპოვეთ მეორე ფესვი და b კოეფიციენტი.

გვ.74

N2 ამოხსენით განტოლება x –ის მიმართ ფესვთა ფორმულების გამოყენების გარეშე:

(მოცემულია 6 პარამეტრის შემცველი განტოლება. აქედან 5 ერთ პარამეტრის შემცველი და ერთი ერთ პარამეტრის შემცველი)

ლ) $x^2-(n+2k)x+2kn=0$

გვ.75-ზე მოცემულია 5 ერთი ტიპის სავარჯიშო,რომელიც ეხება განტოლების ფესვებს (N11, N12, N13, N14 და N15)

N14 a - ს რა მნიშვნელობებისათვისაა $x^2+(2+a)x+a=0$ განტოლების ფესვთა კვადრატების ჯამი 28-ის ტოლი?

გვ. 79 მოცემულია ორი მსგავსი სავრჯიშო N11 და N12

N 11 a -ს რა მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს

$x^2+2(a-4)x+a^2+6a+3=0$ სამწევრი სრულ კვადრატს?

გვ. 80

N15 $t^2-10t+m=0$ განტოლების ერთი ფესვია t_1. იპოვეთ მეორე ფესვი და m.

გვ. 83 მოცემულია 3 მსგავსი სავარჯიშო სადაც მოცემულია რაციონალური განტოლებები (N13, N14 და N15)

N15 ამოხსნით განტოლება: $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}$

ა) a -ს ბ) b -ს გ) c -ს მიმართ.

N18 გაამრავლე $-x<-b$ უტოლობის ორივე მხარე: ა) 3-ზე ბ)(-2)-ზე ისე, რომ მოცემული ტოლფასი უტოლობა მიიღო.

გვ91 მოცემულია N18 და N19 მსგავსი სავარჯიშოები

N18 $4x^2+bx-27=0$ განტოლების ფესვების შეფარდება (-3)-ს ტოლია. იპოვე b-ს რიცხვითი მნიშვნელობა.

გვ. 92

N1 c-ს რომელი მნიშვნელობისთვისაა აქვს $2x^2+12x+c=0$ განტოლებას ერთ ფესვი?

ა) 6 ბ) 8 გ) 10 დ) 18

N4 $\frac{1}{6}x^2+px-2=0$ განტოლების ფესვია 2. იპოვეთ p და მეორე ფესვი

ა) $\frac{2}{3}$ და 2 ბ) $\frac{2}{3}$ და -6 გ) $\frac{8}{3}$ და $\frac{2}{3}$ დ) $-\frac{2}{3}$ და 2.

გვ.127 N17 სავარჯიშოში მოცემულია $y=ax^2+bx+c$ ფუნქციის 4 გრაფიკი და თითოეულ შემთხვევაში ითხოვენ კოეფიციენტისა a და დისკრიმინანატის ნიშნების დადგენას.

გვ. 134 მოცემულია ორი მსგავსი სავარჯიშო N14 და N15

N15 შეადგინე x^2+px+q სახის სამწევრი, რომელიც მხოლოდ და მხოლოდ $1<x<5$-ისთვის ნაკლები იქნება 0-ზე.

გვ148

N12 a-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $A(5;a)$ და $B(5;-9)$ წერტილები ა) $3x+y=5$ ბ) $3x-2y=8$ წრფით განსაზღვრულ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში?

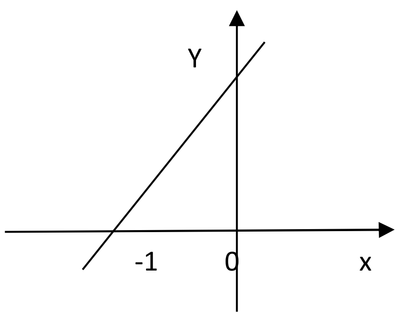
N13 იპოვეთ a-ს უდიდესი მთელი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $A(a;4)$ წერტილი ეკუთვნის $3x-6y\leq 11$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეს.

გვ.149

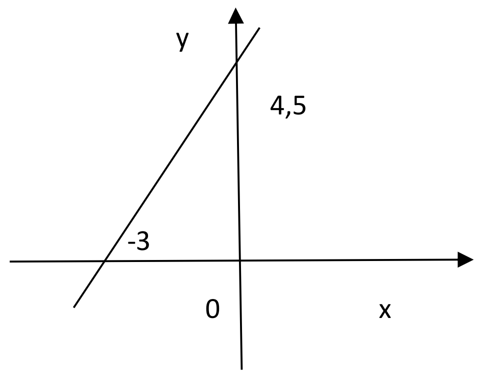
N15 k-ს რამდენი მთელი უარყოფითი მნიშვნელობა არსებობს, რომლისთვისაც $A(0;k)$წერტილი ეკუთვნის ა)$y > 4x - 7$ბ) $y \geq 2x - 4$ გ) $3x - 2y \leq -8$უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეს?

N16 ნახაზზე $y = ax + b$ ფუნქციის გრაფიკია გამოსახული. გრაფიკის მიხედვით გამოთვალე $b - a$ სხვაობა.

ა)



ბ)



გვ. 155

N16 ნახაზზე მოცემულია $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის მიხედვით იპოვე:

ა) $ax^2 + bx + c$ სამწევრის a კოეფიციენტის ნიშანი;

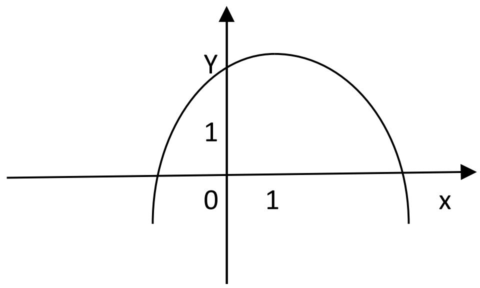
ბ) $ax^2 + bx + c$ სამწევრის დისკრიმინანტის ნიშანი;

გ) x ცვლადის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y > 0$;

დ) x ცვლადის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y = 0$;

ე)ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის შუალედები;

ვ) a, b და c კოეფიციენტების მნიშვნელობები



გვ. 157

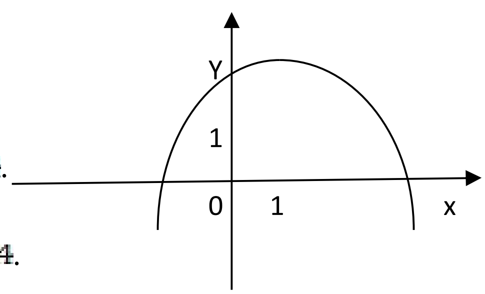
N4 ნახაზზე მოცემულია $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები და სამწევრის ფესვებია

ა) (3;1),$x_1 = 1; x_2 = 3$.

ბ) (0;1), $x_1 = -2; x_2 = 3$.

გ) (0; $3\frac{3}{4}$), $x_1 = -2; x_2 = 4$.

დ)(-2; $3\frac{3}{4}$), $x_1 = -2; x_2 = 4$.



გვ.183

N17 იპოვეთ m-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $x^2 + mx + 6$ მრავალწევრი არ დაიშლება წრფივ მამრავლებად.

გვ183

N29 რა რიცხვი უნდა ჩავწეროთ a-ს ნაცვლად $x^2 - 5x + a < 0$ უტოლობაში, რომ ამ უტოლობის ამონახსნი იყოს $x \in (2;3)$.

დანართი 4

აკადემიკოს ილია ვეკუას სახელობის ფიზიკა-მათემატიკის ქალაქ თბილისის N42 საჯარო სკოლის 2015-2016 სასწავლო წლის სასკოლო სასწავლო გეგმა

II ნაწილი:

„სასწავლო საგნობრივი პროგრამები

საგნობრივი პროგრამა -მათემატიკა (ისწავლებაVII -XII კლასებში);

VII კლასი ალგებრა და ანალიზის საწყისები

წრფივ განტოლებათა სისტემა. წრფივი ორცვლადიანი განტოლება. წრფივ ორცვლადიან განტოლებათა სისტემა. ჩასმისა და შეკრების ხერხები. სისტემის ამოხსნა კრამერის ფორმულების გამოყენებით. სისტემები, რომლებიც წრფივ განტოლებათა სისტემებზე დაიყვანება. **პარამეტრის შემცველი განტოლებათა სისტემები.** ამოცანების ამოხსნა წრფივ განტოლებათ ასისტემის გამოყენებით.

VIII კლასი ალგებრა და ანალიზის საწყისები

კვადრატული განტოლება და კვადრატული სამწევრი. კვადრატული სამწევრი და მისი კოეფიციენტები. კვადრატული სამწევრის ფესვები. არასრული კვადრატული განტოლებები და მათი ამოხსნის ხერხები. სრული კვადრატული განტოლების ფესვების ფორმულა (სხვა და სხვა შემთხვევა). ვიეტის თეორემა კვადრატული განტოლების ფესვების შესახებ. ვიეტის თეორემის შებრუნებული თეორემა. კვადრატული სამწევრის მამრავლებად დაშლა. ზოგიერთი განტოლებების ამოხსნის მეთოდები, რომლებიც კვადრატული განტოლების ამოხსნაზე დაიყვანება (ბიკვადრატული, სიმეტრიული, ერთგვაროვანი და სხვ.). წილად-რაციონალური განტოლებების ამოხსნა, რომლებიც კვადრატულზე დაიყვანება. კვადრატული განტოლების გამოკვლევა მისი

დისკრიმინანტის საშუალებით. პარამეტრის შემცველი კვადრატული განტოლებები. მოდულის შემცველი კვადრატული განტოლებები.“ (http://vekua42.edu.ge/#)