

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

გიორგი მჭედლიშვილი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი  
ფიზიკის მიმართულება

ზოგიერთი არაწრფივი მოვლენის თეორიული გამოკვლევა

ს ა დ ო ქ ო რ ო დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სადოქტორო დისერტაციისა და  
სადოქტორო პროგრამის ხელმძღვანელი  
თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო  
მეცნიერებათა ფაკულტეტის  
სრული პროფესორი

არჩილ უგულავა



უნივერსიტეტის  
გამოცემლობა

თბილისი 2014

## სარჩევი

შესავალი.....	4
თავი I. ორი ბმული ნანო-ელექტრომექანიკური რეზონატორის არაწრფივი დინამიკა	
1.1. შესავალი.....	8
1.2. მოდელი.....	9
1.3 მოდების სიხშირეების არაწრფივი წანაცვლება და რელაქსაციური წევრების გავლენა. არაზონანსული შემთხვევა.....	11
1.4. ორი ბმული რეზონატორის ამპლიტუდურ- სიხშირული მახასიათებელი.....	12
1.5. მოდების სიხშირეების არაწრფივი წანაცვლება და რელაქსაციური წევრების გავლენა. რეზონანსული შემთხვევა .....	14
1.6. ენერჯის გადანაწილება რეზონატორებს შორის.....	17
1.7 დასკვნა.....	20
თავი II. ატომი – ველი სისტემის კლასიკური მოდელის კვანტური შესწორება	
2.1. შესავალი. ამოცანის დასმა.....	21
2.2. ანჰარმონიული ოსცილატორის მოდელი და სტაციონარული რეზონანსის რეჟიმი ნულოვან მიახლოებაში.....	22
2.3. არაწრფივობის კოეფიციენტის რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლა.....	26
2.4. ქმედების რეზონანსული მნიშვნელობის კვანტური შესწორებები.....	27
2.5. ქმედების შესწორების ოპრეტორის საკუთარი მდგომარეობა და მისი გაშლა მათივე პერიოდული ფუნქციების მეშვეობით.....	30
2.6. ენერგეტიკულ დონეთა დასახლება და გაგანიერება.....	33
2.7. დასკვნა.....	36.
თავი III. არაწრფივი და ქაოსური მოვლენები არაწრფივ გიროტროპიულ გარემოში	
3.1. შესავალი.....	38
3.2. სუსტი და ძლიერი არაწრფივობის შემთხვევა .....	41
3.3. კუნის მოდელის ინტეგრებადობის პირობები.....	52
3.4. კვანტურ-მექანიკური განხილვა.....	59
3.5. კუნის მოდელის განზოგადება. ურთიერთქმედ ოსცილატორთა ჯაჭვი.....	60
3.6. კუნის მოდელის ოსცილატორებისაგან შემდგარი არაწრფივი ჯაჭვის იძულებითი რხევები.....	63
3.7. რხევათა ფაზის კოჰერენტულობა და ენერჯის აღდგენა .....	68
3.8. დასკვნა.....	74
ძირითადი შედეგები.....	75
ლიტერატურა.....	77

## **მადლიერება**

განსაკუთრებული პატივისცემა და მადლიერება მინდა გამოვხატო ჩემი სამეცნიერო ხელძღვანელის ბატონ არჩილ უგულავას მიმართ მეცნიერული თანამშრომლობისა და გაწეული მხადაჭერისათვის. ლ. ჭოტორლიშვილს მეცნიერული თანამშრომლობისათვის. მადლობას ვუხდით აგრეთვე თსუ ფიზიკის მიმართულების თანამშრომლებს კ. ნიკოლაძეს, ს. ჩხაიძეს და სხვებს საქმიანი შენიშვნებისა და წლების განმავლობაში თანამშრომლობისათვის.

## შესავალი

სამყაროში მიმდინარე ფიზიკური პროცესების აღწერისას დასაწყის ეტაპზე უკიდურესად სტაბილურ მდგომარეობათა აღწერით იფარგლებოდნენ. შემდგომ კი, ფიზიკის ბუნებრივმა განვითარებამ მიგვიყვანა პრინციპულად დინამიკური პრობლემის შესწავლამდე, ისეთებამდე, როგორც არის ერთი სტაბილური მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლა, ბმული მდგომარეობების დაშლა და/ან წარმოქმნა (ატომბირთვების, ატომების, ვარსკვლავთა და გალაქტიკათა) და ა.შ. ასეთ “დინამიკურ დონეზე” ფიზიკურ მოვლენათა შესწავლის სირთულე ადრეულ პერიოდში აიძულებდა მკვლევარებს გამოეყენებინათ სტაბილურ მდგომარეობათა სუსტი ველებით გამოწვეული სუსტი შეშფოთებები. ასეთი გზით ვითარდებოდა ფიზიკის ისეთი მიმართულებები, როგორცაა ოპტიკა, აკუსტიკა, ელექტროდინამიკა და სხვა. ამგვარი მიდგომის ჩამოყალიბების მთავარი მიზეზი კი იყო ის, რომ ექსპერიმენტატორთა ხელთ იყო მხოლოდ სუსტი ველები (ოპტიკური, აკუსტიკური და ა.შ.). შედეგად მივიღეთ, რომ სუპერპოზიციის პრინციპები, ანუ წარმოდგენა იმის შესახებ, რომ მიზეზთა ადიტიურობას მივყავართ შედეგთა ადიტიურობამდე, იქცა მიღებულად და ბევრმა ჩათვალა ფიზიკური პროცესების გადაწყვეტის უნივერსალურ საშუალებად. ამგვარ პრობლემათა გადაჭრისას გამოიყენებოდა წრფივი (უფრო ზუსტად გაწრფივებული) დინამიკური მოდელები. ჯერ კიდევ მაშინ ნათელი იყო ამგვარი “წრფივი ფიზიკის” შეზღუდულობა და რომ მის “ბატონობას” ფიზიკაში დიდი დრო არ ეწერა.

გასული საუკუნის დასაწყისში მდგომარეობა ძირფესვიანად შეიცვალა – არაწრფივი პრობლემების რიცხვი, რომელთა გადაჭრის გადავადება აღარ შეიძლებოდა – “ზვავისებურად” იზრდებოდა. თუ ადრე ეს პირობები დაკავშირებული იყო ძირითადად არაწრფივ მექანიკასთან (მაგ. სამი სხეულის ამოცანა), ოცდაათიან წლებში ამგვარ პრობლემათა გადაჭრა გადაუდებელი გახდა აკუსტიკაში, მყარი სხეულების ფიზიკაში, სტატისტიკურ ფიზიკაში და განსაკუთრებით კი იმხანად ახლად მოვლენილ რადიოტექნიკასა (ელექტრომაგნიტურ რხევათა გენერატორები და დეტექტორები) და მართვის ავტომატურ სისტემებში. მაგრამ იმხანად ფიზიკის სხვადასვა მიმართულებათა ამგვარი “არაწრფივი სირთულეები” ითვლებოდა ყოველი მიმართულებისთვის სპეციფიურად და არ ჩქარობდნენ შეექმნათ არაწრფივი ფიზიკის ზოგადი თეორიული მიდგომები.

მხოლოდ გასული საუკუნის 30-ან წლებში ჯეროვანი ყურადღება მიექცა ისეთ ფიზიკურ მოვლენებს, როდესაც დაიმზირება არაადიტიური გამოძახილი ადიტიურ ზემოქმედებებზე (ანუ როდესაც საკითხის წრფივი გადაწყვეტები მიუღებელია) და რომ ასეთი სიტუაციები არის არა იშვიათი გამონაკლისი, არამედ პირიქით, გვხვდება ყოველ ნაბიჯზე. სხვადასხვა მიმართულების ფიზიკოსთა შორის თანდათან გამომუშავდა “არაწრფივი აზროვნება”, რასაც მოჰყვა არაწრფივი რხევების თეორიის შექმნა, რომელიც ინგლისურენოვან ქვეყნებში მოიხსენიება როგორც არაწრფივი დინამიკა ან უფრო ზოგადად – არაწრფივი მოვლენების ფიზიკა.

მოვლენებს, რომლებიც ალოწერებიან არაწრფივი განტოლებებით, მიეკუთვნებიან არაწრფივ მოვლენებს. ბუნების მოვლენათა უმრავლესობა აღიწერება არაწრფივი

განტოლებებით და ამდენად ბუნების მოვლენების ძირითადი ნაწილი მიეკუთვნება არაწრფივ მოვლენებს. არაწრფივი მოვლენებია ქაოტურად მოძრავი უმცირესი ბიოლოგიური სიტემებიდან დაწყებული. ტოკამაკში მოქცეული პლაზმით დამთავრებული. საწუხაროდ არ არსებობს უნივერსალური მიდგომა, რომლის მეშვეობითაც შესაძლებელი იქნებოდა არაწრფივი მოვლენების უნიფიცირებული განხილვა. ამიტომ არაწრფივი მოვლენების განხილვის დროს გამოიყენება კვლევის სხვადასხვა მეთოდები, როგორც ანალიზური ასევე რიცხვითი.

წინამდებარე ნაშრომში განხილულია სამი აწრფივი მოვლენა: ნანოელექტრომექანიკური რეზონატორის არაწრფივი რეხვები, არაწრფივი რეზონანსის მოვლენა სისტემაში ატომი-ველი და პოლარიზაციული არამდგრადობები არაწრფივ გიროტროპიულ გარემოში.

**თემის აქტუალობა.** არაწრფივი მოვლენების ფიზიკა არის ფუნდამენტური მნიშვნელობის. მისი შედეგები დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობისაა ამავე დროს, რადგან ვსაწავლობთ არა მარტო ბუნების მოვლენების განმსაზღვრელ კანონზომიერებებს არამედ ეს ცოდნა შეგვიძლია გამოვიყენოთ პრაქტიკული მიზნებისთვისაც, შევქმნათ მიღებული ცოდნის გამოყენებით ისეთი ხელსაწყოები, დანადგარები, რომლებიც ჩაანაცვლებს უკვე არსებულს ან იქნება სრულიად ახალი და უნიკალური..

**დისერტაციის მიზანი:** წინამდებარე დისერტაციის მიზანია ზოგიერთი არაწრფივი მოვლენის თეორიული გამოკვლევა. კერძოდ, 1) ორი ბმული ნანო-ელექტრომექანიკური რეზონატორის არაწრფივი დინამიკის შესწავლა, 2) ატომი – ველი სისტემის კლასიკური მოდელის კვანტური შესწორების განხილვა. კერძოდ, აღნიშნული სისტემის ოპტიკური დიაპაზონის იმპულსური დატუმბვის შედეგად წარმოქმნილი ენერგეტიკულ დონეთა დასახლებების ალბათობების გამოთვლა და 3) არაწრფივ გიროტროპიულ გარემოში არაწრფივი და ქაოსური მოვლენების თეორიული გამოკვლევა. კერძოდ გიროტროპიული გარემოს არაწრფივი კლასიკური და კვანტური დინამიკის შესწავლა კუნის განზოგადებული არაწრფივი მოდელის ფარგლებში.

დისერტაციაში გამოყენებულია თეორიული კვლევის ანალიზური და რიცხვითი მეთოდები. კერძოდ კვლევის ანალიზური მეთოდიდან ჩვენ ვისარგებლეთ ვან დერ პოლის ნელადცვლადი ამპლიტუდების მეთოდით. ხოლო რიცხვითი მეთოდებიდან გამოვიყენეთ გრასბერგერ-პროკაჩიას ალგორითმი. ასევე სისტემის დინამიკის თეორიული ანალიზის დროს ვისარგებლეთ ისეთი სტატისტიკური ცნებებით, როგორცაა კოლმოგოროვის ენტროპია და უცნაური ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილება.

**მეცნიერული სიახლე:** ქვემოთ მოყვანილ დისერტაციაში

1. ჩვენს მიერ შევისწავლილ იქნა ორი არაწრფივი ბმული ოსცილატორის იძულებითი რხევები ბმის კოეფიციენტის ნებისმიერ მნიშვნელობისათვის, როგორც ორი ბმული ნანო-ელექტრომექანიკური რეზონატორის მოდელი. ანალიზურად მიღებულ იქნა რხევის ამპლიტუდის, როგორც იძულებითი რხევის სიხშირის ფუნქციის გამოსახულება და შესწავლილ იქნა ენერჯის ურთიერთგაცვლა ბმულ ოსცილატორებს შორის. დადგენილ იქნა, რომ გარეშე ძალის ზემოქმედების გამო აღნიშნულ სისტემაში აღძრული რხევების ამპლიტუდურ სიხშირული მახასიათებელი იძენს არაწრფივი რეზონანსის შესაბამისი ასიმეტრიული რეზონანსული მრუდის სახეს. ნაჩვენებია, რომ განსახილველი მოდელის ასეთი ამპლიტუდურ სიხშირული მულტისტაბილური

მახასიათებელი შეიძლება გამოყენებულ იქნას ოსცილატორებს შორის ენერჯის გადაცემის მართვის ეფექტური ინსტრუმენტი (საშუალება), რაც განპირობებულია იძულებითი ძალის სიხშირის უმნიშვნელო ცვლილების გამო სისტემის მდგომარეობის სენსიტიური ცვლილებით.

2. ჩვენს მიერ შევისწავლილია ატომი-ველი სისტემა ანჰარმონიულ ოსილატორის მოდელის ფარგლებში, როდესაც ადგილი აქვს არაწრფივ რეზონანსს. განხილულია ის პირობები, როდესაც ადგილი აქვს არაწრფივ რეზონანსს. განხილულია ასევე ის პირობა, რომლის შესრულების შემთხვევაში, ქმედების მნიშვნელობა შესაძლოა იყოს იმდენად მცირე, რომ მისი შესწორება აღარ იქნება კლასიკური სიდიდე და ის უნდა განვსაზღვოთ კვანტური მექანიკის კანონების თანახმად. შესწავლია თუ რა სახე აქვს ქმედების შესწორების კვანტურ ჰამილტონიანს და მის შესაბამის ჰამილტონის განტოლებას. გამოთვლილ იქნა ენერგეტიკულ დასახლებათა ალბათობების განაწილება და გამოკვლეულ იქნა ინვერსიულ დასახლებათა არსებობის შესაძლებლობა.

3. შესწავლილია ასევე გიროტროპული გარემოს კლასიკური და კვანტური დინამიკა კუნის არაწრფივი მოდელის ფარგლებში, როგორც ძლიერი ასევე სუსტი არაწრფივობის შემთხვევაში. კლასიკური დინამიკის განხილვისას სუსტი არაწრფივობის შემთხვევაში მიღებულია ანალიზური ამონახსნები. ხოლო ძლიერი არაწრფივობის შემთხვევაში დადგენილია პარამეტრების ის მნიშვნელობები, როცა სისტემაში ჩნდება ქაოსი. ნაჩვენებია, რომ ურთიერთქმედების პოტენციალის პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობისათვის მოდელი არის ზუსტად ინტეგრებადი და გარკვეულ პირობებში დაიყვანება ე.წ. უნივერსალურ ჰამილტონიანზე. კვანტური დინამიკის განხილვის დროს ნაჩვენებია არაწრფივი გიროტროპული გარემოს მიერ გარეშე ველის ენერჯის სტოქასტური შთანთქმის შესაძლებლობა. განხილულია ურთიერთქმედ ოსცილატორთა უსასრულო ჯაჭვის შემთხვევა და დადგენილია, რომ შესაძლებელია ასეთ გარემოში სოლიტონური ტიპის ტალღების გავრცელება. განხილულია ის შემთხვევა, როცა განზოგადებული კუნის მოდელის აღმწერი განტოლება არ არის ზუსტად ინტეგრებადი. ნაჩვენებია, რომ მიუხედავად ინდივიდუალური ოსცილატორების ქაოსური დინამიკისა, ასეთ ოსცილატორთა ჯაჭვი ინარჩუნებს კოჰერენტულობას როგორც მთლიანი სისტემა.

წინამდებარე ნაშრომის პირველ თავში, ჩვენს მიერ შესწავლილ იქნა ორი ბმული ოსცილატორის რხევის დინამიკა ბმის კოეფიციენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, როდესაც ორივე ოსცილატორზე მოქმედებს ერთნაირი სიხშირის მაგრამ განსხვავებული სიდიდის მქონე გარეშე ჰარმონიული ძალა. მეორე პარაგრაფში განხილულია ორი ბმული ოსცილატორის იძულებითი რხევები, მესამე პარაგრაფში - არარეზონანსული გარეშე ძალის შემთხვევაში სიხშირული წანაცვლება და რელაქსაციის ეფექტები, მეოთხე პარაგრაფში - რეზონანსული შემთხვევა და მოდების სიხშირეების არაწრფივი წანაცვლება, მეხუთე პარაგრაფში - ამპლიტუდურ სიხშირული მახასიათებელი და ენერჯის გადაწილება ოსცილატორებს შორის. და ბოლოს დასკვნა.

წინამდებარე ნაშრომის მეორე თავში განხილულია ატომი-ველი სისტემა ანჰარმონიულ ოსილატორის მოდელის ფარგლებში, როდესაც ადგილი აქვს არაწრფივ რეზონანსს. ნაშრომის პირველ პარაგრაფი არის შესავალი. მეორე პარაგრაფში განხილულია ანჰარმონიული ოსცილატორის მოდელი და სტაციონარული რეზონანსის რეჟიმი. მესამე პარაგრაფი ეძღვნება არაწრფივობის კოეფიციენტის რიცხვითი

მნიშვნელობის გამოთვლას. მეოთხე პარაგრაფში განხილულია ქმედების რეზონანსული მნიშვნელობის კვანტური შესწორებები. მეხუთე პარაგრაფში შვედისწავლეთ ქმედების შესწორების ოპრეტორის საკუთარი მდგომარეობა და მისი გაშლა მათივე პერიოდული ფუნქციების მეშვეობით. მეექვსე პარაგრაფში გამოვთვალეთ ენერგეტიკულ დონეთა დასახლება და გაგანიერება. და ბოლო პარაგრაფში გაკეთებული დასკვნა

წინამდებარე ნაშრომის მესამე თავში განხილულია გიროტროპიული გარემოს არაწრფივი კლასიკური და კვანტური დინამიკა კუნის განზოგადებული არაწრფივი მოდელის ფარგლებში. ნაშრომის პირველ პარაგრაფში გაკეთებულია შესავალი აღნიშნულ საკითხში. მეორე პარაგრაფში განხილულია კლასიკური დინამიკა როგორც სუსტი ასევე ძლიერი არაწრფივობის შემთხვევაში. მესამე პარაგრაფი ეხება კუნის მოდელის ინტეგრებადობის საკითხს. მეოთხე პარაგრაფი ეძღვნება კვანტურ-მექანიკურ განხილვას. მეხუთე პარაგრაფი ეძღვნება კუნის მოდელის განზოგადებას ურთიერთქმედ ოსცილატორთა უსასრულო ჯაჭვის შემთხვევაში. მეექვსე და მესვიდე პარაგრაფებში განხილულია ის შემთხვევა, როცა განზოგადებული კუნის მოდელის აღმწერი განტოლება არ არის ზუსტად ინტეგრებადი. და ბოლოს გაკეთებულია დასკვნა

**პუბლიკაციები:** დისერტაციაში მიღებული შედეგები გამოქვეყნებულია ოთხი სამეცნიერო პუბლიკაციის სახით:

1. L.Cotorlishvili, A.Ugulava, G.Mchedlishvili, A.Komnik, S.Wimberger, & J.Berakdar. Nonlinear Dynamics of Two Coupled Nanoelectromechanical resonators. J.Phys.B, 44,215402 (9pp),(2011) .
2. A.Ugulava, G.Mchedlishvili, S.Chkhaidze & L.Chotorlishvili. Quantum Corrections to the Classical Model of the Atom-field system. Phys. Rev. E, 84, 046606 (2011).
3. A. Ugulava, L. Chotorlishvili, K. Nikoladze, G. Mchedlishvili. Chaotic Phenomenon in Nonlinear Girotropic Medium. International Journal of Modern Physics B, vol. 22, No 4, pp. 381-405, 2008.
4. A. Ugulava, L. Chotorlishvili, V. Skrinnikov, G. Mchedlishvili. Coherence of Chain oscillators in Nonlinear Girotropic Medium. Commun. Teor. Phys. (Beijing, China) 50, pp.1381-1386, (2 008)

**დისერტაციის სტრუქტურა და მოცულობა:** დისერტაცია შესდგება შესავლისაგან, სამი თავისა და დასკვნისაგან. შეიცავს 78 ნაბეჭდ გვერდს. დისერტაციაში წარმოდგენილია 21 ნახაზი, ციტირებუკლი ლიტერატურის ნუსხა, რომელიც შეიცავს 65 დასახელებას

# თავი I. ორი ბმული ნანო-ელექტრომექანიკური რეზონატორის არაწრფივი დინამიკა

## 1.1. შესავალი

დღეისათვის ნანოტექნოლოგიების დარგში ჩატარებული ექსპერიმენტალური და თეორიული სამუშაოების მნიშვნელოვანი ნაწილი მიმართულია ნანომეტრის ზომის რეზონატორების შექმნისა და მათი მართვის სისტემების დახვეწისაკენ, კერძოდ ნანოელექტრომექანიკური რეზონატორებისადმი. ნანომამტაბის რეზონატორებისადმი ინტერესი განპირობებულია მთელი რიგი მოზეზებით. ნანოელექტრომექანიკური რეზონატორები გამოიყენება, როგორც მუხტის, მასის და სპინის მეტად მგრძნობიარე დეტექტორები, მაღალ სიხშირული გენერატორები [1-3]. ბმული სისტემები კი საინტერესოა სიგნალის გაძლიერებისა და დამუშავების თვალსაზრისით. მათ იკვლევენ, როგორც კვანტურ მექანიკურ [4, 5] ისე კლასიკური სისტემებს [6-14]. ასეთი სისტემების არაწრფივი დინამიკის შესწავლის აუცილებლობა კი განპირობებულია იმით რომ ან აცილებულ იქნას ეს რეჟიმი , თუ არ არის სასურველი, ან გამოყენებულ იქნას თუ არის ამის შესაძლებლობა.

ნანო-ელექტრომექანიკური რეზონატორი დაახლოებით 200 ნმ ზომის მოწყობილობაა, ის შედგება გალიუმ-არსენიდის სამი ფენისაგან(GaAs): N-ლეგირებული 100 ნმ სიგანის ფენა არის 50 ნმ სიგანის ფენით იზოლირებული P-ლეგირებული 50 ნმ ზომის ფენისაგან . ნანო-ელექტრომექანიკური რეზონატორების რხევების აღძვრა და მართვა ხორციელდება პიეზოელექტრული მოწყობილობების მეშვეობით [14]. ცალკეული რეზონატორის გარდა შეიძლება განხილულ იქნას ასევე ორი ბმული რეზონატორი, რომელთა მართვა ხორციელდება გარეშე წყაროს მეშვეობით. ბმული რეზონატორული სისტემის რხევის დინამიკა ხასიათდება სხვადასხვა რეჟიმით, რაც განპირობებულია ბმის კოეფიციენტისა(ბმულობა) და გარეშე ძალის სხვადასხვა მნიშვნელობით. ბმულობის მცირე მნიშვნელობისათვის ეს საკითხი შესწავლილ იქნა კარაბალინისა და სხვათა შრომაში . [14]. ამ ნაშრომში ნაჩვენებია იქნა, რომ ერთი რეზონატორის წრფივი და სუსტად არაწრფივი რხევები შეიძლება იქნას მართული მეორე რეზონატორის მეშვეობით, რომელიც არაა ბმული ძლიერად პირველ რეზონატორთან (ბმულობა  $\sigma \approx 2$  ). აღნიშნული ავტორების მიერ რიცხვითი გამოთვლების გამოყენებით. მიღებულ იქნა ასეთი სისტემის რხევის დინამიკა - ამპლიტუდურ სიხშირული მახასიათებელი, როდესაც ორივე რეზონატორი იმყოფება ძლიერი არაწრფივობის რეჟიმში,

წინამდებარე ნაშრომში ჩვენს მიერ შესწავლილ იქნა ორი ბმული ოსცილატორის რხევის დინამიკა ბმულობის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, როდესაც ორივე ოსცილატორზე მოქმედებს ერთნაირი სიხშირის მაგრამ განსხვავებული სიდიდის მქონე გარეშე ჰარმონიული ძალა. ოსცილატორებს შორის კავშირი მოცემული იქნება ბმის კოეფიციენტი - ბმულობის მეშვეობით. ბმულობა ჩვენთვის წარმოადგენს ძირითად პარამეტრს, რომელიც განმარტებული იქნება ქვემოთ მეორე პარაგრაფში

## 1.2. მოდელი



აღნიშნული ამოცანის გადაწყვეტისას გამოვიყენეთ ვან-დერ პოლის (ნელადცვლადი ამპლიტუდების) მეთოდი. ორი ბმული ნანომექანიკური ოსცილატორის რხევის  $x_{1,2}$  კოორდინატები [14] ნაშრომში მოცემული მოდელის ფარგლებში განვიხილოთ. აღნიშნული ნაშრომის თანახმად განსახილველი სისტემის დინამიკურ განტოლებათა სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + D(x_1 - x_2) &= \varepsilon M, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + D(x_2 - x_1) &= \varepsilon N \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon M &= \varepsilon M(x_1, \dot{x}_1, t) = -2\gamma_1 \dot{x}_1 - \chi_1 x_1^3 + F_1 \cos \Omega t, \\ \varepsilon N &= \varepsilon N(x_2, \dot{x}_2, t) = -2\gamma_2 \dot{x}_2 - \chi_2 x_2^3 + F_2 \cos \Omega t, \\ \varepsilon &\ll 1. \end{aligned} \quad (1.1')$$

სადაც  $\omega_1$  და  $\omega_2$  ცალკეული რეზონატორის საკუთარ რხევათა სიხშირეებია,  $\gamma_1$  და  $\gamma_2$  მილევის კოეფიციენტები,  $\chi_1$  და  $\chi_2$  არაწრფივობის პარამეტრები,  $F_1$  და  $F_2$  გარეზე ჰარმონიული ძალების ამპლიტუდები,  $\Omega$  გარეზე ძალის სიხშირე,  $D$  რეზონატორების ბმის წრფივი კოეფიციენტი. როგორც წესი, ჩვენ მივიჩნევთ, (1) განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარეს, როგორც მცირე შემფოთებას [14,18].

პირველად ჩვენ განვიხილავთ შეუშფოთებელ ერთგვაროვან ბმულ სისტემას, რომლის დინამიკის აღმწერ განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + D(x_1 - x_2) &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + D(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

გადასვლა განზოგადებული კოორდინატებიდან ნორმალურ კოორდინატებზე ხორციელდება შემდეგი გარდაქმნის მეშვეობით [18]:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + q_2, \\ x_2 &= -K_1^{-1} q_1 + K_2 q_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

სადაც

$$K = -\frac{1}{\sigma} (1 + \sqrt{1 + \sigma^2}), \quad K^{-1} = \frac{1}{\sigma} (1 - \sqrt{1 + \sigma^2}), \quad KK^{-1} = 1. \quad (1.4)$$

$$\sigma = \frac{2D}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|}. \quad (1.5)$$

ჩვენ ვუწოდებთ  $\sigma$  პარამეტრს, რომელიც გვიჩვენებს ოსცილატორებს შორის ბმის სიდიდეს ბმულობას. შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ  $\omega_2 > \omega_1$ .

(1.3,1.4) გარდაქმნა აქცევს ორ ბმულ რხევას, რომლებიც აღიწერება (1.2) განტოლებათა სისტემით, ორ დამოუკიდებელ რხევად, რომელთა შესაბამისი მოდების სიხშირეებია :

$$\nu_{1,2}^2 = \tilde{\omega}_+^2 \mp \omega_-^2 \sqrt{1 + \sigma^2}, \quad (1.6)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_+^2 &= \frac{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2}{2}, \\ \tilde{\omega}_{1,2}^2 &= \omega_{1,2}^2 + D, \\ \omega_-^2 &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$\tilde{\omega}_{1,2}$  პარციალური სიხშირეებია. აქ ჩვენ გვსურს ხაზი გავუსვათ იმ ფაქტს, რომ  $\sigma$  ბმულობის სიდიდე დამოკიდებულია არა მხოლოდ  $D$  რეზონატორების ბმის წრფივ კოეფიციენტზე, არამედ ოსცილატორების საკუთარი  $\omega_1$  და  $\omega_2$  სიხშირეების სხვაობაზე. სუსტი ბმულობის შემთხვევაში  $\sigma \ll 1$ ,  $\nu_{1,2}$  მოდების სიხშირეები მიისწრაფვიან  $\tilde{\omega}_{1,2}$  პარციალური სიხშირეების მნიშვნელობისაკენ, ხოლო ძლიერი ბმულობის შემთხვევაში  $\sigma \gg 1$

$$\nu_1^2 \approx \omega_+^2, \quad \nu_2^2 \approx \tilde{\omega}_+^2, \quad (1.8)$$

სადაც

$$\omega_+^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}, \quad \tilde{\omega}_+^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + 2D.$$

(1.8) განტოლებათა სისტემიდან ცხადია, რომ  $\sigma \gg 1$  შემთხვევაში, მოდების სიხშირეთა კვადრატების სხვაობა აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას რომელიც ტოლია  $2D$ .

ორი ბმული ოსცილატორის იძულებითი რხევები ღიწერება შემდეგი განტოლებათა სისტემის მეშვეობით:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + D(x_1 - x_2) &= F_1 \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + D(x_2 - x_1) &= F_2 \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (1.9)$$

სადაც  $F_1$  და  $F_2$  ოსცილატორებზე მოქმედი გარეშე პერიოდული ძალებია, ხოლო  $\Omega$  გარეშე ძალების სიხშირეა.

ადვილია იმის ჩვენება, რომ იმ შემთხვევაში, როცა  $F_{1,2} \neq 0$ , მოცემული (9) სისტემის დინამიკური განტოლებების ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \Omega t, \quad x_2 = A_2 \cos \Omega t, \\ A_{1,2} &= \frac{F_{1,2}(\tilde{\omega}_{2,1}^2 - \Omega^2) + F_{2,1}D}{d^2}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

სადაც

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{(\Omega^2 - \nu_1^2)(\Omega^2 - \nu_2^2)} = \frac{1}{\Omega^2(\nu_2^2 - \nu_1^2)} \left( \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 - \Omega^2} - \frac{\nu_2^2}{\nu_2^2 - \Omega^2} \right) \quad (1.11)$$

აქ  $A_{1,2}$  იძულებითი რხევების ამპლიტუდაა. ადვილია შევნიშნოთ, რომ როცა გარეშე ძალის სიხშირე უახლოვდება მოდების  $\nu_{1,2}$  სიხშირეებს იძულებითი რხევების ამპლიტუდა მკვეთრად (რეზონანსულად) იზრდება.

(1.10) და (1.11) ამონახსნები მიღებულია (1.9) წრფივი ავტონომიური სიტემისათვის. მიღებისა და არაწრფივი წევრების გათვალისწინება შეიძლება განხორციელდეს სტანდარტული პროცედურის თანახმად, რეზონანსულ მნიშვნელში შესაბამისი წევრების დამატებით [18]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_{1,2}^2 - \Omega^2} &\rightarrow \frac{1}{2\nu_{1,2}(\nu_{1,2} - \Omega)} \rightarrow \frac{1}{2\nu_{1,2}(\nu_{1,2} + \delta_{1,2} + i\Gamma_{1,2} - \Omega)} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2\nu_{1,2}\sqrt{(\nu_{1,2} + \delta_{1,2} - \Omega)^2 + \Gamma_{1,2}^2}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

სადაც  $\Gamma_{1,2}$  არის მოდების რელაქსაციის სიჩქარე, ხოლო  $\delta_{1,2}$  - მოდების სიხშირეების არაწრფივი შესწორება, რომელიც დამოკიდებულია  $A_{1,2}$  რხევების ამპლიტუდაზე. თუმცა უნდა შევნიშნოთ, რომ (1.12) გამოსახულება სამართლიანია მხოლოდ სუსტი

არაწრფივობისა და მცირე სიდიდის მილევის კოეფიციენტის შემთხვევაში ( $\nu_{1,2} \gg \delta_{1,2}; \Gamma_{1,2}$ ). შემდეგ პარაგრაფში მოცემული იქნება  $\delta_{1,2}$  და  $\Gamma_{1,2}$  სიდიდეების გამოსახულებები ჩაწერილი სისტემის პარამეტრების მეშვეობით.

### 1.3 მოდების სიხშირეების არაწრფივი წანაცვლება და რელაქსაციური წევრების გავლენა. არაზონანსული შემთხვევა.

ახლა დავუბრუნდეთ ისევ (1) განტოლებათა სისტემას, ოღონდ ამ შემთხვევაში მოვითხოვთ, რომ გარეშე ძალის სიხშირე არ ემთხვევა მოდების სიხშირეს  $\nu_{1,2} \neq \Omega$ , ცხადია, რომ ამ კერძო შემთხვევაში გარეშე ძალის როლი უმნიშვნელოა. თუმცა ჩვენ ყურადღებას გავამახვილებთ მილევისა და არაწრფივობის როლზე ორი ბმული რეზონატორის რხევებზე.

(1.1) განტოლებათა სისტემის შესასწავლად ამ შემთხვევაში ჩვენ ვისარგებლებთ ნელადცვლადი ამპლიტუდების მეთოდით [5]. აღნიშნული მეთოდის გამოყენებით და (1.3) გარდაქმნის გათვალისწინებით განსახილველი ამოცანა დაიყვანება შეუშფოთებელი ამოცანის განხილვაზე, რომელიც ირხევა მოდების სიხშირეზე და რომლის ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1(t) \sin(\nu_1 t + \alpha_1(t)) + A_2(t) \sin(\nu_2 t + \alpha_2(t)), \\ x_2(t) &= -K^{-1} A_1(t) \sin(\nu_1 t + \alpha_1(t)) + K A_2(t) \sin(\nu_2 t + \alpha_2(t)), \end{aligned} \quad (1.13)$$

სადაც  $A_{1,2}(t), \alpha_{1,2}(t)$  ნელადცვლადი ამპლიტუდები და ფაზებია. აღნიშნული მეთოდის მიხედვით  $\dot{A}_{1,2}(t)$  პირველი რიგის მცირე სიდიდეებია და ამიტომ  $\ddot{A}_{1,2}(t)$  მეორე რიგის მცირე სიდიდის პროპორციული წევრები შეძლება უგულებელყოთ (1.1) განტოლებათა სისტემაში. ზემოთქმულის გათვალისწინებით ვღებულობთ შედეგ განტოლებათა სისტემას ნელადცვლადი ამპლიტუდებისა და ფაზებისათვის:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \frac{1}{4\nu_1} \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} (-K^{-1}P_1 + Q_1), \\ \frac{dA_2}{dt} &= -\frac{1}{4\nu_2} \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} (KP_2 + Q_2), \\ A_1 \frac{d\alpha_1}{dt} &= -\frac{1}{4\nu_1} \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} (-K^{-1}P_3 + Q_3), \\ A_2 \frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{1}{4\nu_2} \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} (KP_4 + Q_4), \end{aligned} \quad (1.14)$$

სადაც

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M \cos \xi d\xi d\eta d\zeta & Q_1 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N \cos \xi d\xi d\eta d\zeta \\ P_2 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M \cos \eta d\xi d\eta d\zeta & Q_2 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N \cos \eta d\xi d\eta d\zeta \\ P_3 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M \sin \xi d\xi d\eta d\zeta & Q_3 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N \sin \xi d\xi d\eta d\zeta \\ P_4 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M \sin \eta d\xi d\eta d\zeta & Q_4 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N \sin \eta d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (1.15)$$

თუ ჩავსვავთ  $x_1(t)$  და  $x_2(t)$  გამოსახულებებს (1.13) სისტემიდან  $M$  და  $N$  გამოსახულებებში მოვიღებთ:

$$\begin{aligned} M(\xi, \eta, \zeta) &= -\gamma_1(A_1 v_1 \cos \xi + A_2 v_2 \cos \eta + l_1 \Omega \sin \zeta) - \\ & - \alpha_1(A_1 \sin \xi + A_2 \sin \eta + l_1 \cos \zeta)^3 \\ N(\xi, \eta, \zeta) &= -\gamma_2(-A_1 K^{-1} v_1 \cos \xi + A_2 K v_2 \cos \eta - l_2 \Omega \sin \zeta) - \\ & - \alpha_2(-A_1 K^{-1} \sin \xi + A_2 K \sin \eta + l_2 \cos \zeta)^3 \\ \xi &= v_1 t + \alpha_1; \eta = v_2 t + \alpha_2; \zeta = \Omega t. \end{aligned} \quad (1.16)$$

თუ ჩავსვავთ (1.16) გამოსახულებას (1.15)-ში და ვაინტეგრებთ, მაშინ (1.14) გამოსახულებიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -\frac{1}{2} \Gamma_1; & \frac{dA_2}{dt} &= -\frac{1}{2} \Gamma_2; \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= \delta_1; & \frac{d\alpha_2}{dt} &= \delta_2; \end{aligned} \quad (1.17)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[ \gamma_1 \left( 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \right) + \gamma_2 \left( 1 \mp \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \right) \right] \\ \delta_{1,2} &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{v_{1,2}} \left[ \chi_1 A_1^2 \left( 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \right) + \chi_2 A_2^2 \left( 1 \mp \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

რელაქსაციის სიჩქარე და მოდების სიხშირეების არწრფივი წანაცვლებებია. საინტერესოა იმის აღნიშვნა, რომ მოდების სიხშირეების არწრფივი წანაცვლებები  $\delta_{1,2}$  ამპლიტუდების კვადრატის  $A_{1,2}^2$  ფუნქციებია, რაც წარმოადგენს არაწრფივობის შედეგს.

სუსტი ბმულობის შემთხვევაში ( $\sigma \ll 1$ ), (1.18) გამოსახულებიდან ვღებულობთ:

$$\Gamma_{1,2} \cong \gamma_{1,2}, \quad \delta_{1,2} = \frac{3}{4} \frac{1}{\tilde{\omega}_{1,2}} \chi_{1,2} A_{1,2}^2,$$

ხოლო ძლიერი ბმულობის შემთხვევაში ( $\sigma \gg 1$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma_2 \approx \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \\ \delta_1 &\approx \frac{3}{8} \sqrt{\frac{2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}} (\chi_1 A_1^2 + \chi_2 A_2^2) \\ \delta_2 &\approx \frac{3}{8} \sqrt{\frac{2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 + 4D}} (\chi_1 A_1^2 + \chi_2 A_2^2) \end{aligned} \quad (1.19)$$

ამრიგად, როცა  $\sigma \gg 1$  მოდების მილევა ხდება ერთი და იგივე სიჩქარით. მაშინ როცა მოდების სიხშირეების არაწრფივი წანაცვლებები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან ( $\delta_1 > \delta_2$ ).

#### 1.4. ორი ბმული რეზონატორის ამპლიტუდურ- სიხშირული მახასიათებელი

ორი ბმული რეზონატორის იძულებითი რხევების ამპლიტუდა მოცემულია (1.9) და (1.10) გამოსახულებებით. თუ გამოვიყენებთ ბმულობის გამოსახულებას ეს ფორმულები შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$A_{1,2} = \frac{F_{1,2}(\tilde{\omega}_{2,1}^2 - \Omega^2) + F_{2,1}\omega_-^2\sigma}{2\Omega^2} \times \left[ \frac{\omega_+^2}{\omega_-^2} \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \left( \frac{1}{v_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{v_2^2 - \Omega^2} \right) - \left( \frac{1}{v_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{v_2^2 - \Omega^2} \right) \right]. \quad (1.20)$$

სუსტი ბმულობის შემთხვევაში ( $\sigma \ll 1$ ),  $A_{1,2} = 2F_{1,2}/(\omega_{1,2}^2 - \Omega^2)$  . ხოლო ძლიერი ბმულობის შემთხვევაში ( $\sigma \gg 1$ ):

$$A_{1,2} = \frac{DF_{2,1}}{\Omega^2} \left( \frac{1}{\Omega^2 - \omega_+^2} + \frac{1}{\Omega^2 - \tilde{\omega}_+^2} \right). \quad (1.21)$$

ბმულობის შუალედური მნიშვნელობისათვის ( $\sigma \approx 2$ ) ორი ბმული ნანომექანიკური რეზონატორის რხევები შესწავლილ იქნა ექსპერიმენტულად და რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით შრომაში [14]. (1.20) ზოგადი ანალიზური გამოსახულებით მოცემული ამპლიტუდურ სიხშირული მახასიათებელი ჩაწერილია ბმულობის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და რა თქმა უნდა მოიცავს ბმულობის შუალედური მნიშვნელობის შესაბამის [14] ნაშრომში მოცემულ ამპლიტუდურ სიხშირულ დამოკიდებულებასაც. (1.20) გამოსახულების ცვლილება არაწრფივობისა და მილევის გათვალისწინებით ადვილად შეიძლება განვახორციელოთ (1.12) გარდაქმნის მეშვეობით. თუმცა უნდა ავღნიშნოთ, რომ ამ გზით მიღებული გამოსახულების ანალიზური განხილვა მეტად რთული ამოცანაა ამიტომ ჩვენ მოგვყავს აქ მხოლოდ ძლიერი ბმულობის ( $\sigma \gg 1$ ) ზღვრული შემთხვევის შესაბამისი ასიმპტოტური გამოსახულება:

$$A_{1,2} \cong \frac{DF_{2,1}}{\Omega^2} \left( \frac{1}{\omega_+ \sqrt{(\omega_+ + \delta_1 - \Omega)^2 + \Gamma_1^2}} + \frac{1}{\tilde{\omega}_+ \sqrt{(\tilde{\omega}_+ + \delta_2 - \Omega)^2 + \Gamma_2^2}} \right), \quad (1.22)$$

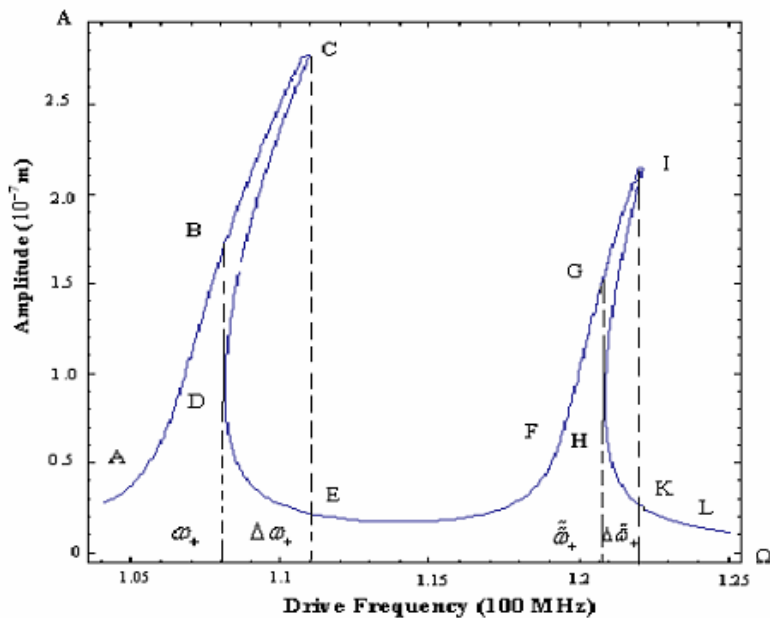
სადაც  $\delta_{1,2}$  და  $\Gamma_{1,2}$  განისაზღვრება (1.19) გამოსახულების მეშვეობით.

როგორც (1.22) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, ძლიერი ბმულობის შემთხვევაში, მეორე ოსცილატორზე მომქმედი ძალა აღძრავს პირველი ოსცილატორის რხევით მოძრაობას და პირიქით, პირველ ოსცილატორზე მომქმედი ძალა აღძრავს მეორე ოსცილატორის რხევით მოძრაობას.

ამ შემთხვევაში ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი წარმოადგენს ორ სხვადასხვა სიმაღლის მქონე გადახრილ პიკს (იხილეთ ნახ.1.1). პირველი პიკის შეესაბამისი სიხშირეა  $\omega_+$  და უფრო მაღალია ვიდრე მეორე პიკი, რომელსაც შეესაბამება სიხშირე  $\tilde{\omega}_+$  ( $\tilde{\omega}_+ \gg \omega_+$ ). ასევე უნდა აღვნიშნოთ, რომ პირველი პიკი უფრო დახრილია ვიდრე მეორე პიკი, რადგან ადგილი აქვს თანაფარდობას  $\delta_1 > \delta_2$ . ამპლიტუდურ სიხშირული მახასიათებლის არასტაბილური  $CD$  და  $IH$  უბნები გამოყოფილია წყვეტილი ხაზით. გარეშე ძალის  $\Omega$  სიხშირის ზრდისას/კლებისას  $\Delta\omega_+$  და  $\Delta\tilde{\omega}_+$  მახლობლად დაიკვირვება ჰისტერეზის  $BCED$  და  $GIKH$  [15,18]. ორი ბმული არაწრფივი ოსცილატორის ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლის მსგავსი ჰისტერეზუსული მრუდი მიღებული იქნა რიცხვითი გამოთვლებით და შემდეგ დაკვირვებული ექსპერიმენტულად ზემოთ მოყვანილ [14] ნაშრომში ბმულობის შუალედური მნიშვნელობისათვის  $\sigma \approx 2$  (ზომიერი ბმულობისათვის). არაწრფივ უბანზე ასეთი სისტემა განსაკუთრებით მგძნობიარეა უმცირესი შეშფოთების მიმართაც

კი. ეს ფაქტი შეიძლება გამოყენებულ იქნას ოსცილატორის ამპლიტუდის გადამრთველის ფუნქციის შესრულებისათვის. C წერტილის მიღწევას სისტემის რხევების ამპლიტუდის მრუდი ნახტომისებურად გადადის E წერტილში. მაშასადამე, მარტივი და ეფექტური ამპლიტუდის გადამრთველი მოწყობილობა შეიძლება განხორციელდეს ასეთი სისტემის გარეშე ველის მხოლოდ სიხშირის ცვლილების მეშვეობით.

ხაზი უნდა გაესვას იმ ფაქტს, რომ ასეთი გადამრთველის რეალიზებისთვის შეიძლება გამოყენებულ იქნას ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლის მხოლოდ არასტაბილური უბანი (იხილეთ სიხშირის B – C და G – I მონაკვეთები ნახ.1.1). ამრიგად, სისტემა შეიძლება გადავიდეს უფრო დაბალ მდგომარეობაში მანამ სანამ ის მიღწევს არასტაბილური უბნის მაქსიმალურ C წერტილს. თუმცა იმის გამო, რომ ასეთი ნახტომისებური გადასვლის დროს ამპლიტუდათა სხვაობა მცირე სიდიდეა მისი ექსპერიმენტული დამზერა გართულებულია. იმისათვის, რომ დავძლიოთ ეს პრობლემა საჭიროა გარეშე ძალის სიძირის ადიაბატური ცვლილება.



ნახ.1.1. ორი ბმული ნანომექანიკური რეზონატორის ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის  $F_1 = F_2$ ,  $A_1 = A_{1,2}$ ,  $\omega_+ = 1,07 \cdot 10^8$  ჰც,  $\tilde{\omega}_+ = 1,2 \cdot 10^8$  ჰც,  $\delta_1 = 50,4 \div 10^{18} A^2$  ჰც,  $\delta_1 = 45,0 \div 10^{18} A^2$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2,0 \cdot 10^5$  ჰც,  $D \cdot F_{1,2} = 81,6 \cdot 10^{13} \text{ მ/წმ}^2$ .

### 1.5. მოდების სიხშირეების არაწრფივი წანაცვლება და რელაქსაციური წევრების გავლენა. რეზონანსული შემთხვევა.

დავუშვათ, რომ  $F_1 \cos \Omega t$  ჰარმონიული გარეშე ძალის სიხშირე ემთხვევა ერთ-ერთი მოდის სიხშირეს და  $F_2 = 0$ . ამ ამოცანის ამოსახსნელად ჩვენ გამოვიყენებთ კარგად

ცნობილი ნელადცვლადი ამპლიტუდების მეთოდი. (1.3) თანაფარდობისა და რეზონანსის პირობის გათვალისწინებით, შეგვიძლია ჩავწეროთ (1.1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები შემდეგი სახით :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1(t) \sin v_1 t + A_2(t) \cos v_1 t + B(t) \sin(v_2 t + \psi(t)) \\ x_2(t) &= -K^{-1}(A_1(t) \sin v_1 t + A_2(t) \cos v_1 t + KB(t) \sin(v_2 t + \psi(t))). \end{aligned} \quad (1.23)$$

თუ გამოვიყენებთ იმ მეთოდს, რომლითაც ვისარგებლეთ წინა თავში, მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას ნელადცვლადი ამპლიტუდებისა და ფაზებისათვის:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \frac{1}{4v_1} \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} (-K^{-1}P_1^{(r)} + Q_1^{(r)}) \\ \frac{dA_2}{dt} = -\frac{1}{4v_1} \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} (-KP_2^{(r)} + Q_2^{(r)}) \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{4v_2} \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} (KP_3^{(r)} + Q_3^{(r)}) \\ \frac{1}{B} \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{4v_2} \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} (KP_4^{(r)} + Q_4^{(r)}) \end{cases}, \quad (1.24)$$

სადაც

$$\begin{aligned} P_1^{(r)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M \cos \eta d\xi d\eta & Q_1^{(r)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N \cos \eta d\xi d\eta \\ P_2^{(r)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M \sin \eta d\xi d\eta & Q_2^{(r)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N \sin \eta d\xi d\eta \\ P_3^{(r)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M \cos \xi d\xi d\eta & Q_3^{(r)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N \cos \xi d\xi d\eta \\ P_4^{(r)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M \sin \xi d\xi d\eta & Q_4^{(r)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N \sin \xi d\xi d\eta \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\xi = v_2 t + \psi, \quad \eta = \Omega t,$$

$$\begin{aligned} M^{(r)} &= M^{(r)}(x_1, \dot{x}_1, t) = -\gamma_1 [v_1 (A_1 \cos \eta - \sin \eta) + B \cos \xi] - \\ &\quad - \chi_1 (A_1 \sin \eta + A_2 \cos \eta + B \cos \xi)^3 + F \cos \Omega t \\ N^{(r)} &= N^{(r)}(x_2, \dot{x}_2, t) = -\gamma_2 [-K^{-1}v_1 (A_1 \cos \eta - A_2 \sin \eta) + v_2 B \cos \xi] - \\ &\quad - \chi_2 [-K^{-1}(A_1 \sin \eta + A_2 \cos \eta) + KB \sin \xi]^3 \end{aligned} \quad (1.26)$$

თუ (1.27) თანაფარდობას ჩავსვავთ (1.28) განტოლებათა სისტემაში და ვაინტეგრებთ, მაშინ მივიღებთ ნელადცვლადი ამპლიტუდებისა და ფაზის გამოსახულებებს ცხადი სახით. ძლიერი ბმულობის შემთხვევაში ეს გამოსახულებები მარტივდება და იღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= \frac{F}{4\Omega} - \gamma A_1 - \frac{3\chi}{8\Omega} (A_1^2 + A_2^2 + 2B^2) A_2 \\ \frac{dA_2}{dt} &= -\gamma A_2 + \frac{3\chi}{8\Omega} (A_1^2 + A_2^2 + 2B^2) A_1 \\ \frac{dB}{dt} &= -\gamma B\end{aligned}\quad (1.27)$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან ცხადი ხდება, რომ  $F_1 \cos(\Omega t)$ , ( $\Omega = \nu_1$ ) რეზონანსული გარეშე ძალის და  $\gamma = \chi = 0$  შემთხვევაში ჩნდება არასტაბილურობის მარტივი ფორმა (ე.წ. სეკულარული არასტაბილურობა), კერძოდ რხევის ამპლიტუდის დროის მიხედვით წრფივი ზრდა  $A_1 = (F/4\Omega)t$ .

გვინდა შევნიშნოთ, რომ (1.27) განტოლებათა სისტემის  $A_1, A_2$  და  $B$  ამპლიტუდების პირველი სამი განტოლება არ არის დამოკიდებული მეოთხე  $\psi$  ცვლადზე. მაშასადამე, (1.27) განტოლებათა სისტემის პირველი სამი განტოლება შეიძლება იყოს ამოხსნილი დამოუკიდებლად.

იმისათვის რათა ვიპოვოთ ნელადცვლადი ამპლიტუდების სტაციონარული მნიშვნელობები გამოვიყენოთ ცვლადთა შემდეგი გარდაქმნა  $\rho$  და  $\theta$  პოლარ კოორდინატების მეშვეობით:

$$A_1 = \rho \cos \theta, \quad A_2 = -\rho \sin \theta, \quad (1.28)$$

შედეგად მივიღებთ :

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\gamma\rho + \frac{F}{4\Omega} \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\omega_{NL} - \frac{F}{4\Omega} \frac{\sin \theta}{\rho} \\ \frac{dB}{dt} &= -\gamma B,\end{aligned}\quad (1.29)$$

სადაც: 
$$\omega_{NL} = \frac{3\chi}{8\Omega} (\rho^2 + 2B).$$

თუ (1.29) განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარეს გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ ამპლიტუდების სტაციონარულ მნიშვნელობებს:

$$B_0 = 0, \quad s \cos \theta_0 = \rho_0, \quad s \sin \theta_0 = -r \rho_0^3, \quad (1.30)$$

სადაც  $s = \frac{F}{4\gamma\Omega}$ ,  $r = \frac{3}{4} \frac{\chi}{\gamma\Omega}$ . იმისათვის რათა განვსაზღვროთ  $\rho_0$  გამოვრიცხოთ (1.31)

განტოლებათა სისტემიდან ცვლადი  $\theta_0$ , შედეგად მივიღებთ კუბურ განტოლებას  $x = \rho_0^2$  ცვლადის მიმართ :

$$x^3 + \frac{x}{r^2} - \frac{s^2}{r^2} = 0 \quad (1.31)$$

(1.31) განტოლება წარმოადგენს დაყვანილ კუბურ განტოლებას. ამ განტოლების ნამდვილი ფესვების რაოდენობა დამოკიდებულია მისი დისკრიმინანტის ნიშანზე:

$$D = \left(\frac{1}{3r^2}\right)^3 + \left(\frac{s^2}{2r^2}\right)^2 > 0, \quad (1.32)$$



რომელიც ჩვენს შემთხვევაში დადებითია. ამრიგად (1.33) განტოლებას აქვს ნამდვილი ფესვები, რომელთა განსაზღვრა შეიძლება კარდანოს ფორმულის მეშვეობით. თუმცა უნდა ავლნიშნოთ, რომ მათი ზუსტი განსაზღვრა არა არის საჭირო სტაბილურობის პირობების დასადგენად, რაც იქნება ნაჩვენები შემდგომში.

იმისათვის რათა განვსაზღვროთ სტაციონარული წერტილების სტაბილურობა უფრო ზუსტად უნდა მოვახდინოთ (1.29) განტოლებათა სისტემის გაწრფივება სტაციონარული წერტილების მახლობლობაში:  $A_1^{(0)} = \rho_0 \cos \theta_0$ ,  $A_2^{(0)} = \rho_0 \sin \theta_0$ ,  $B_0 = 0$ .  
შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{cases} \delta \dot{A}_1 = -\gamma(1 + 2rA_1^{(0)}A_2^{(0)})\delta A_1 - \gamma r(A_1^{(0)2} + 3A_2^{(0)2})\delta A_2 \\ \delta \dot{A}_2 = \gamma r(A_2^{(0)2} + 3A_1^{(0)2})\delta A_1 - \gamma(1 - 2rA_1^{(0)}A_2^{(0)})\delta A_2 \end{cases} \quad (1.33)$$

(1.28) გარდაქმნის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{cases} \delta \dot{A}_1 = R_{11}\delta A_1 + R_{12}\delta A_2 \\ \delta \dot{A}_2 = R_{21}\delta A_1 + R_{22}\delta A_2 \end{cases} \quad (1.34)$$

სადაც

$$\|R\| = \begin{vmatrix} -\gamma(1 + r\rho_0^2 \sin 2\theta_0) & -\gamma r\rho_0^2(3 - \cos 2\theta_0) \\ \gamma r\rho_0^2(3 + \cos 2\theta_0) & -\gamma(1 - r\rho_0^2 \sin 2\theta_0) \end{vmatrix}. \quad (1.35)$$

როგორც [16] ნაშრომშია ნაჩვენები, სტაბილურობის ტიპი განისაზღვრება შემდეგი სამი პარამეტრის მეშვეობით:

$$T = R_{11} + R_{22}, \quad d = R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}, \quad T^2 - 4d \quad (1.36)$$

ჩვენს შემთხვევაში ეს სამი პარამეტრი ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$\begin{aligned} T &= -2\gamma < 0, \quad d = \gamma^2(1 + 8r^2\rho_0^4) > 0, \\ T^2 - 4d &= 32\gamma^2r^2\rho_0^2 > 0, \end{aligned} \quad (1.37)$$

რაც მიუთითებს სტაბილური ფოკუსის არსებობაზე. შევნიშნოთ, რომ (1.37) პირობა არ არის დამოკიდებული  $s = \frac{F}{4\gamma\Omega}$  ველის პარამეტრზე და შესაბამისად ძალაშია

$(A_1, A_2)$  ამპლიტუდების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ამრიგად, სტაციონარული რეზონანსული რეჟიმის დროს, როცა გარეშე ძალის სიხშირე ემთხვევა ორი ძლიერად ბმული რეზონატორის მოდების ერთ-ერთ სიხშირეს, სტაციონარული წერტილები წარმოადგენენ სტაბილურ ფოკუსს.. მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ დისიპაცია იწვევს სეკულარული არასტაბილურობის რეჟიმის სტაბილიზაციას.

## 1.6. ენერჯის გადანაწილება რეზონატორებს შორის

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ პრობლემას, რომელიც ეხება გარეშე ჰარმონიული ძალის მეშვეობით სისტემისათვის გადაცემული ენერჯის გადანაწილებას რეზონატორებს შორის  $(A_1^2/A_2^2)$ . დავუშვათ, რომ ჰარმონიული ძალა მოქმედებს მხოლოდ მეორე რეზონატორზე  $F_2 \equiv F$  და  $F_1 = 0$ ,. მაშინ (1.10) გამოსახულების თანახმად, იძულებითი რხევების ამპლიტუდებისათვის მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას :

$$\left| \frac{A_1}{A_2} \right| = \frac{D}{\tilde{\omega}_1^2 - \Omega^2} \quad (1.38)$$

გავიხსენოთ, რომ (1.10) გამოსახულების თანახმად  $A_{1,2}$  ამპლიტუდებს გააჩნიათ ერთნაირი რეზონანსული მნიშვნელი. (1.38) გამოსახულებაში ისინი ერთმანეთს აბათილებენ და შედეგად  $A_1/A_2$  ამპლიტუდების შეფარდებაში ისინი აღარ გვაქვს. მიუხედავად ამისა, როგორც ჩანს (1.38) გამოსახულებიდან  $A_1/A_2$  ამპლიტუდების შეფარდებაში ჩნდება ახალი რეზონანსული მნიშვნელი პარციალურ სიხშირეებზე.

თავიდან უგულებელყოთ მიღებისა და არაწრფივობის შესაბამისი წევრები და დავუშვათ, რომ გარეშე ძალის სიხშირე თანხვედება რეზონატორების ერთ-ერთ პარციალურ სიხშირეს. მაშინ, თუ დავუშვებთ, რომ  $F_2 \equiv F$ ,  $F_1 = 0$  და  $\Omega \approx \tilde{\omega}_2$ , მივიღებთ:

$$\left| \frac{A_1}{A_2} \right| = \frac{D}{|\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2|} \approx \frac{\sigma}{2}. \quad (1.39)$$

ამრიგად, კავშირი  $A_1$  და  $A_2$  ამპლიტუდებს შორის არის წრფივი და ხდება ენერჯიის  $\left(\frac{\sigma^2}{4}\right)$  ნაწილის გადაცემა მეორე რეზონატორიდან პირველ რეზონატორზე.

მიღებისა და არაწრფივობის გათვალისწინება ხდება ზემოთ აღწერილი მეთოდის მიხედვით:

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_1^2 - \Omega^2} \rightarrow \frac{1}{2\tilde{\omega}_1 \sqrt{(\beta A_1^2 - \Delta)^2 + \gamma^2}}, \quad \beta = \frac{3}{4} \frac{\chi}{\omega_1}, \quad (1.40)$$

დავუშვათ, რომ

$$\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma, \quad \chi_1 = \chi_2 \equiv \chi, \quad \Delta = \omega_2 - \omega_1 > 0.$$

რეზონანსული მნიშვნელი (1.40) გამოსახულების მნიშვნელოვანი მახასიათებელია. როცა  $A_1$  ამპლიტუდა იცვლება რეზონანსის პირობა რჩება უცვლელი (1.40) ფორმულაში.

თუ გავითვალისწინებთ (1.40) გამოსახულებას, (1.38) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{x}{y} = \frac{f}{(\beta x - \Delta)^2 + \gamma^2}, \quad (1.41)$$

$$\text{სადაც } x = A_1^2, \quad y = A_2^2, \quad f = \frac{D^2}{4\tilde{\omega}_1^2},$$

მაშასადამე,  $y = Y(x)$  ფუნქციის ნაცვლად შეიძლება შევისწავლოთ შემდეგი ცხდი ფუნქცია:

$$F(x, y) = x[(\beta x - \Delta)^2 + \gamma^2] - fy = 0 \quad (1.42)$$

თუ  $dy/dx$  წარმოებულს გავუტოლებთ ნულს, მაშინ მოვძებნით  $y = Y(x)$  ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილებს:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dF/dx}{dF/dy} = f^{-1}(3\beta^2 x^2 - 4\beta x \Delta + \Delta^2 + \gamma^2) = 0, \quad (1.43)$$

და ექსტრემუმის წერტილები იქნება:

$$x_{1,2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta}{\beta} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{\Delta^2 + y^2}{\Delta^2}} \right]. \quad (1.44)$$

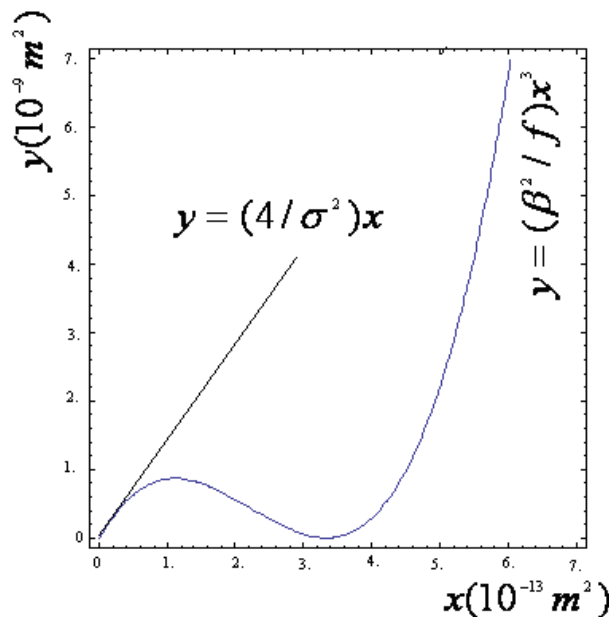
თუ განვიხილავთ ზღვრულ შემთხვევას  $\gamma \ll \Delta$ , მაშინ გვექნება ორი ნამდვილი ფესვი:

$$x_1 = \frac{\Delta}{\beta}, \quad x_2 = \frac{\Delta}{3\beta}, \quad . \quad (1.45)$$

განვსაღროთ მეორე რიგის წარმოებულის ნიშნები:

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_1} = \frac{2\beta\Delta}{f} > 0, \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_2} = -\frac{2\beta\Delta}{f} < 0, \quad (1.46)$$

მაშასადამე,  $y = Y(x)$  ფუნქციას გააჩნია მაქსიმუმი  $x = x_2$  წერტილში და მინიმუმი  $x = x_1$  წერტილში.  $y = Y(x)$  მრუდი ხასიათდება ორი ასიმპტოტით. პირველი მათგანი, რომელიც შეესაბამება  $x$  და  $y$  მცირე მნიშვნელობებს, წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას  $y = (\Delta^2 / f)x = (4 / \sigma^2)x$ . ხოლო მეორე, რომელიც შეესაბამება  $x$  და  $y$  დიდ მნიშვნელობებს, წარმოადგენს კუბურ ფუნქციას  $y = (\beta^2 / f)x^3$ . მიღებული შედეგების გათვალისწინებით შეიძლება აგებულ იქნას რეზონატორებს შორის ენერჯის განაწილების ფუნქციის მრუდი (იხილეთ ნახ.1.2).



ნახ.1.2 ენერჯის განაწილება რეზონატორებს შორის და მისი ასიმპტოტები პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობისათვის  $\beta = 0.51 \cdot 10^{20}$  ჰც/მ,  $\Delta = 0.17 \cdot 10^8$  ჰც,  $\gamma = 2.0 \cdot 10^5$  ჰც,  $f = 1.64 \cdot 10^{10}$  ჰც<sup>2</sup>.

ამრიგად მიღებული შედეგებიდან ნათელი ხდება, რომ ანჰარმონიული წევრის გათვალისწინება მნიშვნელოვნად ცვლის რეზონატორებს შორის ენერჯის განაწილების სურათს. აღმოჩნდა, რომ მეორე რეზონატორიდან  $F_2 = F$ , პირველი რეზონატორისათვის  $F_1 = 0$  გადაცემული ენერჯია დამოკიდებულია მეორე რეზონატორის რხევის ამპლიტუდაზე. რხევის მცირე ამპლიტუდებისათვის ენერჯის განაწილებას აქვს წრფივი

ხასიათი  $A_1^2 = \frac{\sigma}{4} A_2^2$ , და ენერჯის გადაცემის სისწრაფე განისაზღვრება  $\sigma$  ბმულობის კოეფიციენტის მნიშვნელობით. რხევის ამპლიტუდის ზრდის გამო აღნიშნული წრფივი კანონი იცვლება არაწრფივი დამოკიდებულებით  $A_1^2 = \left( \frac{4}{9} \cdot \frac{D^2}{\chi^2} A_2^2 \right)^{1/3}$ . მაშასადამე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ რხევების ანჰარმონიულობა ამცირებს ენერჯის გადაცემის სიჩქარეს.

### 1.7. დასკვნა

წინამდებარე ნაშრომის ამ თავის მიზანი იყო დაგვეჩერა ორი ბმული ნაწილი ელექტრომექანიკური რეზონატორის რხევითი დინამიკის აღმწერი განტოლებები, რომელიც სამართლიანი იქნებოდა ბმულობის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. დასახული ამოცანის გასაწყვეტად, ჩვენ შევისწავლეთ ორი ბმული ნაწილი ელექტრომექანიკური რეზონატორის დინამიკა, როდესაც რხევები ამ რეზონატორებში აღიმგრება გარეშე ძალის მეშვეობით. ჩვენ მივიღეთ ანალიზური გამოსახულებები ბმული არაწრფივი რეზონატორების ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლისათვის, რომლებიც სამართლიანია ბმულობის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და ზომიერი ბმულობის შემთხვევაში ეთანადება ადრე მიღებულ შედეგებს [14]. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი წარმოადგენს ორ დახრილ პიკს, რომლებიც დაცილებულნი არიან ერთმანეთისაგან 2D ტოლი მანძილით. თუ გარეშე ძალის  $\Omega$  სიხშირეს ვზრდით ან ვამცირებთ, მაშინ რხევის ამპლიტუდის ცვლილება ორი ჰისტერეზისული მრუდის მეშვეობით აღიწერება. ეს მრუდები შეიცავენ არასტაბილურ უბნებს, რომელთა მიდამოში გარეშე ძალის სიხშირის ცვლილებას თან სდევს რხევის ამპლიტუდის მყისიერი და ნახტომისებური ცვლილება. რაც იძლევა საშუალებას, რომ სწრაფად ვცვალოთ რეზონატორებს შორის ენერჯის გადაცემის რეჟიმი. ჩვენ ასევე გვზიხილეთ აღნიშნულ სისტემაში ოსცილატორებს შორის ენერჯის გადანაწილების პროცესი. გავანალიზეთ რა რხევის დინამიკის სტაბილური და არასტაბილური უბნები, ძირითადი აქცენტი გავამახვილეთ არაწრფივ უბანზე. ჩვენ დავადგინეთ, რომ რხევების მცირე ამპლიტუდებისათვის, ენერჯის გადაცემას რეზონატორებს შორის აქვს წრფივი ხასიათი  $A_1^2 = \frac{\sigma}{4} A_2^2$  და ენერჯის გადაცემის სიჩქარე განისაზღვრება ბმულობის კოეფიციენტით. როცა რხევის ამპლიტუდა იზრდება, მაშინ ენერჯის გადაცემა ღებულობს არაწრფივ ხასიათს  $A_1^2 = \left( \frac{4}{9} \cdot \frac{D^2}{\chi^2} A_2^2 \right)^{1/3}$  და ენერჯის გადაცემის სიჩქარე მცირდება. ენერჯის გადაცემის სიჩქარის ცვლილება გარეშე ძალის სიხშირის ცვლილების მეშვეობით არის ადვილად განსახორციელებელი და დამზერადი ექსპერიმენტულად. მიღებული შედეგები შეიძლება გამოყენებულ იქნას ნაწილი ელექტრომექანიკური რეზონატორის ბაზაზე მეტად მგრძობიარე გადამრთველის შესაქმნელად.

## თავი II. ატომი – ველი სისტემის კლასიკური მოდელის კვანტური შესწორება

### 2.1. შესავალი. ამოცანის დასმა.

არაწრფივად მერხევი სისტემა ცვლადებში ქმედება – კუთხე ხასიათდება რხევის სიხშირის დამოკიდებულებით ქმედებაზე  $\omega(I)$ . გარეშე პერიოდული ველის ზემოქმედების შედეგად სისტემაში შეიძლება დამყარდეს სტაციონარული არაწრფივი რეზონანსის რეჟიმი.

იმის მიხედვით, თუ როგორია არაწრფივობის ხარისხი და ამოცანის სხვა პარამეტრები, რეზონანსის მოვლენას არაწრფივად მერხევ სისტემებში, შეიძლება ჰქონდეს თვისობრივად განსხვავებული ფორმა. არაწრფივობის ხარისხი, ცვლადებში ქმედება-კუთხე, შეიძლება განსაზღვრულ იქნას  $\omega$  არაწრფივი სიხშირის წარმოებულთ ქმედებით  $I$ :  $\omega' \equiv d\omega(I)/dI$ , რომელიც წარმოადგენს სისტემის მიერ რეზონანსული მდგომარეობის დატოვების სიჩქარის სიდიდეს. ცნობილია შემდეგი ტიპის რეზონანსები, რომლებიც ხასიათდებიან: 1) არაწრფივი სიხშირის ცვლილების სიდიდის მცირე მნიშვნელობით  $\omega' \sim \varepsilon$  სადაც  $\varepsilon$  ატომის ველთან ურთიერთქმედების მცირე პარამეტრია. ამ შემთხვევაში რეზონანსული სიხშირე „გაცოცდება“ რეზონანსული მნიშვნელობიდან ცვლადი ველის შემდეგი ჰარმონიკის მნიშვნელობაზე [19] (თუ რა თქმა უნდა არსებობს ასეთი ჰარმონიკა); 2) არაწრფივი სიხშირის ცვლილების სიდიდის დიდი მნიშვნელობით (მაგრამ არც ისე დიდით, რომ ექსპერიმენტის განმავლობაში სისტემამ მიაღწიოს უახლოეს მეზობელ ჰარმონიკას)  $\omega' < \varepsilon$ . ამ შემთხვევაში სისტემა „ჩაჭერილია“ რეზონანსის მახლობელ მდგომარეობაში [20]. რეზონანსული სიხშირის ცვლილება, განპირობებული  $I$  ქმედების ცვლილებით, ნელდება როცა ქმედების მნიშვნელობა ახლოსაა ქმედების იმ  $I_0$  მნიშვნელობასთან რომელიც აკმაყოფილებს რეზონანსის პირობას:  $\omega(I_0) \approx \Omega$ ; რხევის აღნიშნულ მოდას უწოდებენ სტაციონარულ რეზონანსულ მოდას; 3)  $\omega' \geq 1/\varepsilon$ , რეზონანსიდან „გაქცევის“ სიჩქარე იმდენად დიდია, რომ სიტემა ვერ ჩერდება რეზონანსულ რეჟიმში ნებისმიერი ჰარმონიკისათვის და ადგილი აქვს ქაოსურ დინამიკას [20]. წინამდებარე ნაშრომის ამ თავში ჩვენ საქმე გვექნება მხოლოდ მეორე ტიპის რეზონანსულ მოვლენასთან.

როგორც ცნობილია, არაწრფივად მერხევ სისტემებში სტაციონარული რეზონანსის რეჟიმი ხორციელდება სისტემის  $I$  ქმედების იმ მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს რეზონანსის პირობას  $\omega_0 - \omega + \omega_{NL}(I_0) = 0$ . აქ  $\omega_0$  -საკუთარი სიხშირეა,  $\omega$  - გარეშე ძალის სიხშირე,  $\omega_{NL}(I)$  - სიხშირის არაწრფივი შესწორებაა, რომელიც წარმოადგენს ქმედების ფუნქციას. რეზონანსული მნიშვნელობის  $\Delta I \ll I_0$  შემდეგი, უფრო მაგალი რიგის შესწორების გამოთვლის მეთოდები განხილულია მონოგრაფიაში [20]. ამ მეთოდების გამოყენებით მოძრაობის კლასიკური განტოლებების მეშვეობით შეიძლება გამოთვლილ იქნას როგორც სტაციონარული ასევე არასტაციონარული შესწორებები შემფოთების თეორიის ნულოვანი რიგის მახასიათებლებისათვის.

თუ ატომში, რომელიც განიცდის გარეშე ელექტრომაგნიტური ველის ზემოქმედებას ელექტრონის მოძრაობა აღიწერება არაწრფივი ოსცილატორის მოდელის მეშვეობით, მაშინ შესაძლებელია ორი განსხვავებული შემთხვევა  $I_0$  ქმედების მნიშვნელობიდან გამომდინარე: 1)  $I_0 \approx N\hbar$ , სადაც  $N$  დიდი რიცხვია,  $\hbar$  კი პლანკის მუდმივა. ამ შემთხვევაში  $I_0$  კლასიკური სიდიდეა, ხოლო მისი შესწორება შეძლება იყოს როგორც კლასიკური ასევე კვანტური სიდიდე. 2)  $I_0 \approx n\hbar$ , სადაც  $n \gg 1$  (მაგრამ არ არის დიდი რიცხვი). ამ შემთხვევაში  $\Delta I$  შესწორება შეიძლება იყოს მხოლოდ  $\hbar$  პლანკის მუდმივის რიგის (მაგალითად  $I_0 \approx 10^4 \hbar$ ,  $\Delta I \approx 10\hbar$ . ამ შემთხვევაში  $I_0$  ისევ კლასიკური სიდიდეა, ხოლო  $\Delta I$  შესწორება შეძლება იყოს მხოლოდ კვანტური სიდიდე. ორივე ეს შემთხვევა შეიძლება განხორციელდეს პრაქტიკულად.. თუმცა ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ მეორე შემთხვევას. ცხადია რომ ამ შემთხვევაში  $\Delta I$  შესწორების გამოსათვლელად უნდა ვისარგებლოთ კვანტური მოძრაობის განტოლებებით.

ჩვენი ინფორმაციით, აღნიშნული შემთხვევა დღეისათვის არ არის შესწავლილი. მეტიც, თუ აღნიშნული შემთხვევა არის ფიზიკურად შესაძლებელი მაშინ აზრი აქვს მის განხილვასაც. აღნიშნული მოვლენის შესწავლა იმითიცაა განპირობებული, რომ სტაციონარულ რეზონანსულ რეჟიმში, შესაძლებელია  $I_0$  ქმედების მნიშვნელობის ცვლილება და მისი მნიშვნელობის შემცირება სასურველ სიდიდემდე. როდესაც ვპოულობთ  $I_0$  ქმედების რეზონანსულ მნიშვნელობას, არაწრფივი რეზონანსის განხილვა ამ შემთხვევაში ხორციელდება კლასიკური ფიზიკის მოძრაობის განტოლებებით, ხოლო მისი შესწორების არაწრფივი რეზონანსის კვანტური თეორიის თანახმად. ამით აიხსნება წინამდებარე ნაშრომის სათაურიც, რომელიც შეიძლება ასეც იყოს ფორმულირებული – არაწრფივი რეზონანსის კვაზიკვანტური თეორია.

ქვემოთ ჩვენ ვნახავთ, რომ წარმოქმნილი კვანტური მდგომარეობა წარმოადგენს  $\Delta I$  შესწორების ოპერატორის საკუთარ მდგომარეობას, რომელიც არ კომუტირებს ენერჯიის ოპრეტორთან და მაშასადამე წარმოადგენს ჰამილტონიანის საკუთარი ფუნქციების სუპერპოზიციას. კერძოდ, აღნიშნული მდგომარეობა, რომელიც ფორმირდება ამგვარი სუპერპოზიციის შედეგად შესაძლებელია რომ აღმოჩნდეს ინვერსიულად დასახლებული. ამრიგად, ოპტიკური დიაპაზონის იმპულსური დატუმბვის შედეგად შესაძლებელია მიღებულ იქნას ენერგეტიკული დონეების ინვერსიული დასახლება მიკროტალღურ დიაპაზონში. წინამდებარე ნაშრომის ამ თავის მიზანს წარმოადგენს ამ დროს წარმოქმნილი ენერგეტიკულ დონეთა დასახლებების ალბათობების გამოთვლა.

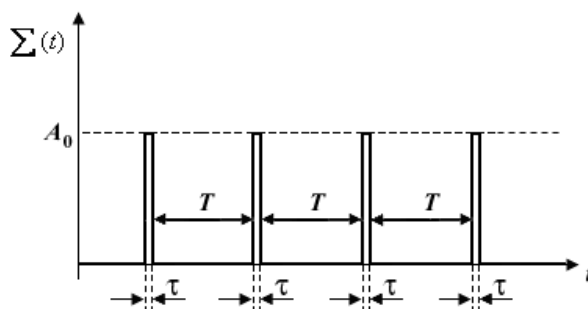
## 2.2. ატომის ანჰარმონიული ოსცილატორის მოდელი და სტაციონარული რეზონანსის რეჟიმი ნულოვან მიახლოებაში

ატომის ანჰარმონიული ოსცილატორის მოდელში გარეშე ელექტრო მაგნიტური ველის ზემოქმედების ქვეშ მყოფი ატომის ოპტიკური ელექტრონის ჰამილტონის ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგი სახით :

$$\begin{aligned}
H(x, p) &= H_0(x, p) + H_{NL}(x) + \varepsilon V(x, t), \\
H(x, p) &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}, \\
H_{NL}(x) &= -\frac{m\beta}{3}x^3 - \frac{m\gamma}{4}x^4 + \dots, \\
V(x, t) &= \varepsilon x \sum(t) A(t), \\
A(t) &= A_0 \cos \omega t, \quad \varepsilon \ll 1.
\end{aligned}
\tag{2.1}$$

სადაც  $H_0(x, p)$ - ჰარმონიული ოსცილატორის ენერჯიაა,  $H_{NL}(x)$  - ენერჯის არაწრფივი შესწორება,  $\varepsilon V(x, t)$ - გარეზე ელექტრომაგნიტურ ველთან ოპტიკური ელექტრონის ურთიერთქმედების ენერჯია,  $e$  და  $m$ - ელექტრონის მუხტი და მასა,  $\beta$  და  $\gamma$  - არაწრფივობის კოეფიციენტები,  $p$  და  $x$  - ელექტრონის იმპულსი და კოორდინატი,  $\omega_0$  - ელექტრონის საკუთარი სიხშირე,  $\sum(t)A(t)$  - იმპულსურად მოდულირებული ელექტრული ველის დამახლოება,  $\sum(t)$  - მოდულაციის პერიოდული ფუნქციაა,  $\omega$  და  $A_0$  - ელექტრომაგნიტური ველის სიხშირე და ამპლიტუდაა,  $\tau$  - იმპულსის ხანგრძლივობა,  $T$  - იმპულსების პერიოდი (ნახ.2.1). ჩვენ დავუშვით, რომ  $\omega$  და  $\omega_0$  - ოპტიკური დიაპაზონის სიხშირეებია ( $\approx 10^{15}$  წმ<sup>-1</sup>), იმპულსის ხანგრძლივობა პიკოწამის რიგისაა ( $\approx 10^{-12}$  წმ<sup>-1</sup>), იმპულსების პერიოდი  $T$  - ნანოწამის რიგისაა ( $\approx 10^{-9}$  წმ<sup>-1</sup>). ასე რომ შესრულებულია შემდეგი პირობა  $(2\pi/\omega_0), (2\pi/\omega) \ll \tau \ll T$ . ზემოთმოყვანილი სიდიდეების მნიშვნელობები წარმოდგენენ Nd-მიწის ლაზერის პარამეტრებს, რომელიც მუშაობს მოდების ბლოკირების რეჟიმში [21]. ოპტიკური იმპულსების სერიაში დაცულია შემდეგი „დროითი იერარქია“ -  $(2\pi/\omega) \ll \tau \ll T$ . უნდა ვივარაუდოთ, რომ სისტემის დინამიკის არწერა მოხდება დაახლოებით ერთნაირ დროის მასშტაბში. ჩვენ ვართ დაინტერესებულები ამ მასშტაბის ფარგლებში ყველაზე ნელად მიმდინარე პროცესის შესწავლით. იმისათვის რათა მივიღოთ ასეთი ნელი პროცესი უნდა განვახორციელოთ აღნიშნული სისტემის ორჯერ გასაშუალოება დროის მიხედვით. უფრო ზუსტად, რომ ვთქვათ, უკანასკნელ ეტაპზე მივიღებთ ისეთ მდგომარეობას, რომელიც განისაზღვრება ქმედების ფიქსირებული მნიშვნელობით.

ატომი-ველი სისტემის განხილვა არაწრფივი ოსცილატორული მოდელის მეშვეობით(ფარგლებში) აღნიშნული სისტემის საკმაოდ გამარტივებული წარმოდგენაა. თუმცა უნდა შევნიშნოთ, რომ საკმაოდ გავრცელებული და ეფექტური მიდგომა განსაკუთრებით არაწრფივ ოპტიკაში [22,23]. აღნიშნული მიდგომა საშუალება იძლევა გამოთვლილ იქნას ბევრი ექსპერიმენტალურად გაზომვადი სიდიდე.



ნახ. 2.1. იმპულსების პერიოდული სერია ( $T/\tau \gg 1$ ).

შემდეგი გარდაქმნის მეშვეობით:

$$x = \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}} \cos \theta, \quad p = -\sqrt{2Im\omega_0} \sin \theta, \quad (2.2)$$

(2.1) ჰამილტონიანში გადავიდეთ ახალ ცვლადებზე ქმედება – კუთხე  $(x, p) \rightarrow (I, \theta)$ . აქ  $I$  ქმედებაა შეუშფოთებელი ამოცანისათვის ( $\varepsilon = 0$ ). თუ მოვახდენთ (2.1) ჰამილტონიანის გასაშუალებას სწრაფი  $\theta$  ფაზით, შემოვიტანთ ახალ ნელ ფაზას  $\varphi = \theta - \omega t$  და არარეზონანსული წევრებს უგულებელყოფთ ( $\overline{\cos(\theta + \omega t)}^\theta \approx 0$ ),  $\overline{f(\theta, t)}^\theta \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, t) d\theta$  შედეგად მივიღებთ:

$$\overline{H} = H_0^{NL}(I) + \varepsilon V(I, \varphi, t),$$

სადაც

$$\begin{aligned} H_0^{NL}(I) &= H_0 + H_{NL}(I), \\ H_0 &= \omega_0 I, \quad H_{NL}(I) = \omega_{NL}(I) I, \\ \omega_{NL}(I) &= \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\gamma}{m\omega_0^2} I, \quad V(I, \varphi, t) = \frac{1}{2} V(I) \sum(t) \cos \varphi, \\ V(I) &= \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}} V_0, \quad V_0 = eA_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

ჩავწეროთ მოძრაობის განტოლებები გასაშუალოებული (2.3) ჰამილტონიანის მეშვეობით:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\varepsilon \frac{\partial V(I, \varphi, t)}{\partial \varphi}, \\ \dot{\varphi} &= \omega(I) + \frac{\partial V(I, \varphi, t)}{\partial I}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

სადაც

$$\omega(I) = \omega_0 - \omega + \omega_{NL}(I), \quad (2.5)$$

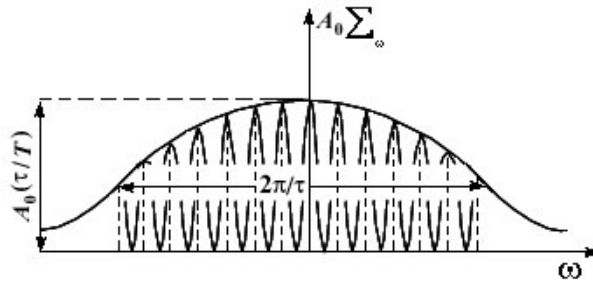
ელექტრონის რხევების მიღევა შესაძლებელია გათვალისწინებულ იქნას შემდეგი გარდაქმნის მეშვეობით გამოთვლების ბოლო ეტაპზე [1]:  $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - i/\tau$ . მოდულაციის  $\sum(t)$  პერიოდული ფუნქციის ფურიე მწკრივად გაშლის შედეგად, ურთიერთქმედების ენერგია შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით (ნახ.2. 2):

$$V(I, \varphi, t) = U(I) \cos \varphi \sum_{k=-\{T/\tau\}}^{\{T/\tau\}} \cos k\omega t, \quad (2.6)$$

სადაც  $\{T/\tau\}$ ,  $T/\tau$  შეფარდების მთელი ნაწილია,

$$U(I) = \frac{1}{2} \frac{\tau}{T} V(I) = \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}} U_0, \quad U_0 = \frac{1}{2} \frac{\tau}{T} eA_0, \quad (2.7)$$





ნახ.2.2 მოდულაციის ფუქციის სიხშირული სპექტრი შესდგება ჰარმონიკებისაგან რომლებიც დაცილებულნი არიან ერთმანეთისაგან სიდიდით  $\Omega = 2\pi/T$ .

გარდამავალი პროცესის დასრულების შემდეგ, ქმედება  $I$  ჩერდება (“ჩაიჭირება”) ერთ გარკვეულ მნიშვნელოვნებაზე  $I_k$ , რომელიც აკმაყოფილებს რეზონანსის პირობას:

$$\omega(I_k) = k\Omega$$

რომელიც სამართლიანია ურთიერთქმედების (2.6) სპექტრის  $k$ -ური ჰარმონიკისათვის.:

$$I_k = \frac{\omega - \omega_0 + k\Omega}{\omega'}, \quad (2.8)$$

რეზონანსის მესამე ტიპი, “ჩაჭერის“ საპირისპირო პროცესი(რეზონანსების გადაფარვა), რომელიც განაპირობებს ქაოსურ დინამიკას, განხილულია შრომებში [20,23].

საჭიროა აღინიშნოს, რომ განხილული მდგომარეობა ხასიათდება  $I_k$  ქმედების კონკრეტული მნიშვნელობით. შემდგომში ქმედების ამ მნიშვნელობის შესწორება  $\Delta I_k = I - I_k$  განხილულ უნდა იქნეს, მისი სიმცირის გამო, როგორც კვანტური სიდიდე. ამიტომ განხილული მდგომარეობა წარმოადგენს  $\hat{\Delta I}_k$  შესწორების ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობას.

შევადგინოთ კიდევ ერთხელ ნელი ფაზა  $\alpha_k = \varphi - k\Omega t$ , მოვახდინოთ გასაშუალება სწრაფი  $\varphi$  ფაზით, არარეზონანსული წევრების უგულებელყოფის ( $\overline{\cos(\varphi + k\Omega t)}^\varphi \approx 0$ ) შედეგად მივიღებთ, რომ ურთიერთქმედების ენერგია:

$$\overline{V(I_k, \varphi, t)}^\varphi = \frac{1}{2} U(I) \cos \alpha_k, \quad (2.9)$$

შედეგად ვღებულობთ მოძრაობის შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\varepsilon}{2} U(I) \sin \alpha, \\ \dot{\alpha} &= \omega(I) - k\Omega + \frac{\varepsilon}{2} \frac{dU}{dt} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.10)$$

სადაც  $I$  და  $\alpha$  აღებულია  $I_k$  და  $\alpha_k$  სიდიდეების მახლობლობაში. (2.10) განტოლებათა სისტემის მიღების დროს, ჩავთვალოთ, რომ (2.8) რეზონანსის პირობა ძალაშია დროის ხანგრძლივი პერიოდის განმავლობაში. ქმედების წანაცვლება  $\Delta I_k = I - I_k$ , რომელიც განისაზღვრება (2.10) განტოლებათა სისტემის მეშვეობით, იმდენად მცირე სიდიდეა, რომ არ არის საკმარისი, იმისათვის რათა შეცვლილმა არაწრფივმა სიხშირემ  $\omega(t)$  მიაღწიოს ურთიერთქმედების სპექტრის მეზობელ ჰარმონიკას. შემდგომში ჩვენ აღარ მივუწერთ ჰარმონიკის მაჩვენებელ  $k$  ინდექსს

შესაბამის ფორმულებში და ჩავთვლით, რომ რეზონანსის პირობა  $I = I_0$  სრულდება ერთ-ერთ ჰარმონიკაზე. დავუშვათ, რომ  $|\Delta I| \ll I$ . მაშინ  $\omega(I)$  და  $U(I)$  ფუნქციების კონკრეტული ფორმისაგან დამოუკიდებლად, ზომიერი არაწრფივობის მიახლოებაში  $\varepsilon \ll \mu \ll 1/\varepsilon$ , სადაც  $\mu = \left| \frac{I}{\omega} \frac{d\omega}{dI} \right|$ , არსებობს შენახვადი ჰამილტონიანი [20]:

$$H_U = \omega' \frac{(\Delta I)^2}{2} + \frac{1}{2} U(I) \cos \alpha, \quad \omega' = \frac{d\omega}{dI} \quad (2.11)$$

რომელიც წარმოშობს (2.10) სისტემის ექვივალენტურ განტოლებათა სისტემას. აქ შევნიშნოთ, რომ (2.11) ჰამილტონიანი ექვივალენტურია არაწრფივი ქანქარას ჰამილტონიანის, თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $\Delta I$  იმპულსის როლში გვევლინება, ხოლო  $1/\omega'$  მასის.

$H_U$  ჰამილტონიანს უწოდებენ უნივერსალურ ჰამილტონიანს. ზომიერი არაწრფივობის მიახლოებაში, ქმედების მცირე შესწორებები შეიძლება გამოთვლილ იქნას ჰამილტონის შესაბამისი განტოლებებით:

$$\dot{\Delta I} = -\frac{\partial H_U}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = -\frac{\partial H_U}{\partial (\Delta I)} \dots \quad (2.12)$$

(2.12) განტოლებათა კლასიკური სისტემის ამონახსნები და დეტალური ანალიზი მოცემულია ნაშრომში [20,24].

### 2.3. $\gamma$ არაწრფივობის კოეფიციენტის რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლა

ამ პარაგრაფში, ჩვენ განვიხილავთ ქმედების სიდიდის მცირე, მაგრამ კლასიკური მნიშვნელობის მიღწევის შესაძლებლობას. ატომის განხილვისას ისევ ვსარგებლობთ ანჰარმონიული ოსცილატორის მოდელით, რომელიც ფართოდ გამოიყენება არაწრფივ ოპტიკაში [22,23].

როგორც ცნობილია, ელექტრონების რხევების ანჰარმონიზმი, რომელიც წარმოადგენს გარდატეხის მაჩვენებლის არაწრფივობის მიზეზს, მეტად მნიშვნელოვანია მყარი სხეულებისა და სითხეების განხილვის დროს. ისეთ ნივთიერებებში მაგალითად როგორცაა ისლანდიური შპატი და ზოგიერთი იზოტროპული კრისტალი ( $LiF, NaCl$ ).

ოპტიკური დიაპაზონის ძლიერი მონოქრომატული ელექტრომაგნიტური ველი გავლენას ახდენს მოლეკულის (ატომის)  $\alpha$  პოლარიზებაზე. ამასთან მისი ცვლილება დამოკიდებულია მოქმედი ოპტიკური ელექტრომაგნიტური ველის ამპლიტუდის კვადრატზე:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_2 A^2, \quad \alpha_0 = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4} \alpha_0 \gamma \left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^3}, \quad (2.13)$$

სადაც  $A$  არის ძლიერი ოპტიკური ველის ამპლიტუდა. აქ ჩვენ ვიყენებთ არაწრფივ ოსცილატორის იძულებითი რხევების განტოლების ამონახსნებს, რომელიც მოცემულია ნაშრომში [19]. კავშირი  $n$  გარდატეხის მაჩვენებელსა და პოლარიზებას შორის მყარდება შემდეგი ფორმულის მეშვეობით:

$$n = \sqrt{n_0^2 + \Delta n} \approx n_0 + \frac{\Delta n}{2n_0} ,$$

სადაც

$$n_0^2 = 1 + \frac{N}{\varepsilon_0} \alpha_0, \quad n_2 = \frac{N}{\varepsilon_0} \alpha_2, \quad \Delta n = n_2 A^2,$$

$\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{კ}^2 \cdot \text{ფ}^2$  – ელექტრული მუდმივაა,  $n_0$  – გარდატეხის მაჩვენებლის წრფივი ნაწილია,  $N = fN_0$ ,  $f$  – ოსცილატირის ძალაა,  $N_0$  – მოლეკულების კონცენტრაციაა,  $\Delta n$  – გარდატეხის მაჩვენებლის არაწრფივი შესწორება.

$\gamma$  კოეფიციენტის რიცხვითი მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ სხივის თვითფოკუსირების ექპერიმენტული მონაცემებით [23]. როგორც ცნობილია სხივის თვითფოკუსირების დამზრისათვის საჭიროა შემდეგი პირობის შესრულება:  $\Delta n/n_0 \sim 10^{-5}$ . ამის გათვალისწინებით, თუ დავუშვებთ, რომ მთავარ რეზონანსს აქვს ადგილი საკუთარ სიხშირეზე  $\omega_0 \approx 10^{15} \text{წმ}^{-1}$ , წანაცვლება  $|\omega - \omega_0| \approx 10^{-12} \text{წმ}^{-1}$  და  $N_0 \approx 10^{28} \text{მ}^{-3}$ ,  $f \approx 0,1$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{კგ}$ ,  $A_0 = 0,5 \cdot 10^5 \text{ვ/მ}$ , მაშინ (2.13) და (2.14) განტოლებების გათვალისწინებით მივიღებთ  $\gamma = 4 \cdot 10^{42} \text{მ}^{-2} \text{წმ}^{-2}$ . ხოლო (2.11) არაწრფივი სიხშირის წარმოებული ქმედებით  $\omega' \approx 2,5\gamma \approx 10^{43} \text{ჯ}^{-1} \text{წმ}^{-2}$ .

დავუბრუნდეთ ისევ ქმედების რიცხვითი მნიშვნელობის შეფასების საკითხს. რეზონანსის (2.3), (2.5) და (2.8) რეზონანსის პირობიდან ჰარმონიკებზე შეძლება განვსაზღვროთ ქმედების რიცხვითი მნიშვნელობა “ჩაჭერის” დროს :

$$I = \frac{|\omega - \omega_0|}{\omega'} \approx 10^3 \hbar . \quad (2.15)$$

ამრიგად, სტაციონარული რეზონანსული რეჟიმი ფორმირდება ქმედების შემდეგი კლასიკური რიცხვითი მნიშვნელობისათვის  $I_0 \sim 10^3 \hbar$ , რომელიც შეიძლება ჩაითვალოს კლასიკურ სიდიდედ. თუმცა ეს არც ისეთი დიდი მნიშვნელობაა რომ მისი შესწორება  $\Delta I \ll I$  ასევე ჩაითვალოს კლასიკურ სიდიდედ. ამიტომ  $\Delta I$  შესწორების დინამიკის შესასწავლად უნდა მოვიხმოთ კვანტური მოძრაობის განტოლებები.

#### 2.4. ქმედების რეზონანსული მნიშვნელობის კვანტური შესწორება

ამრიგად, სტაციონარული რეზონანსული რეჟიმის შემთხვევაში ფორმირდება მდგომარეობა , რომელშიც  $I$  ქმედებას აქვს განსაზღვრული მნიშვნელობა, რომელიც წარმოადგენს კლასიკურ სიდიდეს. ხოლო მისი შესწორება შეიძლება იყოს როგორც კლასიკური ასევე კვანტური სიდიდე. პირველ შემთხვევაში ზომიერი არაწრფივობის მიახლოებაში ქმედების დინამიკა აღიწერება (2.14) უნივერსალური ჰამილტონიანით  $H_U$ , ხოლო მეორე შემთხვევაში – მისი კვანტური ანალოგიით, რომელიც მიიღება  $\Delta I$ -ს შეცვლით შესაბამისი ოპერატორით  $-i\hbar \frac{d}{d\alpha}$ . ამ ცვლილების შედეგად მიიღება შემდეგი სახის ჰამილტონის ოპრეტორი:

$$\hat{H} = -\omega' \hbar^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} + U(I) \cos \alpha . \quad (2.16)$$

შევნიშნოთ, რომ (2.16) ჰამილტონიანით აღიწერება დაბალი სიხშირის ( $\sim 10^9 \text{წმ}^{-1}$ ) არაწრფივი ოსცილატორის კომპლექსური დინამიკა, რომელიც ზემოთ აღნიშნული

პირობების გთვალისწინებით უნდა იქნას მიჩნეული კვანტურ სიდიდე. (2.16) ჰამილტონიანის შესაბამის სტაციონარული შრედინგერის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$-\omega'\hbar^2 \frac{d^2\psi_n}{d\alpha^2} + U(I)\cos\alpha\psi_n = E_n\psi_n \quad (2.17)$$

სადაც  $\psi_n$  და  $E_n$  - (2.16) ენერჯის ოპრეტორის საკუთარი ფუნქცია და საკუთარი მნიშვნელობებია. (2.17) განტოლებას ზოგჯერ უწოდებენ ქანქარის განტოლებასაც.

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ სტაციონარული რეზონანსის რეჟიმის დროს არაწრფივი სიხშირე აკმაყოფილებს უტოლობას:  $\omega' \neq 0$ . ამასთან რაც მეტია  $|\omega'|$  მით მეტია არაწრფივობა. არაწრფივობის სიხშირული კვანტი  $\omega_{NL}$ , როგორც არაწრფივობის მინიმალური “პორცია” იქნება ტოლი  $\omega_{NL} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\gamma}{m\omega_0^2} = \hbar\omega'$ .

ანალოგიურად, არაწრფივობის ენერგეტიკული კვანტი ტოლი იქნება  $\varepsilon_{NL} = \hbar^2\omega'$  [25,26].

შევნიშნოთ, რომ (2.17) განტოლება წარმოდგენს მყარი როტატორის განტოლებას, რომლის ინერჯის მომენტია  $1/\omega'$  და რომელიც მოთავსებულია პერიოდულ ველში  $U(I, \alpha) = U(I)\cos\alpha$ .

თუ (2.17) განტოლებაში მოვახდენთ ცვლილებას  $\alpha \rightarrow 2\alpha$  და შემოვიტანთ უგანზომილები პარამეტრებს  $\xi = E/\varepsilon_{NL}$  და  $l(I) = U(I)/2\varepsilon_{NL}$  შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{d^2\psi}{d\alpha^2} + (\xi - 2l_0 \cos 2\alpha)\psi = 0 \quad , \quad (2.18)$$

სადაც  $l(I_0) \equiv l_0$ . ეს გახლავთ მათიე შრედინგერის განტოლება. შევაფასოთ აღნიშნულ (2.18) განტოლებაში შემავალი პარამეტრები. ჩვენს მიერ განხილული ოპტიკური იმპულსების სერიისათვის პარამეტრებს აქვთ შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობა  $A_0 = 0,5 \cdot 10^5$  ვ/მ,  $\tau/T \approx 10^{-3}$ ,  $U_0 \equiv U(I_0) \approx 10^{-24}$  ჯ. არაწრფივობის ენერგეტიკული და სიხშირული კვანტებისათვის კი მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელობებს  $\varepsilon_{NL} \approx 10^{-25}$  ჯ და  $\omega_{NL} \approx 10^9$  წმ<sup>-1</sup>. მაშინ (2.18) განტოლებაში შემავალი პარამეტრისათვის გვექნება შემდეგი მნიშვნელობა  $l_0 \equiv l(I_0) \approx 20$ . ნათელია, რომ ეს მნიშვნელობა ეხება ერთ კონკრეტულ შემთხვევას. პრაქტიკაში შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს ისეთ შემთხვევას, როცა ამ პარამეტრის მნიშვნელობა იქნება უფრო მეტი. უფრო დიდი მნიშვნელობის შემთხვევა შესაძლოა ექპერიმენტული თვალსაზრისით იყოს უფრო საინტერესო.

კვანტური მექანიკის ძირითადი მოთხოვნებიდან გამომდინარე საჭიროა, რომ ტალური ფუნქცია და მისი წარმოებული იყვნენ უწყვეტი ფუნქციები განხილულ არეში. ამასთან ერთად, ტალური ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს იმ სიმეტრიის მოთხოვნებს, რომლებიც გამომდინარეობენ მათიეს განტოლებიდან. ადვილი შესამოწმებელია, რომ (2.18) განტოლებას გააჩნია სიმეტრია შემდეგი გარდაქმნების მიმართ  $\alpha \rightarrow -\alpha$  და  $\alpha \rightarrow \alpha + \pi$ .

ზემოთ ჩამოთვლილი პირობების შესრულება დაიყვანება შემდეგი სასზღვრო პირობების შესრულებაზე:

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \quad (2.19)$$

$$\left. \frac{d\psi}{d\alpha} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{d\psi}{d\alpha} \right|_{\varphi=\pi} = 0. \quad (2.20)$$

(2.18) მათიეს დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა (2.19) და (2.20) სასაზღვრო პირობებით წარმოადგენს შტურმ-ლიუვილის ამოცანას მათიე-შრედინგერის განტოლებისათვის. როგორც ცნობილია [27] ეს ამოხსნებია მათიეს ფუნქციები  $se_n(\alpha, l)$  და  $ce_n(\alpha, l)$ .

შევნიშნოთ, რომ (2.18) მათიეს განტოლებას გააჩნია კიდევ ერთი სიმეტრია. ეს გახლავთ სიმეტრია პოტენციალური ორმოს სიმეტრიის დერძის მიმართ, ანუ სიმეტრია გარდაქმნის მიმართ  $\alpha \rightarrow \pi - \alpha$ . ამიტომ ტალღური ფუნქციები  $se_n(\alpha, l)$  და  $ce_n(\alpha, l)$

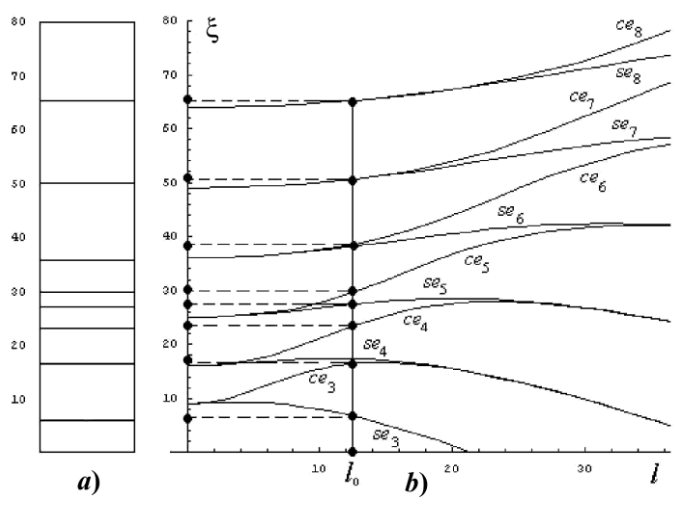
უნდა იყვნენ ან კენტი ან ლუწი ფუნქციები  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  არგუმენტის მიმართ. მაშასადამე თითოეული ამ ფუნქციათაგანი იხლიჩება ორად, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან აღნიშნული თვისებით.

ამრიგად, მათიე-შრედინგერის განტოლებების საკუთარი ფუნქციები შეიძლება წარმოდგენილ იქნას მათიეს შემდეგი ოთხი ფუნქციის მეშვეობით [27]

$$ce_{2n}(\alpha, l), se_{2n+1}(\alpha, l), ce_{2n+1}(\alpha, l), se_{2n+2}(\alpha, l), \quad (2.21)$$

მათიე მახასიათებლებს, რომლებიც წარმოადგენენ (2.18) განტოლების საკუთარ მნიშვნელობებს და  $l$  პარამეტრის ფინქციებს,  $(\xi, l)$  სიბრტყეზე აქვთ რთული ფუნქციის სახე (ნახ.2.3). ნახ.2.3 ზე შეიძლება შევნიშნოთ მათიე მახასიათებლების მთავარი თვისება – მრავალი განშტოების არსებობაა.

ზღვრულ შემთხვევაში მათიე-შრედინგერის განტოლება დადის თვისობრივად განსხვავებულ ორ კვანტურ მექანიკურ ამოცანაზე. ესაა თავისუფალი როტატორის  $\xi \gg l$  და ჰარმონიული ოსცილატორის  $\xi \ll l$  ამოცანები. ცხადია, რომ გარდამავალ არეში  $\xi \approx l$  ადგილი უნდა ჰქონდეს შესაბამისი ენერჯის დონეების შერწყმასა და შემდეგ განშტოებებს (და პირიქით).



ნახ.2.3 მათიე ფუნქციების საკუთარი მნიშვნელობები. ა) ენერგეტიკული სპექტრი, მიღებული მათიე მახასიათებლის მნიშვნელობისათვის  $l = l_0$  ბ) მათიე მახასიათებლები. აქ  $\xi = E / \epsilon_{NL}$  უგანზომილებო ენერჯიაა,  $E$  -სისტემის ენერჯია,  $\epsilon_{NL}$  -არაწრფივობის ენერჯის კვანტია.  $l(I) = U(I) / 2\epsilon_{NL}$ , აქ  $U(I)$  სისტემის პოტენციალური ენერჯიაა.

## 2.5. ქმედების შესწორების ოპრეტორის საკუთარი მდგომარეობა და მისი გაშლა მათივე პერიოდული ფუნქციების მეშვეობით

როგორც უკვე აღვნიშნეთ ზემოთ, მდგომარეობა, რომელიც ფორმირდება სტაციონერულ რეზონანსულ რეჟიმში წარმოადგენს მდგომარეობას, რომელშიც ქმედებას აქვს გარკვეული მნიშვნელობა  $I$ . ლოგიკურია დავუშვათ, რომ ქმედების კვანტური შესწორება ასევე ხასითდება ქმედების შესწორების გარკვეული მნიშვნელობით  $\Delta I$ . ანუ სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, ჩვენი დაშვებით წარმოშობილი კვანტური მდგომარეობა წარმოადგენს ქმედების შესწორების ოპრეტორის  $\Delta \hat{I} = -i\hbar \frac{d}{d\alpha}$  საკუთარ მდგომარეობას

$$-i\hbar \frac{d\psi_m}{d\alpha} = \Delta \hat{I} \psi_m \quad (2.22)$$

ამ განტოლების საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ კვანტური მექანიკის სტანდარტულ მოთხოვნებს შემდეგია:

$$\psi_m(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\alpha}, \quad \Delta I = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.23)$$

ქმედების კვანტურ მექანიკური საშუალო -  $\langle \Delta \hat{I} \rangle = m\hbar$ . ენერგეტიკულ დონეზე ელექტრონის სიცოცხლის ხანგრძლივობა, რომელიც შეესაბამება მილევის დროს  $\tau_0$  შეიძლება იქნეს გათვალისწინებული შემდეგი გარდაქმნის მეშვეობით  $m \rightarrow m - \frac{i}{\omega\hbar\tau_0}$ .

$\Delta \hat{I}$  და  $\hat{H}$  ოპერატორები არ კომუტირებენ ერთმანეთთან და ამიტომ (2.23) მდგომარეობა არ წარმოადგენს ენერგიის ოპერატორის საკუთარ მდგომარეობას. ის წარმოადგენს ენერგიის  $\hat{H}$  ოპერატორის საკუთარ ფუნქციების სუპერპოზიციის მდგომარეობას:

$$\Psi = \sum a_n \psi_n, \quad a_n = \int \psi \psi_n^* dq \quad (2.24)$$

სადაც  $\psi_n$  მათივე (2.24) ფუნქციების სრული კრებულია.

(2.23) ტალღურ ფუნქციაში განვახორციელოთ შეცვლა  $\alpha \rightarrow 2\alpha$ , რომელიც ჩვატარეთ უკვე (2.18) მათივე განტოლებაში და გავშალოთ  $\psi_m(\alpha)$  მწკრივად მათივე ფუნქციების სრული კრებულის მიხედვით. გაშლის კოეფიციენტების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ მათივე ფუნქციების ფურიე მწკრივად გაშლით [28]:

$$\begin{aligned} ce_{2n}(\alpha, l) &= \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m}^{2n}(l) \cos 2m\alpha, & ce_{2n+1}(\alpha, l) &= \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1}^{2n+1}(l) \cos(2m+1)\alpha \\ se_{2n}(\alpha, l) &= \sum_{m=0}^{\infty} R_{2m}^{2n}(l) \sin 2m\alpha, & se_{2n+1}(\alpha, l) &= \sum_{m=0}^{\infty} R_{2m+1}^{2n+1}(l) \sin(2m+1)\alpha \end{aligned} \quad (2.25)$$

$P_{2m}^{2n}, P_{2m+1}^{2n+1}, R_{2m}^{2n}, R_{2m+1}^{2n+1}$  კოეფიციენტების მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილში [29].

გამოთვლების შედეგად მივიღებთ:

$$\psi_m(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i2m\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \{P_{2m}^{2n} \cdot ce_{2n}(l, \alpha) + iR_{2m}^{2n} \cdot se_{2n}(l, \alpha)\}.. \quad (2.26)$$

ამის შემდეგ ადვილია ენერგეტიკულ დონეთა დასახლების ალბათობის გამოთვლა.  $ce_{2n}^{2n}(l, \alpha)$  და  $se_{2n}^{2n}(l, \alpha)$  ტალღური ფუნქციებისათვის მათ ექნებათ შემდეგი სახე:

$$W_{ce}^{2m;2n} = \frac{1}{2} [P_{2m}^{2n}(l_0)]^2, \quad W_{se}^{2m;2n} = \frac{1}{2} [R_{2m}^{2n}(l_0)]^2. \quad (2.27)$$

ამრიგად ენერგეტიკულ დონეთა დასახლება განსაზღვრულია მათივე ფუნქციების ფურიე მწკრივად გაშლის კოეფიციენტების მეშვეობით. ეს კოეფიციენტები მოცემულია ნაშრომში [29].

თუ ენერგეტიკული დონეები  $ce_{2n}^{2n}(l, \alpha)$  და  $se_{2n}^{2n}(l, \alpha)$  გადაგვარებულია მაშინ ამ დონეთა დასახლების ალბათობა:

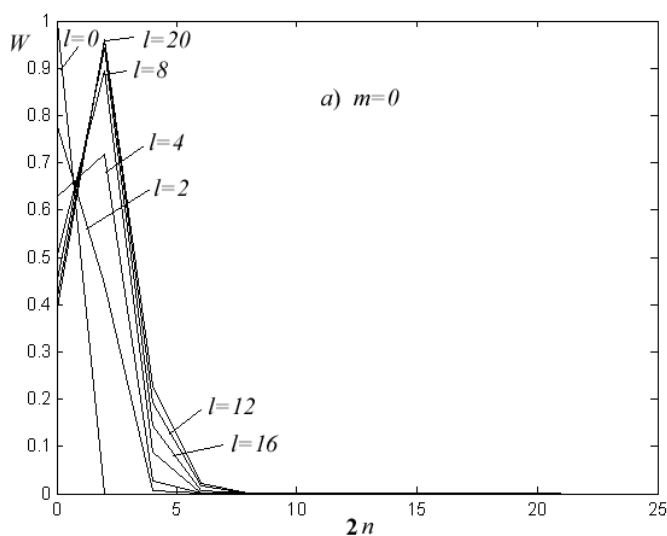
$$W_{2m}^{2n}(l) = W_{ce}^{2m,2n}(l) + W_{se}^{2m,2n}(l) = \frac{1}{2} \left\{ [P_{2m}^{2n}(l)]^2 + [R_{2m}^{2n}(l)]^2 \right\} \quad m \neq 0$$

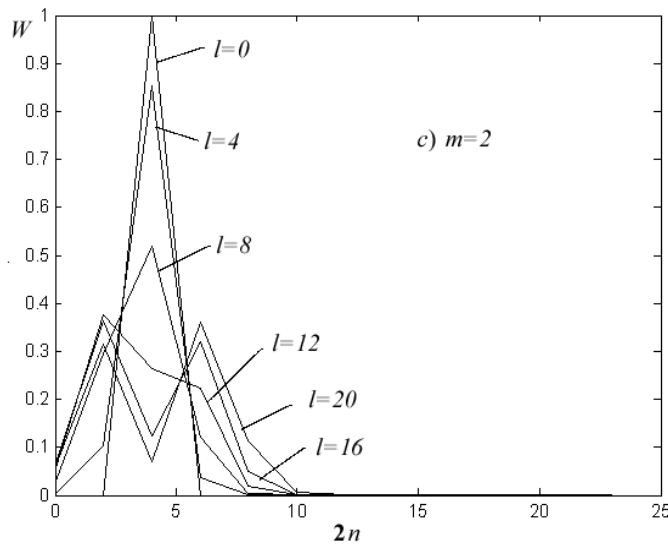
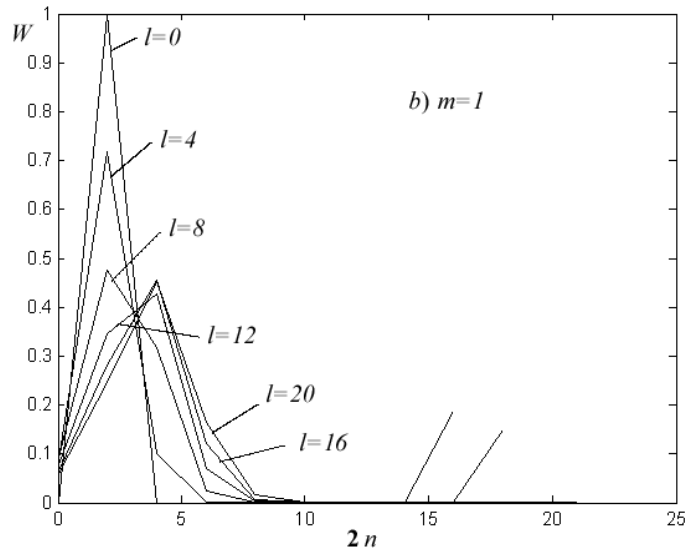
$$W_0^{2n} = [P_0^{2n}(l_0)]^2 \quad m = 0 \quad (2.28)$$

მოცემულია ნახ.2.4-ზე.

აღნიშნულ ნახაზზე მოცემულია ენერგეტიკულ დონეთა დასახლების ალბათობა როგორც  $n$  ფუნქცია  $l$  პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის. შევნიშნოთ, რომ  $l$  პარამეტრი დაკავშირებულია დატუმბვის პარამეტრთან (2.7) და  $\varepsilon_{NL}$  არაწრფივობის

ენერგიის კვანტთან შემდეგი ფორმულის მეშვეობით:  $l = \frac{\tau \varepsilon A}{4T \varepsilon_{NL}}$ .





ნახ.2.4 დასახლებულ დონეთა ალბათობების განაწილება  
 ა)  $m = 0$  – სავარაუდო ძირითადი მდგომარეობა, ბ)  $m = 1$ ; ც)  $m = 2$ .

ნახ.2. 4(a)-დან გამომდინარეობს, რომ სავარაუდო ძირითად მდგომარეობაში  $l = 0$  ყველაზე მეტი ალბათობით დასახლებულია ძირითადი ენერგეტიკული დონე  $n = 0$ .  $l$ -ს ზრდასთან ერთად ამ დონის დასახლება თანდათანობით კლებულობს 0,37 მნიშვნელობამდე, როცა  $l = 20$  და აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას 0,96, როცა  $n = 1$   $l$ -ს მოცემული მნიშვნელობისათვის. მაშადამე, როცა  $l \approx 20$  დასახლებათა მაქსიმალური სხვაობაა:  $\Delta W = W_0^0 = W_0^2 = -0,59$ .

იმ შემთხვევაში როდესაც ხორციელდება მდგომარეობა  $m=1$ , როგორც ნახ.2.4(b)-დან ჩანს,  $l$  პარამეტრის მცირე მნიშვნელობისათვის ალბათობათა განაწილების მაქსიმუმი მოდის  $n=1$  მდგომარეობაზე, ე.ი. ენერგეტიკულ დონეთა ინვერსიას ადგილი აქვს  $l$  პარამეტრის უფრო მცირე მნიშვნელობისათვის.  $l$  პარამეტრის მნიშვნელობის ზრდას თან სდევს  $n = 1$  ენერგეტიკული დონის დასახლების ალბათობის შემცირება და ალბათობის მაქსიმუმი წაინაცვლებს  $n = 2$  დონისაკენ



რაც შეეხება  $m = 2$  შემთხვევას, როგორც ნახ.2.4(c)-დან ჩანს,  $l$  პარამეტრის მცირე მნიშვნელობისათვის ალბათობათა განაწილების მაქსიმუმი მოდის  $n = 2$  მდგომარეობაზე და გრძელდება  $l = 8$  მნიშვნელობამდე, რის შემდეგაც წაინაცვლებს  $n = 2$  დონის ორივე მხარეს.  $l$  პარამეტრის დიდი მნიშვნელობისათვის მაქსიმუმი მოდის  $n = 1$  ან  $n = 3$  დონეებზე.

ამრიგად, ენერგეტიკულ დონეთა ინვერსიული დასახლების არსებობის შესაძლებლობა ჩვენს მიერ განხილული ყველა  $m = 0, 1, 2$ . შემთხვევის მახასიათებელი ნიშანია. სავარაუდოდ იგივე თვისება ექნებათ  $m > 2$  კვანტურ მდგომარეობებსაც.

გავიხსენოთ, რომ განაწილებები, რომლებსაც ჩვენ განვიხილავთ განპირობებულნი არიან სინათლის იმპულსების პერიოდული სერიის ზემოქმედებით (ნახ.2.1). ენერგეტიკულ დონეთა დასახლებების განაწილების ფუნქციების მრავალფეორვანი ფორმები განპირობებულია მათივე ფუნქციების რთული სტრუქტურით(ფორმით).

ამ განხილვის დროს ჩვენ არ გავითვალისწინეთ ოპტიკური ელექტრონების რხევათა მიღევა, რაც მნიშვნელოვანია ენერგეტიკულ დონეთა სიცოცხლის ხანგრძლივობის დიდი მნიშვნელობისათვის.

## 2.6. ენერგეტიკულ დონეთა დასახლება და გაგანიერება

ამ პარაგრაფში ჩვენ უკვე გავითვალისწინებთ ენერჯის დონეთა გაგანიერებას, რომელიც გამოწვეულია ადგზნებულ მდგომარეობაში ელექტრონის სიცოცხლის  $\tau_0$  ხანგრძლივობის სასრული მნიშვნელობით.

ჩვენ ვუშვებთ, რომ ენერგეტიკულ დონეთა გაგანიერების [ნახ.2.3 და (2.23) განტოლება] ძირითადი მიზეზია ადგზნებულ მდგომარეობაში ელექტრონის სიცოცხლის ხანგრძლივობის სასრული  $\tau_0$  მნიშვნელობა.  $\tau_0$  სიცოცხლის ხანგრძლივობის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომელიც გამოწვეულია გადასვლებით, როგორც ცნობილია  $\tau_0 = 10^{-8}$ წმ რიგისაა. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ჩვენ მხედველობაში მივიღებთ  $\tau_0$  სიცოცხლის ხანგრძლივობის სასრულობას (2.5) კომპლექსური სიხშირის შემოღებით.

(2.5) გარდაქმნა იწვევს შრედიინგერის (2.17) განტოლების საკუთარ მნიშვნელობებში წარმოსახვითი წევრის გაჩენას:

$$E_n \rightarrow E_n + i\delta E_n$$

როგორც ცნობილია, სტაციონალური მდგომარეობის ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულება გათვალისწინებულია ფაზური მამრავლის  $\exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right)$  მეშვეობით.

ამის გათვალისწინებით (2.28) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_n t - i\delta E_n t)\right] = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) e^{-t/\tau_0}, \quad (2.29)$$

სადაც  $\tau_0 = \frac{\hbar}{\delta E_n}$  წევრი თამაშობს  $n$ -ური დონის რელაქსაციის დროის როლს.  $\delta E_n$

სიდიდე განსაზღვრავს  $n$ -ური დონის გაგანიერებას..

ახლა გამოვთვალოთ  $\delta E_n$  სიდიდე ჩვენი ამოცანისათვის. (2.5) გარდაქმნა, ოპტიკური სიხშირეებისათვის, (2.8) რეზონანსის პირობის გათვალისწინებით გვაძლევს შემდეგ ფორმულას რეზონანსული ქმედების სიდიდისათვის:

$$I_k \rightarrow I_k - iL_k$$

სადაც

$$L_k = \frac{\hbar}{\omega_{NL}\tau_0} . \quad (2.31)$$

(2.17) განტოლებიდან (2.31) გარდაქმნის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{d^2\psi}{d\alpha^2} + (\xi + i\xi^n - 2l_0 \cos 2\alpha)\psi = 0 , \quad (2.32)$$

სადაც

$$\xi^n = \frac{U(L_k)}{\varepsilon_{NL}} \sqrt{\frac{L}{I_k}} \cos(2\alpha)\psi \quad (2.33)$$

წარმოადგენს უგანზომილებო ენერჯის წარმოსახვით ნაწილს. ზემოთ მოცემული პარამეტრების მნიშვნელობისათვის უტოლობა  $\omega_{NL}\tau_0 \gg 1$  ძალაშია. ამის მიუხედავად ჩვენ ვხედავთ, რომ  $I_k \gg L_k$ . ამიტომ (2.33) განტოლების ანალიზი შეიძლება ჩატარდეს მხოლოდ  $\xi^n \ll \xi$  მიახლოებაში, სადაც  $\xi^n$  შეიძლება განხილულ იყოს როგორც მცირე შემფოთება. ამიტომ  $\xi^n$  შეიძლება შეფასებულ იქნას როგორც

$$\xi^n = \frac{U(L_k)}{\varepsilon_{NL}} \sqrt{\frac{L}{I_k}} \cos(2\alpha)\psi^{(0)} , \quad (2.34)$$

სადაც  $\psi^{(0)}$  (2.32) განტოლების ამონახსნია  $\xi^n = 0$  თვის (ანუ (2.18) განტოლება), რომელსაც აქვს მათიეს (2.21) ფუნქციის სახე. გასაშუალოება (2.34) განტოლებაში განხორციელებულია  $\alpha$  ფაზით. გამოვთვალოთ (2.21) ფუნქციებიდან პირველი ფუნქციის საკუთარი ფუნქციების საშუალო მნიშვნელობები. ფურიეს მწკრივის (2.25) ფორმულის გამოყენებით  $ce_{2n}(\alpha, l_0)$  ფუნქციისათვის და მისი გასაშუალოებით  $\alpha$  ფაზით, (2.32) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\xi^n = \frac{U(I_k)}{\varepsilon_{NL}} \frac{\hbar}{I_k} \frac{P_{2m}^{2m}}{\omega_{NL}\tau_0} . \quad (2.35)$$

ანალოგირად შეძლება გამოთვლილ იქნას  $\xi^n$  მნიშვნელობა სხვა (2.21) ტალღური ფუნქციისთვისაც. იმისათვის რათა ვიპოვოთ  $ce_{2m}$  დონის გაგანიერება საკამრისია გადავიდეთ (2.35) განტოლებაში განზომილებიან სიდიდეებზე

$$\delta E_{ce_{2m}} = \xi^n \varepsilon_{NL} = U(I_k) \frac{\hbar}{I_k} \frac{P_{2m}^{2m}}{\omega_{NL}\tau_0} . \quad (2.36)$$

ხოლო (2.30) განტოლების თანახმად რელაქსაციის დროისათვის მივიღებთ:

$$\tau_{ce_{2m}} = \frac{I_k \omega_{NL}\tau_0}{U(I_k) P_{2m}^{2m}} . \quad (2.37)$$

მათიეს ფუნქციების ფურიე გაშლის რიცხვითი მნიშვნელობები აღებულია [29] –დან. (მაგალითად  $P_2^2 \approx 0,84$ )

ზემოთ მოყვანილი რიცხვითი მნიშვნელობების გამოყენებით მივიღებთ, რომ დონეთა გაგანიერება  $\delta E \approx 10^{-29}$  ჯ. როგორც ვხედავთ  $\delta E \ll \varepsilon_{NL}$  და ამიტომ ამ რიგის

გაგანიერებამ შეიძლება გამოიწვიოს მათიე მახასიათებლების ცალკეული უბნების გადაფარვა გარდამავალი მდგომარეობის არეებში, (ნახ.2.3) მხოლოდ განშტოების წერტილების მახლობლობაში, სადაც ენერჯის დონეები განთავსებულია ერთმანეთის მახლობლობადად (ნახ.2..3). სხვა არეებში დონეები გაგანიერებულია მაგრამ ისინი ინარჩუნებენ თავდაპირველ ფორმას. ამიტომ დისიპაცია ვერ შეცვლის მნიშვნელოვნად ნახ.2.3-ს ფორმას.

დისიპაციური პროცესების გათვალისწინება იწვევს როგორც ენერჯის ისე ქმედების დიკრეტული დონეების გაგანიერებას (2.23). ქმედების  $\hat{\Delta I}$  და ენერჯის  $\hat{H}_U$  ოპერატორები არ კომუტირებენ ერთმანეთთან. (2.16) და (2.22) განტოლებების გათვალისწინებით  $\hat{\Delta I}$  და  $\hat{H}_U$  ოპერატორების კომუტატორისათვის მივიღებთ, რომ

$$[\hat{\Delta I}, \hat{H}_U] = i\hbar U \sin \alpha . \quad (2.38)$$

და განუზღვრელობის თანაფარდობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\delta(\Delta I)\delta E = \frac{1}{2} \hbar U |\sin \alpha| = \frac{\hbar U_0}{\pi} . \quad (2.39)$$

(2.39) თანაფარდობის გამოყენებით შესაძლებელია ქმედების (2.23) შესწორების დონეთა გაგანიერების განსაზღვრა:

$$\delta(\Delta I) = M\hbar , \quad (2.40)$$

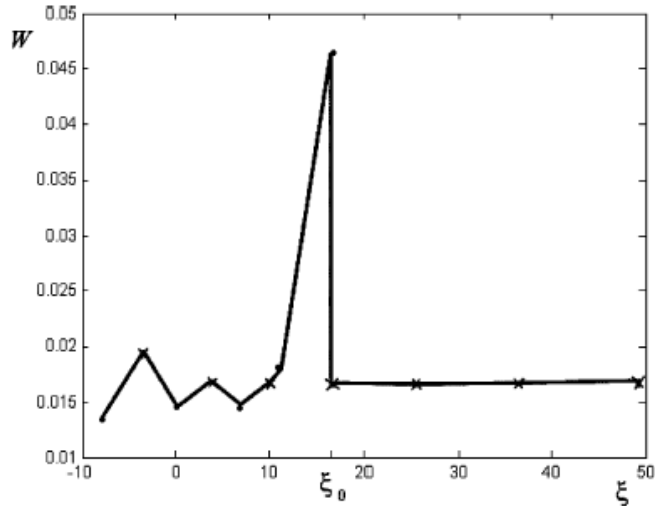
სადაც  $M = U(I_k) / \pi \delta E_{ce_{2m}}$ . შედეგად (2.23) დონეები არ დაიმზირებიან როგორც დისკრეტულები და ქმნიან ზოლს, რომლის სიგანეა  $M\hbar$ . ამიტომ (2.27) მდგომარეობათა ალბათობები უნდა იქნას გასაშუალოებული ქმედების შესწორების ოპერატორის საკუთარი მდგომარეობის მიხედვით დიაპაზონში  $M\hbar$ .

ხოლო გასაშუალოებული დონეების ალბათობებისათვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned} W_{ce}^{2n} &= \frac{1}{M\hbar} \frac{1}{2} \sum_{m=-M\hbar/2}^{m=M\hbar/2} [P_{2m}^{2n}(l_0)]^2, \\ W_{se}^{2n} &= \frac{1}{M\hbar} \frac{1}{2} \sum_{m=-M\hbar/2}^{m=M\hbar/2} [R_{2m}^{2n}(l_0)]^2, \\ W_{2n} &= W_{ce}^{2n} + W_{se}^{2n}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

(2.41) თანაფარდობის დახმარებით შესაძლებელია დასახლებათა  $W_{2n}$  ალბათობების  $n$  კვანტურ რიცხვზე დამოკიდებულების აგება  $l = l_0$  პარამეტრის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის.. აქ  $n$  მათიე მახასიათებლის ინდექსია (ნახ.2.3). თუმცა, უფრო საინტერესოა ენერჯიაზე დასახლებათა ალბათობის დამოკიდებულების აგება (ნახ.2.5). ამის გაკეთება ადვილია ვიცით რა მათიე მახასიათებლების დამოკიდებულება  $n$  და  $l$  ზე.

როგორც ნახ.2.5–დან ჩანს ენერჯის განაწილების მრუდს აქვს მკვეთრი მაქსიმუმი უგანზომილებო ენერჯის  $\xi \approx 20$  მნიშვნელობის მიდამოში., რომელიც ტოლია ბარიერის გაორმაგებული ენერჯის  $E_0 = \xi_0 \varepsilon_{NL} = 20 \cdot 10^{-25} J = 2U_0 (U_0 = 10^{-24} J)$ . ნახ.2.5-ზე • და  $x$  წერტილები თანხვდებიან. ეს განპირობებულია  $a_{2n}$  და  $b_{2n}$  მათიე მახასიათებლების შერწყმით. ამ  $W(2U_0)$  მაქსიმუმის არსებობა გვიჩვენებს დასახლებათა ინვერსიის შესაძლებლობას ენერჯის სპექტრის  $W(2U_0) - W(E < 2U_0) > 0$  არეში.



ნახ.2.5. ენერგეტიკულ დონეთა დასახლების განაწილება.

- და  $x - W_{ce}$  და  $W_{se}$  წვლილი  $W$ -ში  $a_{2n}(l_0)$  და  $b_{2n}(l_0)$  მათიე ფუნქციების გათვალისწინებით.  $W$  ალაბთობების განაწილება.  $\xi = E / \varepsilon_{NL}$  უგანზომილებო ენერგია,  $E$  სისტემის ენერგი,  $\varepsilon_{NL}$  -არაწრფივობის ენერგიის კვანტი.

## 2.7. დასკვნა

ატომი-ველი სისტემის განხილვის დროს ხშირად ატომს წარმოადგენენ როგორც ანჰარმონიულ ოსილატორს. აღნიშნულ სისტემაში არაწრფივ რეზონანს, ადგილი აქვს მხოლოდ ქმედების გარკვეული მნიშვნელობებისათვის. როგორც ქმედების რეზონანსული მნიშვნელობა ისე მისი შესწორება არიან კლასიკური სიდიდეები.

თუმცა, ზოგიერთი პირობის შესრულების შემთხვევაში, ქმედების მნიშვნელობა შესაძლოა იყოს იმდენად მცირე, რომ მისი შესწორება აღარ იქნება კლასიკური სიდიდე და ის უნდა განვსაზღვოთ კვანტური მექანიკის კანონების თანახმად.

ქმედების შესწორების კვანტურ ჰამილტონიანს აქვს ისეთივე ფორმა, როგორც კვანტური ქანქარას ჰამილტონიანს. ხოლო აღნიშნული სისტემის შრედინგერის განტოლებას შესაბამისად მათიე განტოლების სახე.

ენერგეტიკულ დონეთა დასახლებებს, რომლებიც წარმოადგენენ მათიე განტოლების საკუთარ ფუნქციებს, ზემოთაღნიშნული მსგავსების გამო, აქვთ მკვეთრი მაქსიმუმი  $E \approx 2U_0$  ენერგიაზე. რაც, თავის მხრივ ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს ინვერსიულ დასახლებეთა განაწილებას  $W(2U_0) > W(E < 2U_0)$ .

### 3. არაწრფივი და ქაოსური მოვლენები არაწრფივ გიროტროპულ გარემოში

#### 3.1 შესავალი

სინათლის სუსტ ნაკადში, რომელიც ვრცელდება ნივთიერებაში, ელექტრომაგნიტური ველის პოლარიზაცია არა არის დამოკიდებული სინათლის ინტენსივობაზე და ცალსახად განისაზღვრება იმ გამოსხივებული ტალღის პოლარიზაციით, რომელიც ეცემა ვაკუუმისა და გამოსაკვლევი ნივთიერების გამყოფ საზღვარს. ეს დამოკიდებულება რადიკალურად იცვლება არაწრფივ ოპტიკაში, როდესაც ნივთიერების გარდატეხისა და შთანთქმის კოეფიციენტები წარმოადგენენ გამოსხივების ინტენსივობის ფუნქციებს. ამან შეიძლება მიგვიყვანოს პოლარიზაციულ მულტიტაბილურობასა და პოლარიზაციულ ქაოსამდე. “შესავალზე” ინტენსივობის ადიაბატური ცვლილებისას პოლარიზაცია “გამოსავალზე” აღარაა ცალსახა ფუნქცია და შესდგება მდგრადი და არამდგრადი უბნებისაგან [30].

არაწრფივი გარემოს და გამოსხივების პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობებისათვის, როდესაც “შესავალზე” გვაქვს სტაციონარული გამოსხივება, პოლარიზაცია “გამოსავალზე” განიცდის ავტორხევით ცვლილებებს ან შეიძლება ადგილი ჰქონდეს პოლარიზაციის დროში ფსევდოქაოტურ ცვლილებას, რომელსაც აქვს უწყვეტი სიხშირული სპექტრი [30].

ბიოლოგიური ობიექტების არაწრფივი ოპტიკის და მყარ სხეულებში ექსიტონთა სპექტროსკოპიის უცილობელ ინტერესს წარმოადგენს არაწრფივი გიროტროპიით განპირობებული პოლარიზაციული არამდგრადობები. არაწრფივი გიროტროპიის გამოვლინების უმარტივესი მაგალითია იზოტროპული გარემოს ბუნებრივი ოპტიკური აქტივობის ელექტრომაგნიტური ტალღის ინტენსივობაზე დამოკიდებულება [31].

არაწრფივი გიროტროპია ნათლად მჟღავნდება ისეთ ნივთიერებებში, რომლებიც ხასიათდებიან არაწრფივი გამოძახილის ძლიერი არალოკალურობით. სივრცული დისპერსიის მახასიათებლის როლში, რომელიც განსაზღვრავს არალოკალურობის მაშტაბს, გამოდის გარემოს მახასიათებელი ზომის შეფარდება ტალღის სიგრძესთან. ამის გამო [32], არაწრფივობის სივრცულ დისპერსიის ეფექტები და მასთან დაკავშირებული პოლარიზაციული არამდგრადობები შესაძლოა იყოს მნიშვნელოვანი უპირველეს ყოვლისა ქოლესტერულ თხევად კრისტალებში იზოტროპულ მდგომარეობაში გადასვლის ფაზური წერტილის მახლობლობაში ( $\delta/\lambda \sim 10^{-1}$ ), კირალურ ბიოლოგიურ მაკრომოლეკულებში ( $\delta/\lambda \sim 10^{-1}$ ), ნახევარგამტარებში შთანთქმის ექსიტონური და ბიექსიტონური რეზონანსების მახლობლობაში ( $\delta/\lambda \sim 10^{-1}$ ) [30].

პოლარიზაციული არამდგრადობის ასახსნელად წამოყენებული იქნა მოსაზრება, რომლის თანახმად არაწრფივი გიროტროპული გარემო შეიძლება განვიხილოთ როგორც კუნის (Kuhn) არაწრფივი მოდელით წარმოდგენილი არაწრფივი ოსცილატორების ერთობლიობა [30]. აღნიშნული ნაშრომის ავტორმა შესძლო გიროტროპული გარემოს არაცხადი მატერიალური განტოლებების მიღება, რომელშიც გათვალისწინებულია მოლეკულური ოსცილატორების კუბური არაწრფივობა და რომელიც უშვებს გარემოს გამოძახილისათვის არაცალსახა ამონახსნებს. შედეგად აიხსნა პოლარიზაციული არამდგრადობის წარმოშობის მექანიზმი.

ერთ-ერთი ყველაზე უფრო პოპულარული ოსცილატორული მოდელი ოპტიკურად აქტიური გარემოსათვის კუნის მიერ იყო შემოტანილი. მისი დაწვრილებითი აღწერა შეიძლება ვნახოთ [33]-ში. ჩვენ კი შევჩერდებით ზოგიერთ დეტალზე. კუნის მოლეკულა წარმოიქმნება ორი ოსცილატორით, რომლებიც დაკავშირებილი არიან ერთმანეთთან დრეკადი ურთიერთქმედებით და ირხევიან ურთიერთმართობული მიმართულებების გასწვრივ. ოსცილატორები სივრცეში დაცილებულნი არიან ერთმანეთისაგან. კუნის მოლეკულებისაგან შემდგარი გარემოს გამოძახილი არალოკალურია - ერთ-ერთი ოსცილატორის აღზნება გადაეცემა მოლეკულის მეორე ბოლოს. მოლეკულის ზომა განსაზღვრავს სივრცული დისპერსიის დამახასიათებელ მასშტაბს.

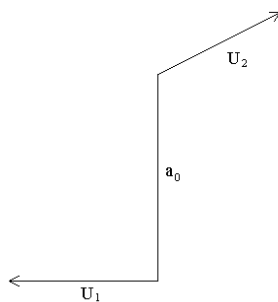
სიმარტივის მიუხედავად კუნის მოდელი საკმაოდ პროდუქტიულია. მაგალითად შემთხვევითად(ქაოსურად) ორიენტირებული კუნის მოლეკულების ერთობლიობა წარმოადგენს იზოტროპული გიროტროპული გარემოს უმარტივეს მოდელს. თუ დავუშვებთ, რომ მანძილი ოსცილატორებს შორის ნულის ტოლია ან თუ გამოვრიცხავთ ოსცილატორებს შორის ბმას, შემთხვევითად ორიენტირებული კუნის მოლეკულების ანსამბლი წარმოადგენს იზოტროპული არაგიროტროპული გარემოს უმარტივეს მოდელს.

კუნის მოდელის განზოგადება არაწრფივი პოლარიზაციული ოპტიკის ამოცანებისათვის წარმოადგენს მიკროსკოპული მოდელირების ერთ-ერთ ყველაზე უფრო თვალსაჩინო მიმართულებას. ასეთი განზოგადობა მოითხოვს მოლეკულაში არაწრფივი დრეკადი ძალების გათვალისწინებას.

განვიხილოთ კუნის არაწრფივი ოსცილატორული მოდელის ვარიანტი [33] ნაშრომის მიხედვით. მოლეკულის ჰამილტონიანი შედგება ორივე მუხტის კინეტიკური ენერჯისაგან, დრეკადი დეფორმაციის პოტენციური ენერჯისაგან და ოსცილატორების ურთიერთქმედების ენერჯისაგან არაწრფივი წევრების გათვალისწინებით. ჩვენ შემოვისაზღვრებით ველის მიხედვით ცალკეული ოსცილატორების ანჰარმონიზმით და ოსცილატორებს შორის კუბური არაწრფივი ბმის შემთხვევით:

$$U(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \omega_0^2 (u_1^2 + u_2^2) + \frac{a}{4} (u_1^4 + u_2^4) + \frac{c}{2} u_1^2 u_2^2 + b(u_1 u_2^3 + u_1^3 u_2)$$

აქ  $\omega_0$  არის თითოეული ოსცილატორის საკუთარი სიხშირე,  $a$  განსაზღვრავს მათ ურთიერთქმედებას  $a, b, c$  განსაზღვრავენ რხევების ანჰარმონიზმს.



ნახ.3.1 კუნის არაწრფივი ოსცილატორული მოდელი.

კუნის მოდელის მოკლე აღწერის შემდეგ ავლიშნავთ, რომ ჩვენს მიზანს არ წარმოადგენს გარემოს ოპტიკური მახასიათებლების გამოთვლა. ჩვენთვის კუნის მოდელი წარმოადგენს უშუალო ინტერესის საგანს როგორც არაწრფივი მოდელი. წინამდებარე ნაშრომის ამ თავის მიზანს წარმოადგენს არაწრფივი კლასიკური და კვანტური დინამიკის შესწავლა კუნის განზოგადებული არაწრფივი მოდელის ფარგლებში.

პირველი პარაგრაფი წარმოადგენს შესავალს. მეორე პარაგრაფი ეძღვნება კლასიკური არაწრფივი დინამიკის შესწავლას. სუსტი არაწრფივობის შემთხვევაში, როდესაც განტოლებათა სისტემა შეიძლება განვიხილოთ როგორც კვაზიწრფივი. ვან დერ პოლის განზოგადებული მეთოდის გამოყენებით [34,35] მიღებულია ანალიზური ამონახსნები. ძლიერი არაწრფივობის შემთხვევაში, როდესაც ანალიზური მეთოდების გამოყენება ხდება შეუძლებელი გამოყენებულია რიცხვითი მეთოდები. განიხილება ამონახსნთა კორელაციური ფუნქციები და განისაზღვრება კოლმოგოროვ-სინაის ენტროპიის მნიშვნელობა [36-38]. რ. გრასბერგერისა და პროკაჩიას ალგორითმის გამოყენებით [39-41] დადგენილია ფრაქტალური განზომილება.

მესამე პარაგრაფში შეისწავლება პირობები, რომელთა შესრულებისას კუნის მოდელი ხდება ინტეგრებადი. მოცემულია ზუსტი ანალიზური ამონახსნები, ჩაწერილი ელიფსურ ფუნქციებში [42]. განიხილება შემთხვევა, როდესაც გარე ველის ამპლიტუდა მოდულირებულია ნელაცვლადი რადიოსიხშირული ველით. მელნიკოვის კრიტერიუმის გამოყენებით [43] განიხილება ერთგანზომილებიან არაავტონომიურ სისტემებში ქაოსის წარმოშობის შესაძლებლობა. ნაჩვენებია, რომ პოლიქრომატული დატუმბვის შემთხვევაში ადგილი აქვს არაწრფივი რეზონანსების გადაფარვას [44] და წარმოიშვება დინამიკური სტოქასტურობა.

მეოთხე პარაგრაფი ეძღვნება ამოცანის კვანტურ-მექანიკურ განხილვას. კერძოდ, განხილულია შემთხვევა, როდესაც გარე ველის ამპლიტუდა მოდულირებულია ნელაცვლადი ველით.

მეხუთე პარაგრაფში მოვახდინეთ კუნის არაწრფივი მოდელის განზოგადება  $N$  ოსცილატორისაგან შემდგარი ჯაჭვის შემთხვევაში. ჩვენი მიზანია არაწრფივი გიროტროპული გარემო წარმოვადგინოთ, როგორც ურთიერთქმედ არაწრფივ ოსცილატორთა ერთობლიობა. საკითხი, რომელიც ჩვენ გვაინტერესებს არის შემდეგი: როგორ გავრცელდება ასეთ გარემოში საწყისი შეშფოთება და ახასიათებს თუ არა ასეთ გარემოს ტალღური ამონახსნები?

შემდგომ ორ პარაგრაფში განხილულია ის შემთხვევა, როცა განზოგადებული კუნის მოდელის აღმწერი განტოლება არ არის ზუსტად ინტეგრებადი. აღნიშნული მოდელის არაწრფივობიდან გამომდინარე მოსალოდნელია, რომ სისტემას ჰქონდეს ქაოსური ამონახსნები. ნაჩვენებია იქნება, რომ მიუხედავად ინდივიდუალური ოსცილატორების ქაოსური დინამიკისა, ასეთ ოსცილატორთა ჯაჭვი ინარჩუნებს კოჰერენტულობას როგორც მთლიანი სისტემა. ჩვენ ასევე განვიხილოთ განზოგადებულ კუნის ოსცილატორთა ჯაჭვის ცვლადი ველის ენერჯის სტოქასტურ შთანთქმას.

### 3.2. სუსტი და ძლიერი არაწრფივობის შემთხვევა

როგორც უკვე იყო აღნიშნული შესავალში, ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ბრტყლად პოლარიზებული სინათლის ტალღის ზემოქმედების ქვეშ მყოფი კუნის არაწრფივი ოსცილატორის დინამიკის შესწავლა. დავუშვათ, რომ გარეშე ველის სიხშირეა  $\Omega$ , მაშინ [30]-ს თანახმად, განტოლებებს, რომლის მეშვეობითაც აღიწერება კუნის ბმული არაწრფივი ოსცილატორების დინამიკა, აქვთ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha y + \Gamma \dot{x} + ax^3 + b(y^3 + 3x^2 y) + cxy^2 &= \frac{eE_x}{m} \cos(\Omega t + k_z a_0 / 2) \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y + \alpha x + \Gamma \dot{y} + ay^3 + b(x^3 + 3y^2 x) + cyx^2 &= \frac{eE_y}{m} \cos(\Omega t - k_z a_0 / 2), \end{aligned} \quad (3.1)$$

სადაც  $\omega_0$  საკუთარ რხევათა სიხშირეა  $a, b, c$  რხევების ანჰარმონიზმთან დაკავშირებული კონსტანტებია,  $e$  და  $m$  ელექტრონის მასა და მუხტია,  $E_{x,y}$  გარეშე ელექტრული ველის განივი კომპონენტის პროექციებია,  $\Gamma$  არის დისიპაციის აღმწერი ფენომენოლოგიური პარამეტრი,  $k_z$  ტალღური ვექტორის პროექციაა,  $a_0$  მოცემული ამოცანის მახასიათებელი სივრცული მანძილია. ჩავთვალოთ, რომ სრულდება პირობები:

$$\frac{\Gamma}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{eE_{x,y}}{m\omega_0^2} \ll 1$$

და შემდეგი გარდაქმნების მეშვეობით:

$$x \rightarrow \frac{x}{a_0}, \quad y \rightarrow \frac{y}{a_0}, \quad t = \Omega t$$

გადავიდეთ უგანზომილებო სიდიდეებზე. შედეგად (3.1)დან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} x + \frac{\alpha}{\Omega^2} y &= -f(x, y, \dot{x}) + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \cos(t), \\ \ddot{y} + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} y + \frac{\alpha}{\Omega^2} x &= -g(x, y, \dot{y}) + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \frac{E_y}{E_x} \cos(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

სადაც

$$f(x, y, \dot{x}) = \frac{\Gamma}{\Omega} \dot{x} + A_0 x^3 + B_0 (y^3 + 3x^2 y) + C_0 xy^2,$$

$$g(x, y, \dot{y}) = \frac{\Gamma}{\Omega} \dot{y} + A_0 y^3 + B_0 (x^3 + 3y^2 x) + C_0 yx^2,$$

$$A_0 = \frac{aa_0^2}{\Omega^2}, \quad B_0 = b \frac{a_0^2}{\Omega^2}, \quad C_0 = c \frac{a_0^2}{\Omega^2}, \quad \omega = \left( \frac{eE_x}{a_0 m} \right)^{1/2}.$$

$f(x, y, \dot{x})$  და  $g(x, y, \dot{y})$  ფუნქციები წარმოადგენენ კორდინატების არაწრფივ ფუნქციებს. როდესაც ამ ფუნქციების წინ მდგომი კოეფიციენტი (ავლნიშნოთ ის  $\mu$ )  $\mu=0$ , განტოლებათა სისტემა (3.1) ხდება წრფივი. როცა  $\mu \neq 0$  მაგრამ მცირეა, განტოლებათა მოცემული სისტემა ახლოა წრფივთან და ამიტომ უწოდებენ კვაზიწრფივს. კვაზიწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მრავალი მეთოდი არსებობს. მაგალითად, ასიმპტოტური მეთოდი, რომელსაც საფუძვლად უდევს ჰიპოთეზა ისეთი ამონახსნის არსებობის შესახებ, რომელიც ფორმით გავს წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს. არსებობს ასევე ისეთი მეთოდიც, რომელიც არ გულისხმობს ასეთი ამონახსნის არსებობას, მაგრამ ეფუძნება ნებისმიერი რეალური სისტემის გატარების ზოლის



სასრულობას (ე.წ. ფილტრის ჰიპოთეზა). ჩვენ ვისარგებლეთ ნელაცვლადი კოეფიციენტების (ამპლიტუდების) მეთოდით, რომელშიც გამოიყენება გასაშუალოების მიდგომა. აღნიშნული მიდგომა არაწრფივ რხევათა ამოცანების ამოხსნისათვის პირველად გამოიყენა ვან დერ პოლმა [34].

გადავწეროთ (3.2) განტოლებათა სისტემა განზოგადებული კოორდინატებისათვის შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + A_1 \dot{q}_2 + B_1 q_2 + n_1^2 q_1 = \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + D_1 \sin t + E_1 \cos(t) , \\ \ddot{q}_2 + A_2 \dot{q}_1 + B_2 q_1 + n_2^2 q_2 = \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + D_2 \sin t + E_2 \cos(t) , \end{cases} \quad (3.3)$$

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{\alpha}{\Omega^2}, \quad n_1^2 = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}, \quad \mu = -1, \quad D_1 = 0, \quad E_1 = \frac{\omega^2}{\Omega^2}, \quad q_1 = x,$$

$$A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{\alpha}{\Omega^2}, \quad n_2^2 = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}; \quad D_2 = 0; \quad E_2 = \frac{\omega^2}{\Omega^2} \frac{E_y}{E_x} = E_1 \frac{E_y}{E_x}; \quad q_2 = y.$$

ვუძებნოთ (3.3) სისტემის ამონახსნი შემდეგი წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის სახით:

$$\begin{aligned} q_1 &= a \sin(k_1 t + \beta_1) + b \sin(k_2 t + \beta_2) + d_1 \sin t + e_1 \cos t, \\ q_2 &= \alpha_1 a \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 b \sin(k_2 t + \beta_2) + d_2 \sin t + e_2 \cos t, \end{aligned} \quad (3.4)$$

სადაც  $a, b, \beta_1, \beta_2$  დროის მიხედვით ნელა ცვლადი ფუნქციებია, ხოლო  $k_1, k_2$  წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების საკუთარი სიხშირეებია, რომლებიც წარმოადგენენ შემდეგი განტოლების ამონახსნებს:

$$\begin{aligned} \sigma k^4 - (n_1^2 + n_2^2 - A_1 B_2 - A_2 B_1) k^2 + n_1^2 n_2^2 - B_1 B_2 &= 0, \\ (\sigma = 1 - A_1 A_2), \end{aligned} \quad (3.5)$$

ხოლო დანარჩენი კოეფიციენტები განისაზღვრებიან შემდეგი თანაფარდობების მეშვეობით :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A_2 k_1^2 - B_2}{n_2^2 - k_1^2} = \frac{n_1^2 - k_1^2}{A_1 k_1^2 - B_1}, & \alpha_2 &= \frac{A_2 k_2^2 - B_2}{n_2^2 - k_2^2} = \frac{n_1^2 - k_2^2}{A_1 k_2^2 - B_1}, \\ d_1 &= \frac{D_1 (n_2^2 - 1) - D_2 (B_1 - A_1)}{\Delta}, & d_2 &= \frac{D_2 (n_1^2 - 1) - D_1 (B_2 - A_2)}{\Delta}, \\ e_1 &= \frac{E_1 (n_2^2 - 1) - E_2 (B_1 - A_1)}{\Delta}, & e_2 &= \frac{E_2 (n_1^2 - 1) - E_1 (B_2 - A_2)}{\Delta}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\Delta = \sigma - (n_1^2 + n_2^2 - A_1 B_2 - A_2 B_1) + n_1^2 n_2^2 - B_1 B_2.$$

ამ თანაფარდობების ჩასმით (3.5) -ში ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}
\sigma &= 1 - A_1 A_2 = 1, \\
k^4 - \frac{2\omega_0^2}{\Omega^2} k^2 + \frac{\omega_0^4}{\Omega^4} - \frac{\alpha^2}{\Omega^4} &= 0, \\
k^2 &= \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^4}{\Omega^4} - \frac{\omega_0^4}{\Omega^4} + \frac{\alpha^2}{\Omega^4}} = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \pm \frac{\alpha}{\Omega^2}, \\
k_1^2 &= \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} + \frac{\alpha}{\Omega^2}, \quad k_2^2 = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} - \frac{\alpha}{\Omega^2}, \\
\alpha_1 &= \frac{-B_2}{-\alpha/\Omega^2} = 1, \quad \alpha_2 = \frac{-B_2}{\alpha/\Omega^2} = -1, \\
d_1 &= \frac{0}{\Delta} = 0, \quad d_2 = \frac{0}{\Delta} = 0, \\
\Delta &= 1 - \frac{2\omega_0^2}{\Omega^2} + \frac{\omega_0^4}{\Omega^4} - \frac{\alpha^2}{\Omega^4} = \frac{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 - \alpha^2}{\Omega^4}, \\
e_1 &= \frac{\frac{\omega^2}{\Omega^2} \left( \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} - 1 \right) - E_1 \frac{E_y}{E_x} \frac{\alpha}{\Omega^2}}{\Delta} = \frac{\omega^2 (\omega_0^2 - \Omega^2 - E^* \alpha)}{(\Omega^2 - \omega_0^2) - \alpha^2}, \\
e_2 &= \frac{\frac{\omega^2}{\Omega^2} E^* \left( \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} - 1 \right) - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \frac{\alpha}{\Omega^2}}{\Delta} = \frac{\omega^2 (E^* (\omega_0^2 - \Omega^2) - \alpha)}{(\Omega^2 - \omega_0^2) - \alpha^2}, \\
E^* &= \frac{E_y}{E_x}.
\end{aligned}$$

როგორც უკვე ავღნიშნეთ  $a, b, \beta_1, \beta_2$  დროის მიხედვით ნელაცვლადი ფუნქციებია. დამატებითი პირობა, რომელსაც დავადებთ ამ ფუნქციებს მდგომარეობს იმაში, რომ განზოგადებული კოორდინატების წარმოებულებს დროის მიხედვით უნდა ჰქონდეთ იგივე სახე, როგორც მუდმივი  $a, b, \beta_1, \beta_2$  კოეფიციენტების შემთხვევაში. ზემოთ ნათქვამის გათვალისწინებით კოორდინატების დროით გაწარმოების შემდეგ გვექნება:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= ak_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + bk_2 \cos(k_2 t + \beta_2) - e_1 \sin t, \\
\dot{q}_2 &= \alpha_1 ak_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2 bk_2 \cos(k_2 t + \beta_2) - e_2 \sin t, \\
\ddot{q}_1 &= \dot{a} \sin(k_1 t + \beta_1) + a(k_1 + \dot{\beta}_1) \cos(k_1 t + \beta_1) + \dot{b} \sin(k_2 t + \beta_2) + \\
&+ b(k_2 + \dot{\beta}_2) \cos(k_2 t + \beta_2) - e_1 \cos t \\
\ddot{q}_1 &= \dot{a} k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) - a k_1 (k_1 + \dot{\beta}_1) \sin(k_1 t + \beta_1) + \dot{b} k_2 \cos(k_2 t + \beta_2) - \\
&- b k_2 (k_2 + \dot{\beta}_2) \sin(k_2 t + \beta_2) - e_1 \cos t \\
\ddot{q}_2 &= \dot{a} \alpha_1 \sin(k_1 t + \beta_1) - a \alpha_1 k_1 (k_1 + \dot{\beta}_1) \sin(k_1 t + \beta_1) + \dot{b} \alpha_2 k_2 \cos(k_2 t + \beta_2) - \\
&- b \alpha_2 k_2 (k_2 + \dot{\beta}_2) \sin(k_2 t + \beta_2) - e_2 \cos t
\end{aligned}$$

საიდანაც ვღებულობთ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned}
\dot{a} \sin(k_1 t + \beta_1) + a \dot{\beta}_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + \dot{b} \sin(k_2 t + \beta_2) + b \dot{\beta}_2 \cos(k_2 t + \beta_2) &= 0, \\
\dot{a} \alpha_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + a \alpha_1 \dot{\beta}_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + \dot{b} \alpha_2 \sin(k_2 t + \beta_2) + b \alpha_2 \dot{\beta}_2 \cos(k_2 t + \beta_2) &= 0.
\end{aligned}$$

გავაწარმოვოთ დროით განზოგადებული კოორდინატების წარმოებულები და ჩავსვათ მიღებული ტოლობები (3.3) სისტემაში, შედეგად (3.6) გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= \dot{a}k_1 \cos(k_1t + \beta_1) - ak_1(k_1 + \dot{\beta}_1) \sin(k_1t + \beta_1) + \dot{b}k_2 \cos(k_2t + \beta_2) - \\
 &- bk_2(k_2 + \dot{\beta}_2) \sin(k_2t + \beta_2) - e_1 \cos t, \\
 \dot{q}_2 &= \dot{a}k_1\alpha_1 \cos(k_1t + \beta_1) - ak_1\alpha_1(k_1 + \dot{\beta}_1) \sin(k_1t + \beta_1) + \\
 &+ \dot{b}k_2\alpha_2 \cos(k_2t + \beta_2) - bk_2\alpha_2(k_2 + \dot{\beta}_2) \sin(k_2t + \beta_2) - e_2 \cos t, \\
 \ddot{q}_1 + B_1q_2 + n_1^2q_1 &= \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + E_1 \cos t, \\
 \ddot{q}_2 + B_2q_1 + n_2^2q_2 &= \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + E_2 \cos t, \\
 \dot{a}k_1 \cos(k_1t + \beta_1) + \dot{b}k_2 \cos(k_2t + \beta_2) - ak_1\dot{\beta}_1 \sin(k_1t + \beta_1) \\
 &- bk_2\dot{\beta}_2 \sin(k_2t + \beta_2) = \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2), \\
 \dot{a}\alpha_1k_1 \cos(k_1t + \beta_1) + \dot{b}k_2\alpha_2 \cos(k_2t + \beta_2) - ak_1\dot{\beta}_1\alpha_1 \sin(k_1t + \beta_1) \\
 &- bk_2\dot{\beta}_2\alpha_2 \sin(k_2t + \beta_2) = \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:  $\xi = k_1t + \beta_1, \eta = k_2t + \beta_2$ , მაშინ განტოლებათა სისტემა  $\dot{a}, \dot{b}, a\dot{\beta}_1, b\dot{\beta}_2$ -თვის მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}
 \dot{a} \sin \xi + a\dot{\beta}_1 \cos \xi + \dot{b} \sin \eta + b\dot{\beta}_2 \cos \eta &= 0, \\
 \dot{a}\alpha_1 \sin \xi + a\alpha_1\dot{\beta}_1 \cos \xi + \dot{b}\alpha_2 \sin \eta + b\alpha_2\dot{\beta}_2 \cos \eta &= 0, \\
 \dot{a}k_1 \cos \xi + \dot{b}k_2 \cos \eta - ak_1\dot{\beta}_1 \sin \xi \\
 - bk_2\dot{\beta}_2 \sin \eta &= \mu f(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2), \\
 \dot{a}\alpha_1k_1 \cos \xi + \dot{b}k_2\alpha_2 \cos \eta - ak_1\dot{\beta}_1\alpha_1 \sin \xi \\
 - bk_2\dot{\beta}_2\alpha_2 \sin \eta &= \mu g(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2).
 \end{aligned}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტია:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sin \xi & \sin \eta & \cos \xi & \cos \eta \\ \alpha_1 \sin \xi & \alpha_2 \sin \eta & \alpha_1 \cos \xi & \alpha_2 \cos \eta \\ k_1 \cos \xi & k_2 \cos \eta & -k_1 \sin \xi & -k_2 \sin \eta \\ \alpha_1 k_1 \cos \xi & \alpha_2 k_2 \cos \eta & -\alpha_2 k_1 \sin \xi & -\alpha_2 k_2 \sin \eta \end{pmatrix} = 4k_1k_2$$

ხოლო:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sin \eta & \cos \xi & \cos \eta \\ 0 & \alpha_2 \sin \eta & \alpha_1 \cos \xi & \alpha_2 \cos \eta \\ \mu f & k_2 \cos \eta & -k_1 \sin \xi & -k_2 \sin \eta \\ \mu g & \alpha_2 k_2 \cos \eta & -\alpha_2 k_1 \sin \xi & -\alpha_2 k_2 \sin \eta \end{pmatrix} = -2k_2(f + g)\cos \xi \\
 \Delta_2 &= \begin{pmatrix} \sin \xi & 0 & \cos \xi & \cos \eta \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_1 \cos \xi & \alpha_2 \cos \eta \\ k_1 \cos \xi & \mu f & -k_1 \sin \xi & -k_2 \sin \eta \\ \alpha_1 k_1 \cos \xi & \mu g & -\alpha_2 k_1 \sin \xi & -\alpha_2 k_2 \sin \eta \end{pmatrix} = -2k_1(f - g)\cos \eta
 \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} \sin \xi & \sin \eta & 0 & \cos \eta \\ \alpha_1 \sin \xi & \alpha_2 \sin \eta & 0 & \alpha_2 \cos \eta \\ k_1 \cos \xi & k_2 \cos \eta & \mu f & -k_2 \sin \eta \\ \alpha_1 k_1 \cos \xi & \alpha_2 k_2 \cos \eta & \mu g & -\alpha_2 k_2 \sin \eta \end{pmatrix} = 2k_2(f + g) \sin \xi$$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} \sin \xi & \sin \eta & \cos \xi & 0 \\ \alpha_1 \sin \xi & \alpha_2 \sin \eta & \alpha_1 \cos \xi & 0 \\ k_1 \cos \xi & k_2 \cos \eta & -k_1 \sin \xi & \mu f \\ \alpha_1 k_1 \cos \xi & \alpha_2 k_2 \cos \eta & -\alpha_2 k_1 \sin \xi & \mu g \end{pmatrix} = 2k_1(g - f) \sin \eta$$

მაშასადამე:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \left[ -\frac{1}{2k_1}(f + g) \right] \cos \xi ,$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \left[ \frac{1}{2k_2}(f - g) \right] \cos \eta ,$$

$$a \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \left[ \frac{1}{2k_1}(f + g) \right] \sin \xi ,$$

$$b \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \left[ -\frac{1}{2k_2}(g - f) \right] \sin \eta .$$

მიღებული განტოლებები წარმოადგენს (3.7) განტოლებათა სისტემას ჩაწერილს სხვა ცვლადებში. დავუშვათ, რომ  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  ცვლადები იცვლებიან გაცილებით ნელა საწყის დინამიურ სისტემაში მიმდინარე რხევებთან შედარებით. თუ მოვახდენთ მიღებულ განტოლებათა სისტემის გასაშუალოებას  $2\pi/k_1, 2\pi/k_2, 2\pi$  პერიოდების მიხედვით, მაშინ მივიღებთ  $a$ ,  $b$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  ცვლადებისათვის ე.წ. ჩამოჭრილ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \left[ \left( -\frac{1}{2k_1} \right) (F_1 + G_1) \right] , \\ \frac{db}{dt} &= \left[ \frac{1}{2k_2} (F_2 - G_2) \right] , \\ \frac{d\beta_1}{dt} &= \left[ \frac{1}{2k_1 a} (F_3 + G_3) \right] , \\ \frac{d\beta_2}{dt} &= \left[ \frac{1}{2k_2 b} (G_4 - F_4) \right] , \end{aligned} \tag{3.8}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cos \xi d\xi d\eta dt, & F_2 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cos \eta d\eta d\xi dt, \\
F_3 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f \sin \xi d\xi d\eta dt, & F_4 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f \sin \eta d\eta d\xi dt, \\
G_1 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g \cos \xi d\xi d\eta dt, & G_2 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g \cos \eta d\eta d\xi dt, \\
G_3 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g \sin \xi d\xi d\eta dt, & G_4 &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g \sin \eta d\eta d\xi dt.
\end{aligned}$$

ჩვენს კოორდინატებში, მათი წარმოდგენები,  $f$  და  $g$  ფუნქციები  $\alpha$  კოეფიციენტების მნიშვნელობების გათვალისწინებით:

$$\begin{aligned}
q_1 &= a \sin \xi + b \sin \eta + e_1 \cos t, \\
q_2 &= a \sin \xi - b \sin \eta + e_2 \cos t, \\
\dot{q}_1 &= ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta - e_1 \sin t, \\
\dot{q}_2 &= ak_1 \cos \xi - bk_2 \cos \eta - e_2 \sin t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) &= (\Gamma/\Omega)(ak_1 \cos \xi + bk_2 \cos \eta - e_1 \sin t) + A_0(a \sin \xi + b \sin \eta + \\
&+ e_1 \cos t)^3 + B_0(a \sin \xi - b \sin \eta + e_2 \cos t)^3 + 3B_0(a \sin \xi + b \sin \eta + e_1 \cos t)^2 \times \\
&\times (a \sin \xi - b \sin \eta + e_2 \cos t) + C_0(a \sin \xi + b \sin \eta + e_1 \cos t)(a \sin \xi - b \sin \eta + e_2 \cos t)^2 \\
g(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) &= (\Gamma/\Omega)(ak_1 \cos \xi - bk_2 \cos \eta - e_2 \sin t) + A_0(a \sin \xi - b \sin \eta + \\
&+ e_2 \cos t)^3 + B_0(a \sin \xi - b \sin \eta + e_2 \cos t)^3 + 3B_0(a \sin \xi - b \sin \eta + e_2 \cos t)^2 \times \\
&\times (a \sin \xi + b \sin \eta + e_1 \cos t) + C_0(a \sin \xi - b \sin \eta + e_2 \cos t)(a \sin \xi + b \sin \eta + e_1 \cos t)^2
\end{aligned}$$

ამ ფუნქციათა შეტანა და ინტეგრება მოგვცემს  $F$  და  $G$  ფუნქციებისათვის შემდეგ გამოსახულებებს:

$$\begin{aligned}
F_1 = G_1 &= \frac{a\Gamma k_1}{\Omega}, \quad F_2 = -G_2 = \frac{b\Gamma k_2}{\Omega}, \\
F_3 &= \frac{a}{4} [6A_0 b^2 - 2b^2 c + 3a^2 (A_0 + 4B_0 + C_0) + 6(A_0 + B_0) e_1^2 + \\
&+ 4(3B_0 + C_0) e_1 e_2 + (6B_0 + C_0) e_2^2] \\
F_4 &= \frac{b}{4} [6A_0 b^2 - 2b^2 c + 3b^2 (A_0 - 4B_0 + C_0) + 6(A_0 - B_0) e_1^2 + \\
&+ 4(3B_0 - C_0) e_1 e_2 + (-6B_0 + 2C_0) e_2^2] \\
G_3 &= \frac{a}{4} [6A_0 b^2 - 2b^2 c + 3a^2 (A_0 + 4B_0 + C_0) + (6B_0 + 2C_0) e_1^2 + \\
&+ (6B_0 + 2C_0) e_1 e_2 + (3A_0 + 3B_0) e_2^2] \\
G_4 &= \frac{b}{4} [-6A_0 a^2 - 2b^2 c - 3b^2 (A_0 - 4B_0 + C_0) + (6B_0 - 2C_0) e_1^2 + \\
&+ (-6B_0 + 2C_0) e_1 e_2 + (-3A_0 + 3B_0) e_2^2]
\end{aligned}$$

თუ შევიტანთ ფუნქციების ამ მნიშვნელობებს (3.8) განტოლებათა სისტემაში, შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a\Gamma}{\Omega}, \quad \frac{db}{dt} = -\frac{b\Gamma}{\Omega}, \quad (3.9)$$

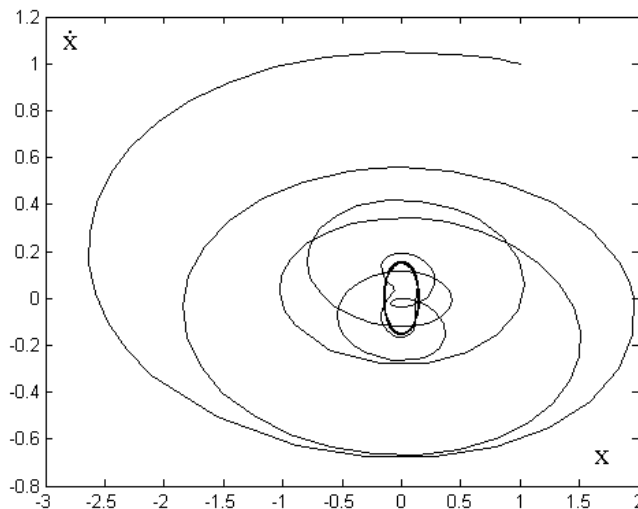
$$\begin{aligned} \frac{d\beta_1}{dt} &= \frac{1}{8k_1} (6A_0b^2 - 2b^2C_0 + 3a^2(A_0 + 4B_0 + C_0)) + 4(3B_0 + C_0)e_1e_2 + \\ &+ (A_0 + 6B_0 + C_0)(e_1^2 + e_2^2) \\ \frac{d\beta_2}{dt} &= \frac{1}{8k_2} (6A_0a^2 + 2a^2C_0 - 3b^2(A_0 - 4B_0 + C_0)) - 4(3B_0 - C_0)e_1e_2 + \\ &+ (-3A_0 + 6B_0 - C_0)(e_1^2 + e_2^2) \end{aligned}$$

ცვლადთა განცალგებისა და ინტეგრების შედეგად (3.9)-დან ვღებულობთ:

$$a = e^{-\frac{\Gamma}{\Omega}t}, \quad b = e^{-\frac{\Gamma}{\Omega}t}, \quad (3.10)$$

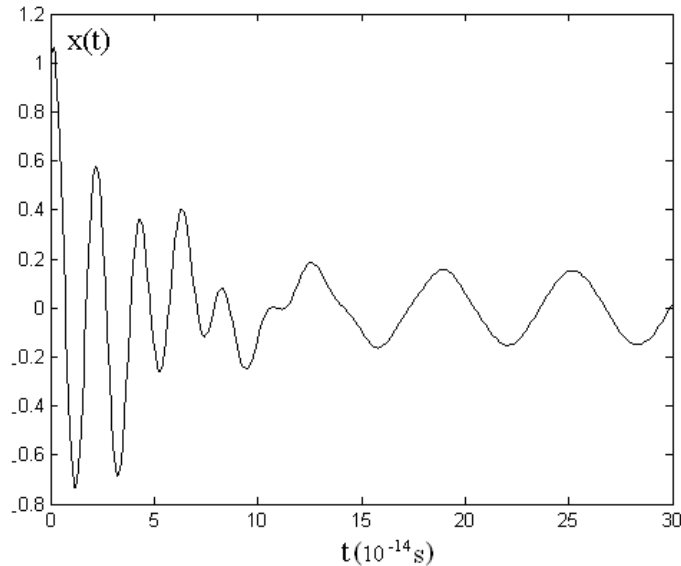
$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{8k_1} ((-\Omega/2\Gamma)(6A_0b^2 - 2b^2C_0 + 3a^2(A_0 + 4B_0 + C_0)) + 4(3B_0 + C_0)e_1e_2 + \\ &+ (A_0 + 6B_0 + C_0)(e_1^2 + e_2^2)) \cdot t \\ \beta_2 &= \frac{1}{8k_2} ((-\Omega/2\Gamma)(6A_0a^2 + 2a^2C_0 - 3b^2(A_0 - 4B_0 + C_0)) - 4(3B_0 - C_0)e_1e_2 + \\ &+ (-3A_0 + 6B_0 - C_0)(e_1^2 + e_2^2)) \cdot t \end{aligned}$$

როგორც მიღებული შედეგიდან ჩანს, დროით ინტერვალში  $0 < t \ll \frac{\Omega}{\Gamma}$  შესაძლებელია რელაქსაციური პროცესების უგულვებელყოფა, ხოლო არაწრფივობის ეფექტები ზეგავლენას მოახდენს მხოლოდ ფაზებზე. უფრო დიდ დროებზე  $t \geq \frac{\Omega}{\Gamma}$  დისიპაციური პროცესები ხდება საგრძნობი. რხევის ამპლიტუდის კლების შედეგად არაწრფივი წევრების გავლენა ხდება უმნიშვნელო. შედეგად უნდა მივიღოთ წრფივი ბმული ოსცილატორების იძულებითი რხევები. თვისობრივი ანალიზით მიღებული ეს შედეგი კარგად დასტურდება რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით მიღებული შედეგებით (იხ. ნახ. 3.2, ნახ.3.3).



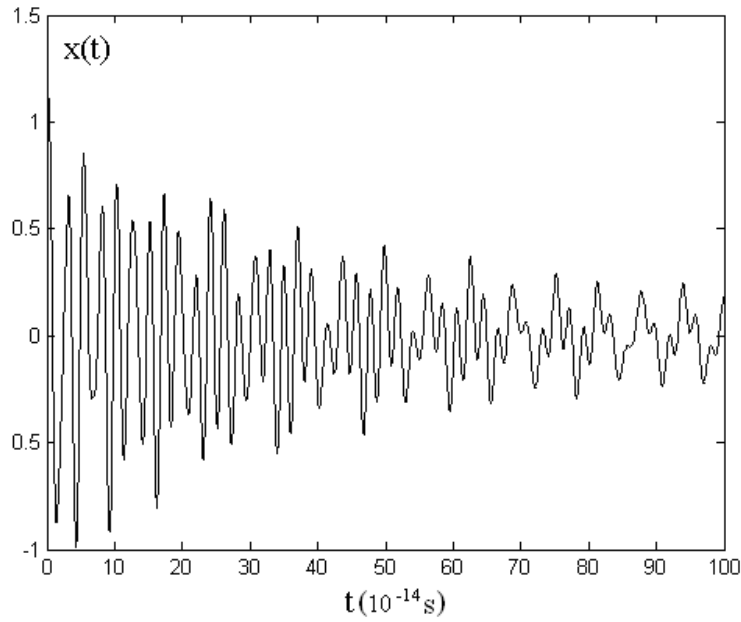
ნახ.3.2. მერხევი სისტემის (არაწრფივი ბმული ოსცილატორების)

რხევის ამპლიტუდის რხევის სიჩქარეზე დამოკიდებულება მიღებული (3.1) განტოლების რიცხვითი ინტეგრების საშუალებით პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობისათვის:  $\omega_0^2 / \Omega^2 = 10$ ,  $\Gamma / \Omega = 0,5$ ,  $\omega^2 / \Omega^2 = 1,5$ ,  $a / \Omega^2 = 1$ ,  $E_y = 2E_x$ ,  $A_0 = 0,3$ ,  $B_0 = 0,25$ ,  $C_0 = 0,25$ .

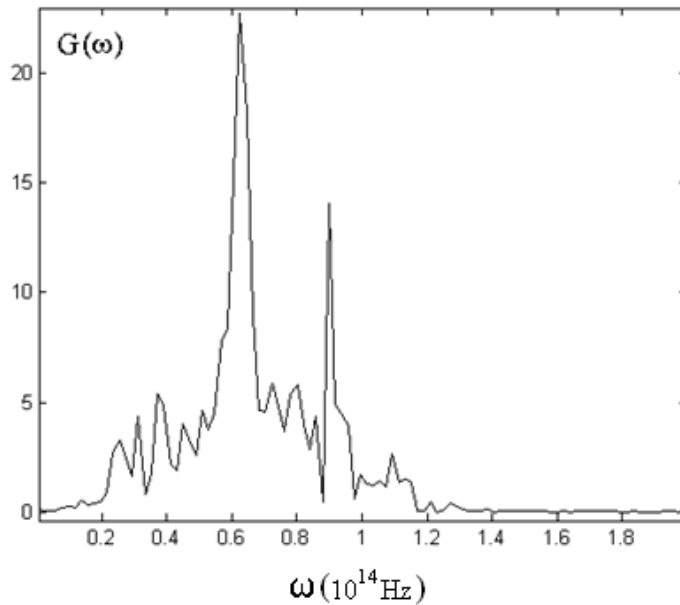


ნახ.3.3 მერხევი სისტემის (არაწრფივი ბმული ოსცილატორების) რხევის ამპლიტუდის დროზე დამოკიდებულება მიღებული (3.1) განტოლების რიცხვითი ინტეგრების საშუალებით პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობისათვის:  $\omega_0^2 / \Omega^2 = 10$ ,  $\Gamma / \Omega = 0,5$ ,  $\omega^2 / \Omega^2 = 1,5$ ,  $a / \Omega^2 = 1$ ,  $E_y = 2E_x$ ,  $A_0 = 0,3$ ,  $B_0 = 0,25$ ,  $C_0 = 0,25$ .

ძლიერი არაწრფივობის შემთხვევაში ნელაცვლადი ამპლიტუდების მეთოდის გამოყენება ხდება შეუძლებელი და სისტემის ქცევის აღწერისათვის აუცილებელია რიცხვითი მეთოდების გამოყენება. ძლიერი არაწრფივობის პირობებში სისტემაში შეიძლება წარმოიშვას დინამიური სტოქასტურობა. ამის გამო აუცილებელი ხდება გადასვლა დინამიური აღწერიდან სტოქასტურ აღწერაზე. დინამიურ სისტემაში მიმდინარე პროცესების აღწერისათვის მნიშვნელოვანი ხდება სტატისტიკური ცნებები: კოლმოგოროვის ენტროპია [36], უცნაური ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილება [39-41]. ეს ცნებები, რომლებიც განმარტებით არიან სტატისტიკური, მჭიდროდ არიან დაკავშირებულნი სისტემის მექანიკურ მახასიათაბლებთან, კონკრეტულად ფაზური ტრაექტორიების ლოკალურ არამდგრადობასთან. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს მოცემული ამოცანის პარამეტრების იმ მნიშვნელობების განსაზღვრა, რომლის დროსაც (3.1) განტოლებათა სისტემაში წარმოიშვება ქაოსი. რიცხვითი გამოთვლების შედეგები მოცემულია ქვემოთ (იხ ნახ.3.4, ნახ3..5),



ნახ.3.4. მერხევი სისტემის (არაწრფივი ბმული ოსცილატორების) რხევის ამპლიტუდის დროზე დამოკიდებულება მიღებული (3.1) განტოლების რიცხვითი ინტეგრების საშუალებით პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობისათვის:  $\omega_0^2 / \Omega^2 = 10$ ,  $\Gamma / \Omega = 0,5$ ,  $\omega^2 / \Omega^2 = 1,5$ ,  $a / \Omega^2 = 1$ ,  $E_y = 2E_x$ ,  $A_0 = 3$ ,  $B_0 = 2,5$ ,  $C_0 = 2,5$ .



ნახ. 3.5. კორელაციური ფუნქციის ფურიე სახე, მიღებული (3.1) განტოლების ინტეგრებით პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობისათვის:  $\omega_0^2 / \Omega^2 = 10$ ,  $\Gamma / \Omega = 0,5$ ,  $\omega^2 / \Omega^2 = 10$ ,  $a / \Omega^2 = 1$ ,  $E_y = 2E_x$ ,  $A_0 = 3$ ,  $B_0 = 2,5$ ,  $C_0 = 3$ .



ქაოსის არსებობის დადასტურებისათვის, აუცილებელია ამონახსნების კორელაციური ფუნქციის შესწავლა.

კოლმოგოროვის ენტროპიის განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ კორელაციური ფუნქციის:  $G_x(\tau) = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle$  (3.11)

ფურიე-გარდაქმნით, სადაც  $\langle x(t+\tau)x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t+\tau)x(t) dt$  ნიშნავს დროით

საშუალოს  $\tau_c$  - კორელაციის დროს, რომელიც დაკავშირებულია კოლმოგოროვის ენტროპიასთან თანაფარდობით  $h_0 \sim 1/\tau_c$ . როგორც რიცხვითმა გამოთვლებმა გვიჩვენეს, კორელაციის სიგრძის სიდიდე ტოლია  $\tau_c = 1/\delta\omega = 0,83 \cdot 10^{-14}$  წმ. რიცხვითი გამოთვლების შედეგები მოყვანილია ნახ.3.6.-ზე.

სისტემის ფაზური სივრცის ფრაქტალური განზომილების დასადგენად ვისარგებლოთ გრასბერგერ-პროკაჩიას ალგორითმით [39-41].

ალგორითმის არსი მდგომარეობს შემდეგში. დავუშვათ ჩვენ მივიღეთ განტოლებების რიცხვითი ამოხსნით მდგომარეობის ვექტორების კრებული  $\{x_i, i=1,2,..N\}$ , რომლებიც შეესაბამებიათ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების თანმიმდევრულ ნაბიჯებს. თუ წინასწარ ავირჩევთ მცირე  $\varepsilon$ -ს, შეიძლება გამივიყენოთ ჩვენი მონაცემების კრებული შემდეგი ჯამის შეფასებისათვის

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^N \theta(\varepsilon - |x_i - x_j|) \quad (3.12)$$

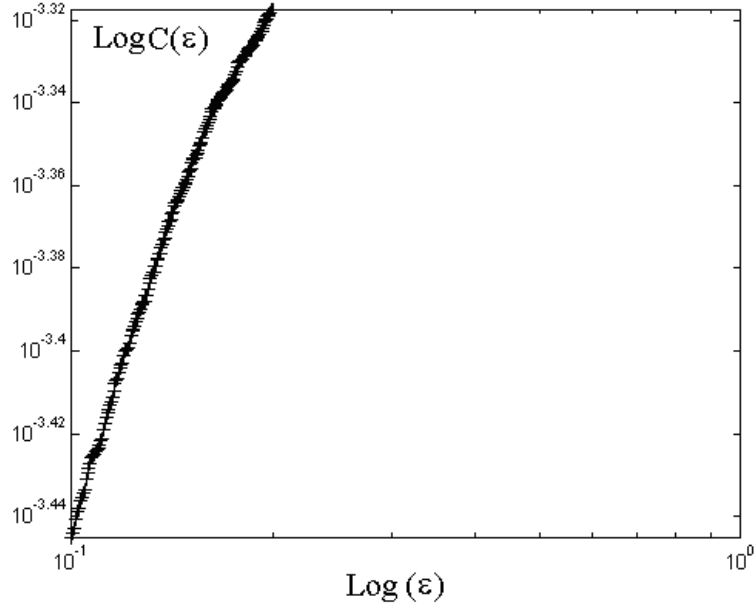
სადაც  $\theta$  - ხევისაიდის ფუნქციაა:  $\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ .

გრასბერგერ-პროკაჩიას ალგორითმის თანახმად, თუ ვიცით  $C(\varepsilon)$ , შეიძლება განვსაზღვროთ უცნაური ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილება შემდეგი ფორმულით:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (3.13)$$

ჩავატაროთ  $C(\varepsilon)$ -ს გაანგარიშება სხვადასხვა  $\varepsilon$ -თვის და შედეგები წარმოვადგინოთ კოორდინატებში  $\text{Log}(\varepsilon)$  და  $\text{Log}(C(\varepsilon))$ .

სავარაუდო დამოკიდებულებას  $C(\varepsilon)$  აქვს სახე  $\varepsilon^D$  ასე, რომ მიღებული გრაფიკი უნდა იყოს წრფე კუთხური კოეფიციენტით  $D$ . რიცხვითი გამოთვლის შედეგები მოყვანილია ნახ. 3.6.



ნახ. 3.6.  $C(\varepsilon)$  დამოკიდებულება  $\log(\varepsilon)$ . შედეგი მიღებულია (3.1) სისტემის რიცხვითი ინტეგრებით და (3.12), (3.13) ფორმულების გამოყენებით პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:  $\omega_0^2 / \Omega^2 = 10$ ,  $\Gamma / \Omega = 0,5$ ,  $\omega^2 / \Omega^2 = 10$ ,  $a / \Omega^2 = 10$ ,  $E_y = 2E_x$ ,  $A_0 = 3$ ,  $B_0 = 2,5$ ,  $C_0 = 3$

მიღებული გრაფიკი იძლევა საშუალებას განისაზღვროს ფრაქტალური განზომილება:

$$D = \frac{\Delta \text{Log}(C(\varepsilon))}{\Delta \text{Log}(\varepsilon)} = 2,4$$

### 3.3. კუნის მოდელის ინტეგრებადობის პირობები

ჩვენს შემდგომ ამოცანას წარმოადგენს იმ პირობების დადგენა, რომელთა შესრულებისას (3.1) განტოლებათა სისტემა იქნება ზუსტად ინტეგრებადი. ადვილი დასაანახია, რომ გარეშე ველისა და დისიპაციის არარსებობის პირობებში, (3.1) განტოლებათა სისტემის შესაბამის ჰამილტონიანს აქვს შემდეგი სახე:

$$H = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy + \frac{a}{4}(x^4 + y^4) + b(xy^3 + yx^3) + \frac{c}{2}x^2y^2 \quad (3.14)$$

ცვლადთა განცალების მიზნით შემოვიტანოთ ახალი კოორდინატები:

$$\begin{cases} x = q_1 + q_2 \\ y = q_1 - q_2 \end{cases}$$

შედეგად (3.14)-დან ვღებულობთ:

$$H = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \alpha q_1^2 + \frac{a q_1^4}{2} + 2b q_1^4 + \frac{c q_1^4}{2} - \alpha q_2^2 + 3a q_1^2 q_2^2 - c q_1^2 q_2^2 + \quad (3.15)$$

$$+ \frac{a q_2^4}{2} - 2b q_2^4 + \frac{c q_2^4}{2} + q_1^2 \omega_0^2 + q_2^2 \omega_0^2$$

იმისათვის, რომ ამოცანა იყოს ინტეგრებადი, ადვილი დასანახია რომ, საჭიროა შესრულდეს შემდეგი პირობა:  $c = 3a$ . ამ პირობის შესრულების შემთხვევაში განცალგებული ჰამილტონიანი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} H_1 &= \dot{q}_1^2 + Bq_1^4 + Aq_1^2 = E_1 \\ H_2 &= \dot{q}_2^2 + B^*q_2^4 + A^*q_2^2 = E_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

სადაც  $B = \frac{a+4b+c}{2}$ ,  $A = \alpha + \omega_0^2$ ,  
 $B^* = \frac{a-4b+c}{2}$ ,  $A^* = -\alpha + \omega_0^2$ .

შედეგად  $q_1$  ცვლადის მიმართ გვექნება შემდეგი დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dq_1}{dt} = \sqrt{E_1 - Bq_1^4 - Aq_1^2}$$

ფესქვემა გამოსახულების ფესვებისთვის გვექნება:

$$q_{1(1,2)}^2 = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4BE_1}}{-2B}.$$

ამის გათვალისწინებით ჩვენი დიფერენციალური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \sqrt{(-B) \left( q_1^2 - \frac{A + \sqrt{A^2 + 4BE_1}}{-2B} \right) \left( q_1^2 - \frac{A - \sqrt{A^2 + 4BE_1}}{-2B} \right)} = \\ &= \sqrt{B \left( \frac{A + \sqrt{A^2 + 4BE_1}}{2B} + q_1^2 \right) \left( \frac{\sqrt{A^2 + 4BE_1} - A}{2B} - q_1^2 \right)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

ჩვენი მიზანია ვეძებოთ (3.16) განტოლების ამოხსნა ელიფსურ ფუნქციებში [42-45], ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\gamma_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4BE_1}}{2B}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{A^2 + 4BE_1} - A}{2B}.$$

ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით (3.16) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{\sqrt{B\gamma_1\gamma_2}} \frac{dq_1}{dt} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\gamma_1} q_1^2\right) \left(1 - \frac{1}{\gamma_2} q_1^2\right)} \quad (3.18)$$

ადვილი დასანახია, რომ (3.16) განტოლება შეიძლება დაყვანილ იქნეს შემდეგ კანონიკურ სახეზე:

$$\frac{dq_1}{dt} = \sqrt{(1 - k'^2 q_1^2)(1 + k^2 q_1^2)},$$

სადაც  $k$  და  $k'$  კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობას:  
 $k'^2 = 1 - k^2$

ამ უკანასკნელ თანაფარდობას ჩვენს აღნიშვნებში ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{1}{\gamma_2} = 1 - \frac{1}{\gamma_1},$$

$$\frac{2B}{\sqrt{A^2 + 4BE_1} - A} = \frac{(A + \sqrt{A^2 + 4BE_1}) - 2B}{A + \sqrt{A^2 + 4BE_1}}.$$

ეს ტოლობა ენერჯის მნიშვნელობას დაადებს შემდეგ პირობას:

$$E_1 = 2B + \sqrt{4B^2 + A^2}$$

გამოვთვალოთ კოორდინატის დროითი წარმოებულის წინ მდგომი კოეფიციენტი:

$$\frac{1}{\sqrt{B\gamma_1\gamma_2}} = \frac{1}{\sqrt{B \frac{(A + \sqrt{A^2 + 4BE_1}) (\sqrt{A^2 + 4BE_1} - A)}{2B}}}} = \frac{1}{\sqrt{E_1}}$$

შედეგად განტოლება დებულობს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{dq_1}{dt} = \sqrt{(1 + k^2 q_1^2)(1 - k'^2 q_1^2)}$$

აქ:  $k^2 = \frac{2B}{A + \sqrt{A^2 + 4BE_1}}$  ,  $k'^2 = \frac{2B}{\sqrt{A^2 + 4BE_1} - A}$  .

ანალოგიური გამოთვლები კოორდინატისთვის მოგვცემს:

$$E_2 = \dot{q}_2^2 + B^* q_2^4 + A^* q_2^2$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \sqrt{E_2 - Bq_2^4 - Aq_2^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{dq_2}{dt} = \sqrt{(1 + k^{*2} q_2^2)(1 - k'^{*2} q_2^2)} ,$$

სადაც:  $k^{*2} = \frac{2B^*}{A^* + \sqrt{A^{*2} + 4B^* E_2}}$  ,  $k'^{*2} = \frac{2B^*}{\sqrt{A^{*2} + 4B^* E_2} - A^*}$  .

ამრიგად მივიღეთ შემდეგ დიფერენციალური განტოლებები  $q_1$  და  $q_2$  კოორდინატებისათვის:

$$\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{dq_1}{dt} = \sqrt{(1 + k^2 q_1^2)(1 - k'^2 q_1^2)} ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{E_2}} \frac{dq_2}{dt} = \sqrt{(1 + k^{*2} q_2^2)(1 - k'^{*2} q_2^2)}$$

პირველ განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგრით:

$$\int \frac{dq_1}{\sqrt{(1 + k^2 q_1^2)(1 - k'^2 q_1^2)}} = \int_0^t \sqrt{E_1} dt = \sqrt{E_1} t$$

შედეგად მივიღებთ გამოსახულებას, რომელიც არაცხადი სახით განსაზღვრავს ფუნქციას  $q_1(t)$ . თუ მოვახდენთ მიღებული გამოსახულების შებრუნებას, შედეგად მივიღებთ საბოლოო ამონახსენს ელიფსური ფუნქციის სახით [43-45]:

$$q_1(t) = sd(k, \sqrt{E_1} t) .$$

თავის მხრივ მოცემული იაკობის ელიფსური ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$sd(k, t) = sn(k, t) / dn(k, t)$$

$$dn(k, t) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(k, t)}$$

სადაც  $sn(k, t)$  იაკობის სინუსია [14-16].

ანალოგიურად გვექნება მეორე კოორდინატისთვისაც:

$$q_2(t) = sd(k^*, \sqrt{E_2}t) = \frac{sn(k^*, \sqrt{E_2}t)}{dn(k^*, \sqrt{E_2}t)}$$

მაშასადამე მივიღეთ შემდეგი ამოხსნები:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= sd(k, \sqrt{E_1}t) = \frac{sn(k, \sqrt{E_1}t)}{dn(k, \sqrt{E_1}t)}, \\ q_2(t) &= sd(k^*, \sqrt{E_2}t) = \frac{sn(k^*, \sqrt{E_2}t)}{dn(k^*, \sqrt{E_2}t)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

მიღებულ ამონახსნებზე დაყრდნობით შევაფასოთ არის თუ არა სამართლიანი დისიპაციური წევრის უგულვებლყოფა. ამისათვის გავითვალისწინოთ, რომ  $dn(k, \sqrt{E}t)$  და  $sn(k, \sqrt{E}t)$  ელიფსური ფუნქციების პერიოდები არის  $4K(k)$ , სადაც  $K(k)$  სრული ელიფსური ინტეგრალია [43,44]. ამისათვის შევადაროთ მიღებული ამონახსნის პერიოდი  $T=4K(k)$  დროის მახასიათებელ მამტაბს, რომელზეც საგრძნობი ხდება დისიპაციური პროცესები. (1.9)-ს გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ დისიპაციური პროცესები შეიძლება უგულვებლყოთ თუ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:  $4K(k) \gg \frac{\Omega}{\Gamma}$ .

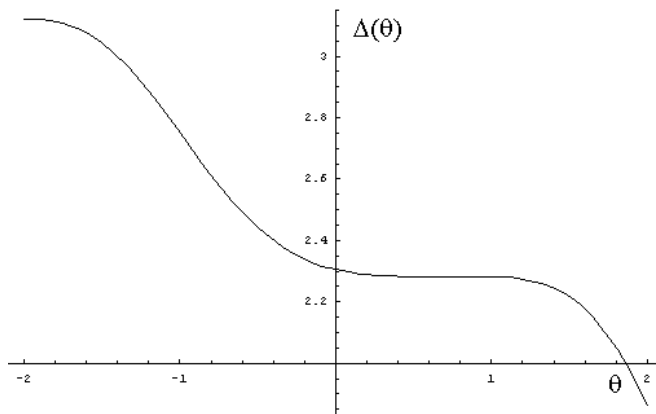
როგორც ვხედავთ, გარკვეული პირობების შესრულების შემთხვევაში ამოცანა არის ზუსტად ინტეგრებადი. ვნახოთ რას გამოიწვევს განხილვაში გარე ველის და დისიპაციური წევრის ჩართვა, გაჩნდება თუ არა სისტემაში ქაოსი? ამ საკითხის გარკვევა შეიძლება მელნიკოვის კრიტერიუმის შესწავლით [44,45], რომლის მეშვეობითაც შეიძლება დავადგინოთ არაწრფივი დინამიკის ერთ-ერთი საინტერესო ობიექტის - ჰომოკლინური სტრუქტურის არსებობა ან არარსებობა. ეს უკანასკნელი შეიძლება არსებობდეს როგორც დისიპაციურ, ასევე კონსერვატული სისტემების ფაზურ სივრცეში. ჰომოკლინური სტრუქტურის არსებობა საშუალებას გვაძლევს გავაკეთოთ დასკვნა სისტემაში ქაოსური დინამიკის არსებობის შესახებ., რაც თავის მხრივ გულისხმობს შემთხვევითი ყოფაქცევის მქონე ტრაექტორიათა კონტინიუმის არსებობას. მელნიკოვის კრიტერიუმი მდგომარეობს შემდეგში: თუ გვაქვს ერთგანზომილებიანი ინტეგრებადი ჰამილტონიანი  $H(x,p) = E$ , სადაც  $x = X(t)$  და  $p = P(t)$  არიან შეუშფოთებელი  $\dot{x} = H_p$ ,  $\dot{p} = -H_x$  განტოლებების ამონახსნები, ხოლო  $f, g$  დროის პერიოდული ფუნქციებია რომლებშიც გაერთიანებულია გარეშე ველი და დისიპაცია,  $\varepsilon$  მცირე პარამეტრია, ( $\dot{x} = H_p + \varepsilon f(x, p, t)$ ,  $\dot{p} = -H_x + \varepsilon g(x, p, t)$ ) სისტემის ავტონომიურობის დარღვევისას ქაოსი გაჩნდება იმ შემთხვევაში თუ ფუნქცია:

$$\Delta(\mathcal{G}) = \int_{-\infty}^{+\infty} [H_x(X, P)f(X, P, t) + H_p(X, P)g(X, P, t)]dt \quad (3.20)$$

არის ნიშანცვლადი სადაც  $\theta$  არის დროის საწყისი მომენტის წანაცვლება. შედეგად (3.1), (3.19), (3.20) ფორმულების გამოყენებით ვღებულობთ, რომ ჩვენს სისტემაში ქაოსის წარმოქმნის საკითხის შესწავლა დადის შემდეგი ფუნქციის ყოფაქცევის შესწავლაზე:

$$\begin{aligned}
\Delta(\vartheta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\omega^2}{\Omega^2} \cos(t+\vartheta) - \frac{\Gamma}{\Omega} \dot{q}_1(t+\vartheta) \right) \dot{q}_1(t+\vartheta) \right] dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\omega^2}{\Omega^2} \cos(t+\vartheta) - \frac{\Gamma}{\Omega} \frac{cn(k,t+\vartheta)}{dn^2(k,t+\vartheta)} \right) \frac{cn(k,t+\vartheta)}{dn^2(k,t+\vartheta)} \right] dt = \quad (3.21) \\
&= \frac{\omega^2}{\Omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cn(k,t+\vartheta)}{dn^2(k,t+\vartheta)} \cos(t+\vartheta) dt - \frac{\Gamma}{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cn^2(k,t+\vartheta)}{dn^4(k,t+\vartheta)} dt
\end{aligned}$$

$\Delta(\theta)$  ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია ნახ.3.7.-ზე.



ნახ.3.7.  $\Delta(\theta)$  ფუნქციის დამოკიდებულება  $\theta$  დროის საწყისი მომენტის წანაცვლებაზე.

როგორც გრაფიკიდან ჩანს  $\Delta(\theta)$  ფუნქცია არ არის ნიშანცვლადი ფუნქცია. ეს ფაქტი ადასტურებს, რომ მიუხედავად არაინტეგრებადობისა და ძლიერი არაწრფივობის, გარკვეული სიმეტრიის პირობებში სისტემაში არ ჩნდება ქაოსი. უფრო მეტიც, თუ სრულდება პირობა  $4K(k) \gg \frac{\Omega}{\Gamma}$  და შესაძლებელია დისიპაციის უგულვებლყოფა, გარე ველის ზემოქმედების პირობებშიც კი სისტემა არის ინტეგრებადი. ამ შემთხვევაში ჩვენი ჰამილტონიანი დებულობს შემდეგ სახეს:

$$H(x, \dot{x}, t) = H_0(x, \dot{x}) + H_{NL}(x) + \varepsilon V(x, t)$$

სადაც:

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + Ax^2), & H_{NL} &= Bx^4, \\
\varepsilon V(x, t) &= \frac{\omega^2}{\Omega^2} x \cos(\Omega t), & \varepsilon &= \frac{\omega^2}{\Omega^2}, \\
\varepsilon V(x, t) &= \varepsilon x \cos(\Omega t), & \varepsilon &\ll 1.
\end{aligned} \quad (3.22)$$

$x, \dot{x}$  - ელექტრონის კოორდინატი და იმპულსია,  $\omega_0$  - საკუთარი სიხშირე,  $B$  - არაწრფივი წევრის კოეფიციენტი,  $\Omega$  - ცვლადი ველის ამპლიტუდის მოდულაციის სიხშირე. ელექტრონის ურთიერთქმედება ცვლად გარე ველთან შეიძლება ჩავთვალოთ მცირე შეშფოთებად. ცვლადთა კანონიკური გარდაქმნით გადავიდეთ ახალ ქმედება-კუთხე  $(I, \theta)$  ცვლადებზე: შემდეგი გარდაქმნების მეშვეობით:

$x = (2I/\sqrt{A})^{1/2} \cos \theta$ ,  $\dot{x} = -(2I\sqrt{A})^{1/2} \sin \theta$ . შედეგად მივიღებთ  $H_0 = I\sqrt{A}$ . ჩავთვალოთ, რომ ადგილი აქვს რეზონანსის პირობას:  $\dot{\theta} \approx \Omega$  და გავსაშუალოთ (3.22) ჰამილტონიანი სწრაფი ფაზით  $\theta$  [17].

$$\overline{x^4} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2I}{\sqrt{A}} \right)^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \left( \frac{2I}{\sqrt{A}} \right)^2 \frac{3}{8} = \frac{3}{2} \left( \frac{I}{\sqrt{A}} \right)^2,$$

$$H_{NL} = \overline{H_{NL}} = \frac{3}{2} B \left( \frac{I}{\sqrt{A}} \right)^2,$$

აქ გასაშუალოება ტოლფასია  $2\pi/A \approx 2\pi/\Omega$  დროებზე გასაშუალოების. ეს მცირე დროა ამ განხილვაში. ხოლო

$$\varepsilon V(x, t) = \varepsilon \sqrt{\frac{2I}{A}} \cos \theta \cos(\Omega t) = \varepsilon \sqrt{\frac{2I}{A}} \frac{1}{2} [\cos(\theta + \Omega t) + \cos(\theta - \Omega t)] =$$

$$= \varepsilon V(I) [\cos(\theta + \Omega t) + \cos(\theta - \Omega t)],$$

$$H(I, \varphi, t) = H_0^{NL} + \varepsilon V(I) \cos \varphi,$$

$$H_0^{NL} = \sqrt{AI} + \overline{H}_{NL}, \quad \overline{H}_{NL} = \frac{3}{2} \left( I/\sqrt{A} \right)^2 B, \quad V(I) = \left( I/2\sqrt{A} \right)^{1/2}$$

აქ შემოყვანილია ნელა ცვლადი ფაზა:  $\varphi = \theta - \Omega t$ , რომელიც  $\approx 2\pi/\Omega$  დროის განმავლობაში უმნიშვნელოდ იცვლება. რადგან  $\theta \approx \sqrt{At}$ , ეს შეესაბამება რეზონანსს:  $\Omega \approx \sqrt{A}$ . სწრაფი ფაზით გასაშუალოება შეესაბამება  $2\pi/\sqrt{A}$  მცირე დროებზე გასაშუალოებას. ამ დროებზე  $\varphi$  მცირედ იცვლება, ამიტომ

$$\overline{\varepsilon V(x, t)} = \varepsilon V(I, \varphi) = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{I}{2A}} \cos \varphi = \varepsilon V(I) \cos \varphi,$$

$$\overline{H(x, p, t)} = H(I, \varphi) = H_0^{NL} + \varepsilon V(I, \varphi),$$

$$H_0^{NL} = \sqrt{AI} + \overline{H}_{NL}.$$

მოძრაობის განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varphi} V(I, \varphi), \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial I} V(I, \varphi). \end{cases}$$

რეზონანსის პირობა სრულდება გარკვეული  $I_0$ -თვის, რომლის მნიშვნელობა გამოითვლება იმავე რეზონანსის პირობიდან:  $\dot{\varphi} \approx \omega(I_0)$ , სადაც

$$\omega(I) = \left( \frac{\partial H_0^{NL}}{\partial I} \right) - \Omega = \sqrt{A} - \Omega + \frac{\partial \overline{H}_{NL}}{\partial I} = \sqrt{A} - \Omega + 3B \frac{I}{A},$$

ხოლო ქმედების რეზონანსული მნიშვნელობა  $I_0$  გამოითვლება ტოლობიდან:

$$\sqrt{A} - \Omega + 3B \frac{I_0}{A} = 0$$

გადახრა ქმედების რეზონანსული მნიშვნელობიდან:  $\Delta I = I - I_0$ ,  $\Delta I \ll I_0$ , მხოლოდ ამ შემთხვევაში იქნება  $\varphi$  ნელი ფაზა.

თუ გავითვალისწინებთ  $V(I, \varphi)$ -ს გამოსახულებას, მაშინ მოძრაობის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon V(I) \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I)}{\partial I} \cos \varphi. \end{cases}$$

გავშალოთ მწკრივად  $\frac{\Delta I}{I_0} \ll 1$  ხარისხების მიხედვით და გავითვალისწინოთ რეზონანსის პირობა:  $\omega(I_0) = 0$ , მაშინ განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \Delta \dot{I} = \varepsilon V(I_0) \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega' \Delta I + \varepsilon \frac{\partial V(I)}{\partial I} \Big|_{I=I_0} \cos \varphi. \end{cases}$$

შევაფასოთ გაკეთებული მიახლოებები: გვაქვს  $V(I_0) \sim H_0 \sim I_0 \sqrt{A}$ ,

$$\frac{\Delta I_{\max}}{I_0} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon V(I_0) / \omega'}}{I_0} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon I_0 \sqrt{A}}{I_0^2 \omega'}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \ll 1. \text{ აქ შემოყვანილია არაწრფივობის}$$

უკანზომილებო პარამეტრი:  $\alpha \equiv \left( \frac{d\omega}{dI} \right) \frac{I_0}{\sqrt{A}}$ . არარეზონანსული წევრების გადაყრა

შეიძლებოდა, თუ არაწრფივი რეზონანსის სიგანე:  $\Delta \omega \approx \sqrt{\varepsilon V(I_0) \omega'} \ll \sqrt{A}$  და ფარდობითი სიგანე

$$\frac{\Delta \omega}{\sqrt{A}} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon V_0 \omega'}}{\sqrt{A}} = \sqrt{\frac{\varepsilon I \sqrt{A} \omega'}{A}} = \sqrt{\varepsilon \alpha} \ll 1.$$

უნდა გავაერთიანოთ ორი ტოლობა  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \ll 1$  და  $\sqrt{\varepsilon \alpha} \ll 1$ , გვექნება:

$\sqrt{\varepsilon} \ll \sqrt{\alpha} \ll 1/\sqrt{\varepsilon}$  ანუ  $\varepsilon \ll \alpha \ll 1/\varepsilon$ . ამ უკანასკნელი უტოლობის გათვალისწინებით შევაფასოთ მეორე წევრი ფაზის განტოლებაში:

$$\frac{\varepsilon \partial V(I) / \partial I}{\omega' \Delta I} \approx \frac{\varepsilon V(I_0) / I_0}{\omega' \Delta I} \approx \frac{\varepsilon \sqrt{A} I_0 / I_0}{\omega' \Delta I} = \frac{\varepsilon \sqrt{A} I_0}{\omega' \Delta I / I_0} \approx \frac{\frac{\varepsilon}{\alpha}}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \ll 1$$

მაშინ მოძრაობის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \Delta \dot{I} = \varepsilon V(I_0) \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega' \Delta I. \end{cases} \quad (3.23)$$

ხოლო ჰამილტონიანს ამ გაშლის შედეგების გათვალისწინებით ექნება შემდეგი სახე:

$$H = \frac{\omega'}{2} (\Delta I)^2 + V \cos \varphi, \quad (3.24)$$

სადაც:  $V = \varepsilon V(I_0)$ ,  $\omega' = \frac{d\omega}{dI} \Big|_{I=I_0}$ . მოცემული ჰამილტონიანი, რომელსაც უწოდებენ

უნივერსალურს, შეიძლება ადვილად შევამჩნიოთ, რომ ჰგავს საქანის ჰამილტონიანს, რომლის მასაა  $1/\omega'$ , ხოლო იმპულსი  $\Delta I$  და რომელიც მოთავსებულია სიმძიმის ველში აჩქარებით  $g \sim V$  სიდიდე  $1/\omega'$  წარმოადგენს სისტემის ინერტულობის ზომას: რაც უფრო მეტია  $1/\omega'$ , მით უფრო ძნელია დატუმბვის მეშვეობით სისტემის რეზონანსიდან გამოყვანა და პირიქით. თუ გავითვალისწინებთ, რომ კლასიკურ მექანიკაში საქანის ამოცანა იხსნება ზუსტად, მაშასადამე ჩვენი ამოცანა დავიდა



ზუსტად ამოხსნად ამოცანაზე. აქედან გამომდინარე ამონახსნი ქმედებისათვის შეგვიძლია დავწეროთ პირდაპირ:

$$\Delta I_+ = \sqrt{(E + \varepsilon V(I_0)) / \omega' dn(\sqrt{(E + \varepsilon V(I_0)) / \omega' t}; k)} \quad E > \varepsilon V(I_0) \quad (3.25)$$

(პერიოდით  $2K(1/k)$ );

$$\Delta I_- = \sqrt{(E + \varepsilon V(I_0)) / \omega' cn(\sqrt{(E + \varepsilon V(I_0)) / \omega' t}; 1/k)} \quad E < \varepsilon V(I_0) \quad (3.26)$$

(პერიოდით  $4K(1/k)$ );

სადაც  $E$  - ენერგიაა,  $cn$  და  $dn$  იაკობის ელიფსური ფუნქციებია (ელიფსური კოსინუსი და დელტა),  $K(k)$  - მეორე გვარის სრული ელიფსური ინტეგრალი. როცა  $E = \varepsilon \cdot V(I_0)$ , ან  $k \rightarrow 1$ , ეს ორი ამონახსნი ერთმანეთს უახლოვდება და ლებულობს ინსტანტონის სახეს:

$$\Delta I_+ \rightarrow \Delta I_- \rightarrow \sqrt{2\varepsilon V(I_0) / \omega' / ch(\sqrt{2\varepsilon V(I_0) / \omega' t})}$$

### 3.4. კვანტურ-მექანიკური განხილვა

წინა პარაგრაფის ბოლო ნაწილში ჩვენ შევძელით გვეჩვენებინა, რომ გარეშე ველის ზემოქმედების ქვეშ მყოფი კუნის მოლეკულის შესწავლა ურთიერთქმედების პოტენციალის გარკვეული სიმეტრიის შემთხვევაში ექვივალენტურია უნივერსალური ჰამილტონიანის შესწავლის (იხ.(3.24)).

ამ პარაგრაფის მიზანია ამოცანის კვანტურ-მექანიკური განხილვა დავწეროთ რა შრედინგერის სტაციონარულ განტოლებას

$$\hat{H} \psi_n = E_n \psi_n, \quad (3.27)$$

სისტემის კუნის მოლეკულა + დატუმბვა უნივერსალური ჰამილტონიანისათვის

$$\hat{H} = -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + V, \quad V = l \cos 2\varphi, \quad (3.28)$$

ვღებულობთ განტოლებას, რომელიც ფორმით ემთხვევა მათიეს განტოლებას [18]:

$$\frac{d^2 \Psi_n}{d\varphi^2} + (E_n - V(l, \varphi)) \Psi_n = 0 \quad (3.29)$$

აქ შემოტანილია განუზომელი სიდიდე  $E_n \rightarrow \frac{8E_n}{\hbar^2 \omega'}$ , სადაც  $l$  არის დატუმბვის

განუზომელი ამპლიტუდა,  $\omega' = \frac{d\omega(I)}{dI}$  არის არაწრფივი რხევის სიხშირის  $\omega(I)$

წარმოებული  $I$  ქმედებით.

მათიე-შრედინგერის განტოლების დამახასიათებელ თავისებურებას წარმოადგენს საკუთარ მნიშვნელობათა  $E_n(l)$  და საკუთარ ფუნქციათა  $\Psi_n(\varphi, l)$  სპექტრის სპეციფიკური დამოკიდებულება  $l$  პარამეტრზე [47].  $(E, l)$  სიბრტყეზე, რომელზედაც მოცემულია ამოცანის სპექტრალური მახასიათებლები, ეს სპეციფიკურობა ვლინდება გადაგვარებული  $G_{\pm}$  არეებისა და გადაუგვარებელი მდგომარეობების არეების მონაცვლეობაში (იხ. [48]). ამ არეებს შორის საზღვრები გადიან ენერგეტიკული თერმების  $E_n(l)$  განშტოების წერტილებზე.

დავუშვათ, რომ დატუმბვის ამპლიტუდა მოდულირებულია ნელადცვლადი ელექტრომაგნიტური ველით. მოდულაციის გავლენა შეიძლება გავითვალისწინოთ, თუ შრედინგერის განტოლებაში (3.3) მოვახდენთ შეცვლას

$$l(t) = l_0 + \Delta l \cos \nu t, \quad (3.30)$$

სადაც  $\Delta l$  არის მოდულაციის ამპლიტუდა განუზომელ ერთეულებში,  $\nu$  -მოდულაციის სიხშირე.

ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ  $l(t)$  ნელ ცვლილებას შეუძლია მოიცვას განშტოების წერტილების რაღაც  $N$  რაოდენობა სეპარატორის ხაზის მარცხნივ და მარჯვნივ (იხ.[48]). არ ჩავუღრმავდებით დეტალებს და მხოლოდ ავღნიშნავთ, რომ  $(E, l)$  სიბრტყეზე სხვადასხვა არეებს შეესაბამებიან სხვადასხვა საკუთარი ფუნქციები. დეტალები შეიძლება ვნახოთ [48]-ში.  $l(t)$  პარამეტრის მოდულაციის გამო სისტემა გადავა ერთი არედან მეორეში, გაივლის რა განშტოების წერტილებს.

ამგვარად გარკვეული პირობების შემთხვევაში: 1)სისტემაზე მოქმედებს ამპლიტუდა მოდულირებული ელექტრული ველი, 2) ურთიერთქმედების პოტენციალის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს, კერძოდ  $c = 3a$ , მაშინ ჩვენი ამოცანა ხდება სრულიად ანალოგიური [49]-ში შესწავლილი ამოცანის. აღნიშნულ ნაშრომში ნაჩვენებია იყო, რომ არაპირდაპირი გადასვლების ხარჯზე ხდება გარეშე ველი ენერჯის შთანთქმა და ყალიბდება კვანტური ქაოსი.

ყოველივე ზემოთქმულის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ არაწრფივ გიროტროპულ გარემოზე ამპლიტუდა მოდულირებული ველის ზემოქმედებისას მოსალოდნელია კვანტური ქაოსის ჩამოყალიბება.

### 3.5. კუნის მოდელის განზოგადება. ურთიერთქმედ ოსცილატორთა ჯაჭვი.

ჩვენ შემდგომ ამოცანას წარმოადგენს კუნის არაწრფივი მოდელის განზოგადება  $N$  ოსცილატორისაგან შემდგარი ჯაჭვის შემთხვევაში. ჩვენი მიზანია არაწრფივი გიროტროპული გარემო წარმოვადგინოთ, როგორც ურთიერთქმედ არაწრფივ ოსცილატორთა ერთობლიობა. საკითხი, რომელიც ჩვენ გვაინტერესებს არის შემდეგი: როგორ გავრცელდება ასეთ გარემოში საწყისი შეშფოთება და ახასიათებს თუ არა სისტემას სოლიტონური ამონახსნები?

ადიაბატურ მიახლოებაში  $N$  ოსცილატორისაგან შემდგარ ჰამილტონიანს ექნება შემდეგი სახე:

$$H = \sum_n \left( \frac{P_n^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} x_n^2 + \frac{a}{4} x_n^4 \right) + \sum_n \left[ \alpha x_n x_{n+1} + \frac{c}{2} x_n^2 x_{n+1}^2 + b(x_n x_{n+1}^3 + x_n^3 x_{n+1}) \right] \quad (3.31)$$

ჩვენ ვიხილავთ ამოცანას ფიქსირებული სასაზღვრო პირობებით:

$$x_0 = x_{N+1} = 0, \quad \dot{x}_0 = \dot{x}_{N+1} = 0.$$

ადვილი დასანახია, რომ (4.1) ჰამილტონიანის შესაბამის მოძრაობის განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\ddot{x}_n = -[\omega_0^2 x_n + \alpha x_n^3 + \alpha(x_{n+1} + x_{n-1}) + c(x_{n-1}^2 x_n + x_n^2 x_{n+1}^2) + b(3x_{n-1}^2 x_n^2 + x_{n-1}^3) + b(x_{n+1}^3 + 3x_n^2 x_{n+1})]. \quad (3.32)$$

შემდგომი გამოთვლების საწარმოებლად ხელსაყრელია შემოვიყვანოთ პაკეტური ფუნქცია  $\psi_i(t) = (-1)^i x_i(t)$  [50,51], რომელიც წარმოადგენს  $i$ -ური კოორდინატის ფუნქციას. ვგულისხმობთ, რომ პაკეტური ფუნქცია არის  $i$ -ინდექსზე გლუვად დამოკიდებული ფუნქცია. ეს საშუალებას მოგვცემს გადავიდეთ დისკრეტული ცვლადიდან  $x_i(t)$  უწყვეტ ცვლადზე:  $x = l \cdot i$ , სადაც  $l$  არის მესერის პერიოდი. გამოვიყენოთ უწყვეტი ცვლადის ფუნქციის ტეილორის მწკრივად გაშლის ფორმულა:

$$\psi(x \pm l) = \psi(x) + \psi_x(x)(\pm l) + \frac{1}{2}\psi_{xx}(x)l^2 + \frac{1}{6}\psi_{xxx}(x)(\pm l)^3 + \dots \quad (3.33)$$

(3.32) ფორმულის ჩასმით (3.33)-ში, და უფრო მაღალი რიგის წევრების უგულვებლყოფით, ვღებულობთ:

$$\psi_{tt} + (\omega_0^2 - 2\alpha)\psi + (7a - 8b)\psi^3 - [\alpha + (6b - 2c)\psi^2]\psi_{xx} - (6b - 2c)\psi\psi_x^2 = 0 \quad (3.34)$$

შემდგომი გამარტივების მიზნით დავუშვათ, რომ სისტემას გააჩნია გარკვეული სიმეტრია. კერძოდ, ვივარაუდოთ, რომ ანჰარმონიული წევრების კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:  $a = b = 3c$ . (3.34) განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ მბრუნავი ტალღის მიახლოება (RWA) [50,51]. კერძოდ, ამონახსენი ვეძებთ შემდეგი სახით:  $\psi(x,t) = \psi(x)\cos\omega t$  და უგულვებლვყოთ  $\omega$ -ს ჯერადი არგუმენტების მქონე წევრები. შედეგად (4.4) გამოსახულებიდან მივიღებთ:

$$(\omega_0^2 - 2\alpha - \omega^2)\psi - \frac{3}{4}b\psi^3 - \alpha\psi_{xx} = 0 \quad (3.35)$$

ვაჩვენოთ, რომ (4.5) განტოლებას აქვს ზუსტი ანალიზური ამონახსენი, რომელიც წარმოადგენს  $x$  ცვლადის პერიოდულ ფუნქციას. ამისათვის (4.5) განტოლება გავამრავლოთ  $\psi_x$ -ზე და ერთხელ ვაინტეგრირებთ. შედეგად მივიღებთ

$$\left( \frac{\omega^2 + 2\alpha - \omega_0^2}{\alpha} \right) \psi^2 + \frac{3b}{8\alpha} \psi^4 + \psi_x^2 = C_1 \quad (3.36)$$

(3.36) განტოლების შემდგომი ანალიზისას ჩვენ ვიხეიმდვანელებთ [51] ნაშრომით.

ვანორმირებთ  $\psi(x)$  ფუნქციას მის მაქსიმალურ მნიშვნელობაზე:

$\psi_m = \psi_{\max}$ ,  $f(x) = \frac{\psi(x)}{\psi_m}$  და გადავწეროთ განტოლება ისეთი ფორმით, რომელიც

ემთხვევა გარეშე ველში მოთავსებული ერთეულოვანი მასის მქონე ნაწილაკის ენერჯის შენახვის კანონს:

$$H = \frac{f_x^2}{2} + U(f), \quad (3.37)$$

სადაც,  $U(f) = -\frac{3b}{16\alpha} \psi_m^2 (1 - f^2)(C_2 + f^2)$  (3.38)

და  $C_1 = \left( \frac{\omega^2 + 2\alpha - \omega_0^2}{\alpha} + \frac{3b}{8\alpha} \psi_m^2 \right) \psi_m^2$ ,

$$C_2 = \frac{C_1}{\left( \frac{3b}{8\alpha} \psi_m^2 \right)}. \quad (3.39)$$

(3.37) განტოლების ამონახსნები დამოკიდებულია  $C_2$  კონსტანტის მნიშვნელობაზე.

ნაშრომში [51] ნაჩვენებია იყო, რომ  $C_2 > 0$  შემთხვევაში ფუნქცია წარმოადგენს  $x$  ცვლადის მიმართ ოსცილირებად ფუნქციას, რომელიც ოსცილირებს მინიმალურ ( $-\psi_m$ ) და მაქსიმალურ ( $\psi_m$ ) მნიშვნელობებს შორის.  $C_2 = 0$  შეესაბამება სეპარატრისულ ამონახსნს, რომელიც წარმოადგენილია განმზოლოებული ლოკალიზებული ბრიზერით, რომლისთვისაც  $\psi(x) \rightarrow 0$ , როცა  $x \rightarrow \pm\infty$ . მესამე შემთხვევა ( $C_2 < 0$ ) შეესაბამება ამონახსნს, რომელიც იცვლება არანულოვან მნიშვნელობებს  $\psi_{\max}$  და  $\psi_{\min}$  შორის.

იმისათვის, რომ დაკმაყოფილდეს სასაზღვრო პირობები (ნულოვანი წანაცვლება  $x = 0$  და  $x = N + 1$  წერტილებში), საჭიროა ავიღოთ პირველი შემთხვევა ( $C_2 > 0$ ) [51], რადგან მხოლოდ ამ შემთხვევაში შეიძლება სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილება. ამ ოსცილირების სივრცული პერიოდი მოიცემა შემდეგი გამოსახულებით [22]:

$$\int_0^1 df \left( \frac{df}{dx} \right)^{-1} = \Lambda / 4 \quad (3.40)$$

ნულოვანი სასაზღვრო პირობა  $x = N + 1$  წერტილში კმაყოფილდება ავტომატურად, თუ ნახევარტალა  $\Lambda / 2$  არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი  $(\Lambda / 2)n = N + 1$ , სადაც  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . (3.40) დისპერსიული თანაფრდობა განსაზღვრავს  $\omega$  სიხშირეთა სპექტრს, როგორც  $n$ -ის და  $\psi_m$ -ს ფუნქციას. თუ (3.37)-დან გამოვსახავთ  $f_x$ -ს და ჩავსვათ (3.40)-ში, ახალ ცვლადზე:  $\sin \alpha = f$  გადასვლის შედეგად (3.40) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I(r, \psi_m) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{(\sin^2 \alpha + r^2)^{1/2}} = \sqrt{\psi_m^2 \frac{3b}{16\alpha} \left( \frac{N+1}{2n\pi} \right)^2} \quad (3.41)$$

აქ ჩვენ გავაკეთეთ ჩასმა:  $\Lambda / 4 = (N + 1) / 2n$  და შემოვიტანეთ აღნიშვნა კოეფიციენტი  $r^2 = C_2$ . (3.37) და (3.41) ფორმულების გამოყენებით სივრცული პროფილის ფუნქციისათვის საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3b}{16\alpha} \psi_m^2}} \int_0^{\arcsin(\psi / \psi_m)} \frac{d\alpha}{(\sin^2 \alpha + r^2)^{1/2}}, \quad (3.42)$$

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ბრიზერის ტიპის ამონახსნი შეესაბამება პირობას  $r^2 = 0$ . ეს პირობა ფაქტიურად განსაზღვრავს ბრიზერის სიხშირეს როგორც ამპლიტუდის ფუნქციას:

$$\omega_B^2 = \omega_0^2 - 2\alpha - \frac{3b}{8} \psi_m^2 \quad (3.43)$$

თუ (3.43) გამოსახულებაში გავითვალისწინებთ პირობას  $r^2 = 0$ , შედეგად მივიღებთ:

$$x(f) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3b}{16\alpha} \psi_m^2}} \int_0^{\arcsin f} \frac{d\alpha}{\sin \alpha}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$\psi_B(x) = \psi_m \cosh^{-1} \left( \sqrt{\frac{3b}{16\alpha} \psi_m^2 x} \right) \quad (3.44)$$

(3.43) და (3.44) ფორმულებზე დაყრდნობით შეიძლება დავასკვნათ, რომ არაწრფივ გიროტროპულ გარემოში აგზნებები, რომელთა გავრცელების სიხშირე განისაზღვრება ფორმულით (3.43), გავრცელების პროცესში დარჩება სივრცულად ლოკალიზებული.

### 3.6 კუნის მოდელის ოსცილატორებისაგან შემდგარი არაწრფივი ჯაჭვის იმპულსითი რხევები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ იმ შემთხვევას, როცა განზოგადებული კუნის მოდელის აღმწერი განტოლება არ არის ზუსტად ინტეგრებადი. აღნიშნული მოდელის არაწრფივობიდან გამომდინარე მოსალოდნელია, რომ სისტემას ჰქონდეს ქაოსური ამონახსნები. ნაჩვენები იქნება, რომ მიუხედავად ინდივიდუალური ოსცილატორების ქაოსური დინამიკისა, ასეთ ოსცილატორთა ჯაჭვი ინარჩუნებს კოჰერენტულობას.

ამ შემთხვევაში როცა გვაქვს კუნის ოსცილატორთა ჯაჭვი, სისტემის აღმწერ ჰამილტონიანს, როგორც წინა პარაგრაფში იყო მოცემული აქვს (3.31) სახე:

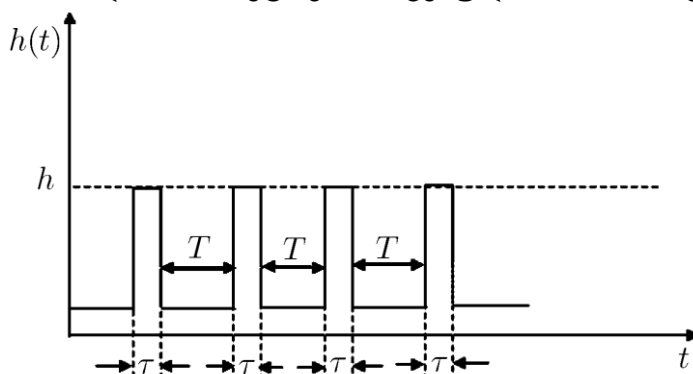
$$H = \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} x_n^2 + \frac{a}{4} x_n^4 \right) + \sum_n \left[ a x_n x_{n+1} + \frac{c}{2} x_n^2 x_{n+1}^2 + b (x_n x_{n+1}^3 + x_n^3 x_{n+1}) \right].$$

ჩვენი მიზანია ჩავატაროთ აღნიშნული განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ანალიზი ანჰარმონიული  $a, b, c$  კოეფიციენტების იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელთა შესაბამისი ჰამილტონიანი არ არის ზუსტად ინტეგრებადი. ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა აღნიშნული გიროტროპიული გარემო განიცდის გარეშე ელექტრომაგნიტური ველის ზემოქმედებას და გავითვალისწინებთ ენერჯის დისიპაციას (შთანთქმის ფენომენოლოგიური კოეფიციენტის შემოყვანით [52]). ზემოთქმულის გათვალისწინებით, აღნიშნული სისტემის მოძრაობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n = & -\omega_0^2 x_n - a x_n^3 - x_{n+1} - x_{n-1} - c(x_{n-1}^2 x_n + x_n x_{n+1}^2) - \\ & - b(3x_{n-1} x_n^2 + x_{n-1}^3) - b(x_{n+1}^3 + 3x_n^2 x_{n+1}) - \Gamma \dot{x}_n + \delta_{1,n} \omega^2 g(t), \end{aligned} \quad (3.45)$$

სადაც,  $\Gamma$  შთანთქმის ფენომენოლოგიური კოეფიციენტია,  $g(t)$  გარეშე ძალა და  $\delta_{1,n}$  კრონეკერის სიმბოლო.

მოცემულ განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ანალიზი ჩატარებული იქნა ორი ტიპის გარეშე ძალისათვის. პირველ შემთხვევაში გარეშე ზემოქმედება იყო ჰარმონიული ანუ  $g(t) = \cos(t)$  ფორმის, ხოლო მეორე შემთხვევაში პერიოდული იმპულსური ფორმის, რომლის პარამეტრები მოცემულია ნახ. 3.8-ზე.

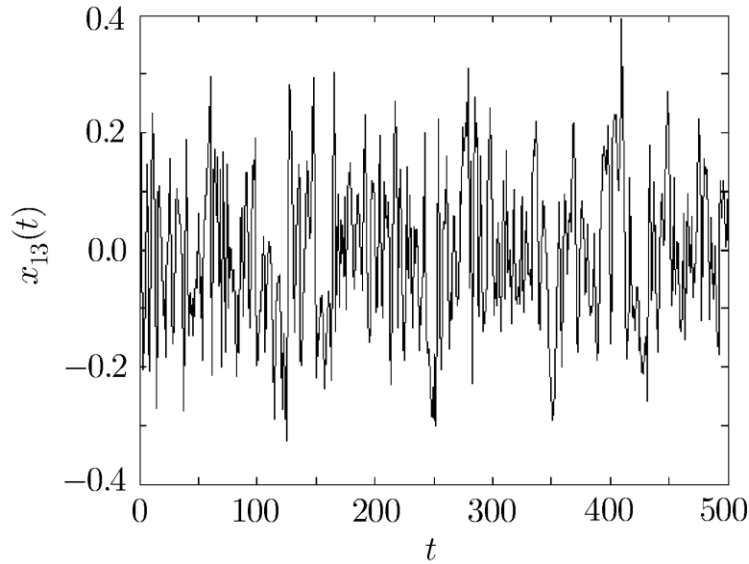


ნახ.3.8 სისტემაზე მოქმედი გარეშე პერიოდული ძალა  $\Omega = 2\pi/T$ ,  $T \ll \tau$

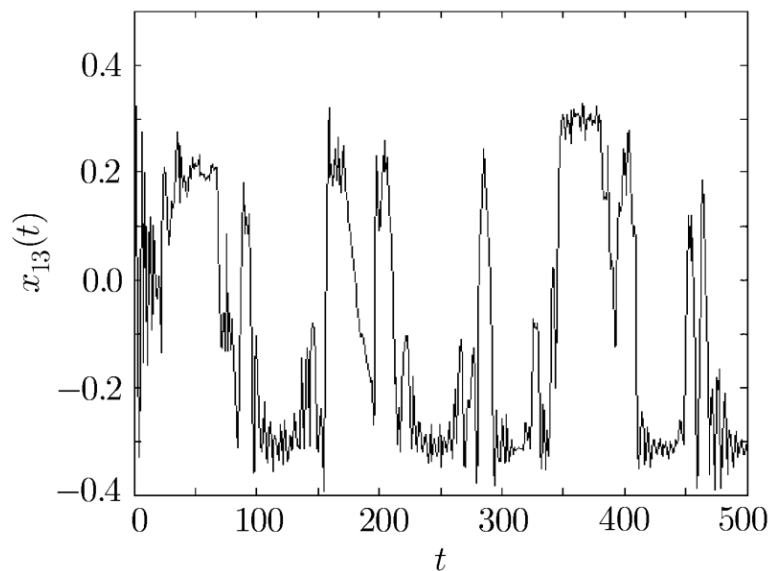
მეორე შემთხვევაში სიტემა იმყოფება პოლიქრომატული დატუმბვის ზემოქმედების ქვეშ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - Tn) = \frac{\tau}{T} \sum_{k=-1/\tau}^{1/\tau} \cos(k\Omega t), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.46)$$

და ამ შემთხვევაში შესაძლოა ადგილი ჰქონდეს არაწრფივი რეზონანსის მოვლენას [53]. როგორც რიცხვითმა გამოთვლებმა გვიჩვენეს, ორივე შემთხვევაში ამოხსნები არის ქაოსური. (იხ ნახ.3.9 ნახ.3.10)



ნახ. 3.9. (3.45) სისტემის რიცხვითი ინტეგრების შედეგად მიღებული  $x_{13}(t)$  გრაფიკი მონოქრომატული დატუმბვის დროს პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობისათვის:  $\omega_0=3.0$ ,  $\Gamma = 0.1$ ,  $a = 3.0$ ,  $b = 2.5$ ,  $c = 2.0$ .

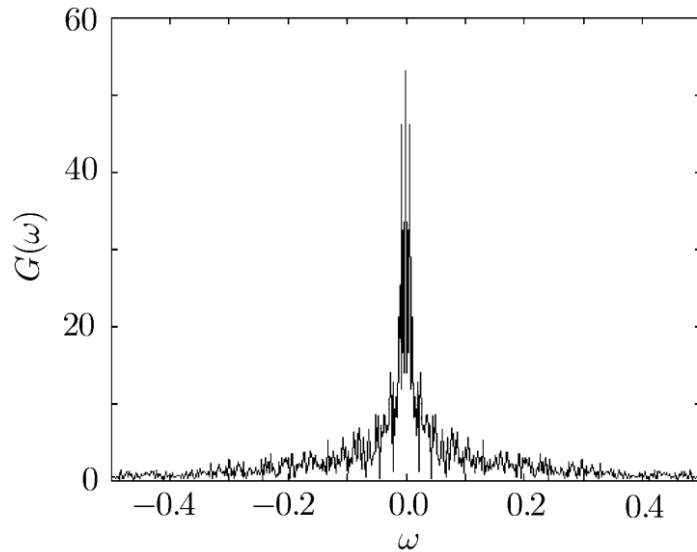


ნახ. 3.10 (3.45) სისტემის რიცხვითი ინტეგრების შედეგად მიღებული  $x_{13}(t)$  გრაფიკი პოლიქრომატული დატუმბვის დროს პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობისათვის:  $\omega_0=3.0$ ,  $\Gamma = 0.1$ ,  $a = 3.0$ ,  $b = 2.5$ ,  $c = 2.0$ .

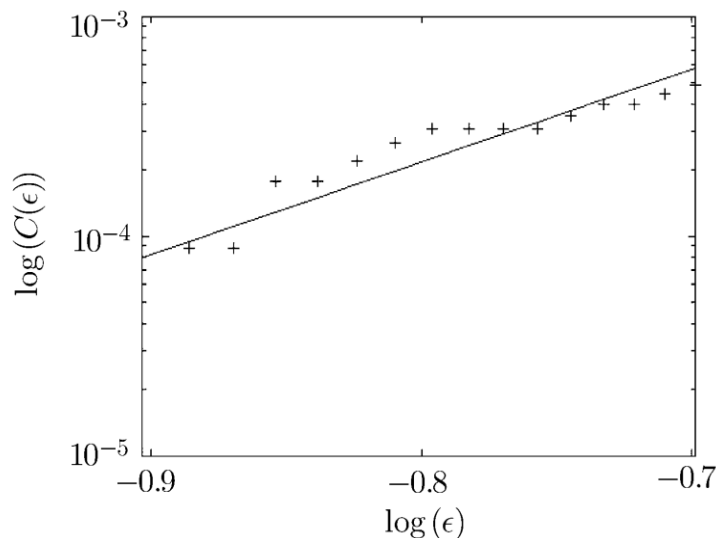
კორელაციის  $G(\tau) = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle$  ფუნქციის ფურიე სახე  $G(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} G(\tau) d\tau$

მოცემულია ნახ. 3.11 -ზე. როგორც აღნიშნული ნახაზიდან ჩანს კორელაციის ფუნქციას აქვს სასრული სიგანე და მაშასადამე ადგილი აქვს ქაოსს.,

მოცემული სისტემის ფაზური სივრცის ფრაქტალური განზომილების დასადგენად ვისრაგებლეთ ზემოთ არწერილი გრასბერგერ-პროკაჩიას ალგორითმით. რიცხვითი გამოთვლის შედეგები მოცემულია ნახ. 3.12-ზე. ხოლო ფრაქტალური განზომილებისათვის მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელობა:  $D \approx 4.229$ .



ნახ. 3.11. კორელაციის ფუნქციის ფურიე სახე პოლიქრომატული დატუმბვის შემთხვევაში პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის  $\omega_0=3.0$ ,  $\Gamma = 0.1$ ,  $a = 3.0$ ,  $b = 2.5$ ,  $c = 2.0$ .



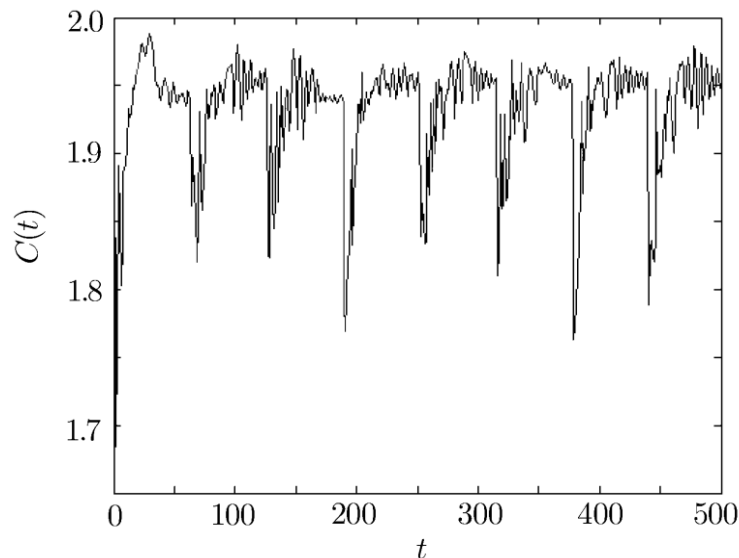
ნახ. 3.12.  $C(\epsilon)$  დამოკიდებულება მოცემულია ლოგარითმულ მასშტაბში გრასბერგერ პროკაჩიას ალგორითმის გამოყენებით პოლიქრომატული დატუმბვის შემთხვევაში პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის  $\omega_0=3.0$ ,  $\Gamma = 0.1$ ,  $a = 3.0$ ,  $b = 2.5$ ,  $c = 2.0$ . უწყვეტი ხაზი წარმოადგენს უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებულ მონაცემთა დამუშავების

შედეგს.

როგორც ამ პარაგრაფის შესავალში იყო აღნიშნული, ჩვენს მიზანს წარმოადგენს იმის ნაჩვენები, რომ მიუხედავად ინდივიდუალური ოსცილატორების ქაოსური დინამიკისა, ასეთ ოსცილატორთა ჯაჭვი ინარჩუნებს კოჰერენტულობას როგორც მთლიანი სისტემა. ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია [54]:

$$C(t) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^N \cos(x_i(t) - x_j(t)) . \quad (3.47)$$

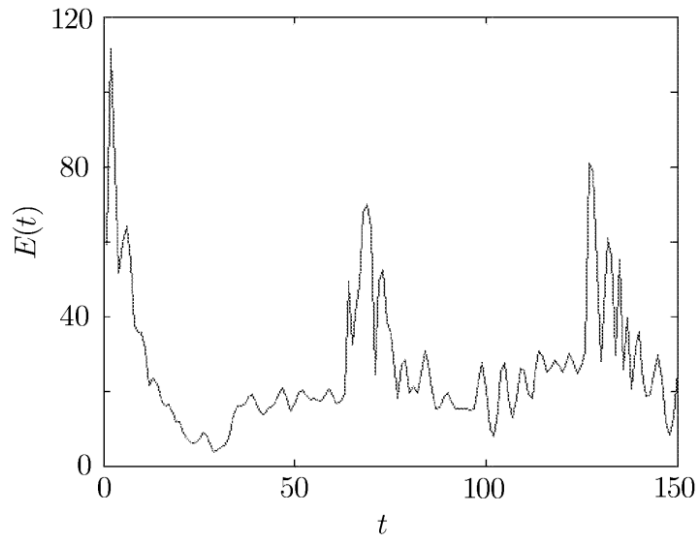
რომელიც გვიჩვენებს მოცემულ ჯაჭვში  $x_i(t)$  ოსცილატორების რხევათა კოჰერენტულობას. რიცხვითი გამოთვლების შედეგები მოცემულია ნახ.3.13-ზე. როგორც ნახაზიდან ნათლად ჩანს,  $C(t)$  ფუნქციის ქაოსური ხასიათის მიუხედავად, სისტემა ინარჩუნებს კოჰერენტულობას იმდენად რამდენადაც  $C(t)$  ფუნქცია არ ქრება [54].



ნახ. 3.13  $C(t)$  დამოკიდებულება პოლიქრომატული დატუმბვის შემთხვევაში პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობისათვის  $\omega_0=3.0$ ,  $\Gamma = 0.1$ ,  $a = 3.0$ ,  $b = 2.5$ ,  $c = 2.0$ .

კიდევ ერთი ფაქტი რაც ადასტურებს ცალკეულ ქაოტურად მერხევ ოსცილატორებს შორის კოჰერენტულობის არსებობას გახლავთ სისტემის ენერჯის დროზე დამოკიდებულება, რაც ნაჩვენებია ნახ.3.14-ზე. აღნიშნული  $E(t)$  ენერჯის დროზე დამოკიდებულება მიღებულია (3.45) განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ინტეგრების შედეგად.





ნახ. 3.14  $E(t)$  დამოკიდებულება პოლიქრომატული დატუმბვის შემთხვევაში პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობისათვის  $\omega_0=3.0$ ,  $\Gamma = 0.1$ ,  $a = 3.0$ ,  $b = 2.5$ ,  $c = 2.0$ .

როგორც ნახ.3.14-დან ჩანს ენერჯის შთანთქმის შემდეგ, სისტემა ასხივებს ენერჯიას და უბრუნდება პირითად (არა ალგუნებულ ) მდგომარეობას. ამავე დროს ენერჯის მნიშვნელობის უეცარი ვარდნა ადასტურებს გამოსხივების კოჰერენტულობას. აღნიშნული მოვლენა უფრო დეტალურად განხილული იქნება შემდეგ პარაგრაფში.

### 3.7. რხევათა ფაზის კოჰერენტულობა და ენერჯის აღდგენა

როგორც წინა პარაგრაფში იყო ნაჩვენები ცალკეული ოსცილატორების რხევთა ამპლიტუდები  $x_i(t)$  დროის ქაოსურ ფუნქციას წარმოადგენენ. ეს განპირობებულია ოსცილატორებს შორის ურთიერთქმედების არაწრფივობით. აღნიშნული ურთიერთქმედება შეიძლება გათვალისწინებულ იქნას სვა სახითაც, კეძოდ გასაშუალოებული ველის მეთოდის გამოყენებით [55] ამ შემთხვევაში ოსცილატორთა ჯაჭვის ნაცვალად უნდა განვიხილოთ ერთი ოსცილატორი, რომელიც მოთავსებულია ჯაჭვში არსებული ოსცილატორების მიერ წარმოშობილ გასაშუალოებულ შემთხვევით გარეშე ველში. ამ შემთხვევაში განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\ddot{x}_n = -\omega_0^2(t)x_n - \Gamma\dot{x}_n - ax_n^3 - \beta_1(t)x_n^2 - \beta_2(t), \quad (3.48)$$

სადაც  $\omega_0(t) = \sqrt{\omega_0^2 + c(x_{n-1}^2 + x_{n+1}^2)}$  არის შემთხვევითი სიხშირე, ხოლო  $\beta_1(t) = 3b(x_{n-1} + x_{n+1})$  და  $\beta_2(t) = 3b(x_{n-1}^3 + x_{n+1}^3) + x_{n-1} + x_{n+1} - \delta_{1,n}q(t)$  დროის შემთხვევითი ფუნქციებია. შემგომში ჩავთვლით, რომ (3.48) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები დროის შემთხვევითი ფუნქციებია  $x_n(t) \equiv x(t)$ , რომლებიც უნდა მოვძებნოთ შემდეგი სახით:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (3.49)$$

სადაც  $a_n$  და  $\phi_n$  შემთხვევითი ამპლიტიდები და ფაზებია, რომლებიც აღიწერებიან გარკვეული განაწილების ფინქციების მეშვეობით.

ჩვენ დავიწყებთ (3.48) განტოლების განხილვას მარტივი შემთხვევიდან, როცა ყველა ამპლიტუდა ერთმანეთის ტოლია  $a_n = a_0$  და გავითვალისწინოთ გასაშუალოებული ველის გავლენა შემთხვევითად ცვლად ფაზაზე  $\phi_n \equiv \phi(t)$ . (3.49) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} \exp[i(\omega_0 t + \phi(t))] + c.c. \quad (3.50)$$

$\langle x \rangle$  რხევათა ამპლიტუდის საშუალო სიდიდისა და ფაზით მოდულირებული (3.50) რხევების კორელაციის ფუნქციის  $G(\tau) = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle$  გამოთვლა დაიყვანება შემდეგი სიდიდეების გასაშუალოებაზე:  $\langle e^{i\phi} \rangle$ ,  $\langle e^{i(\phi \pm \phi_\tau)} \rangle$ , სადაც  $\phi_\tau = \phi(t+\tau)$ . მაგალითად

$$\langle x \rangle = \frac{a_0}{2} e^{i\omega_0 t} \langle e^{i\phi} \rangle + c.c. \quad (3.51)$$

დავუშვათ, რომ  $\phi(t)$  აღიწერება გაუსის განაწილების ფუნქციით:

$$\langle \phi \rangle = 0,$$

$$\langle \phi(t)\phi(t+\tau) \rangle = B_0(t) = \sigma^2 R_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (3.52)$$

მაშინ

$$\langle e^{i\phi} \rangle = e^{-\sigma^2/2}, \quad \langle e^{i(\phi \pm \phi_\tau)} \rangle = e^{-\sigma^2[1 \pm R_0(\tau)]}, \quad (3.53)$$

და (3.50) განტოლების გასაშუალოებით მივიღებთ:

$$\langle x \rangle = a_0 e^{-\sigma^2/2} \cos(\omega_0 t), \quad (3.54)$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = \frac{a_0^2}{2} [1 + e^{-\sigma^2} \cos(2\omega_0 t)]. \quad (3.55)$$

(3.50) ფაზით მოდულირებული რხევების ფლუქტუირებადი  $\xi(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle$  კომპონენტისათვის მივიღებთ:

$$B(t, \tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \frac{a_0^2}{2} e^{-\sigma^2/2} [e^{B_0(\tau)} - 1] [\cos(\omega_0 \tau) - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)]. \quad (3.56)$$

როგორც (3.52) ~ (3.56) განტოლებებიდან ჩანს განხილულ შემთხვევაში, (3.50) ფაზით მოდულირებული რხევა არ წარმოადგენს შემთხვევით სტაციონარულ პროცესს, რადგან მისი სტატისტიკური მახასითებლები დროის ფუნქციებია. თუ ავღნიშნავთ (...) დროის მიხედვით გასაშუალოების ოპერაციას, მაშინ (3.56) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\overline{B(\tau)} = \frac{a_0^2}{2} e^{-\sigma^2/2} [e^{B_0(\tau)} - 1] \cos(\omega_0 \tau). \quad (3.57)$$

(3.54) განტოლების გათვალისწინებით, (3.50) ფაზით მოდულირებული რხევების სპექტრი შესდგება დისკრეტული მატარებელი  $\omega_0$  სიხშირეებისაგან, რომელთა ინტენსივობა

$$I = \frac{a_0^2}{2} e^{-\sigma^2/2}, \quad (3.58)$$

და (3.57) განტოლების გათვალისწინებით ფლუქტუაციების უწყვეტი სპექტრისაგან:

$$G(\omega) = \frac{a_0^2}{8\pi} e^{-\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{B_0(\tau)} - 1] [e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} + e^{i(\omega_0 + \omega)\tau}] d\tau. \quad (3.59)$$

რადგან  $x$  არაწრფივად დაძვინდებული  $\phi$ -ზე, ამიტომ რხევების ამპლიტუდას  $x(t)$ , ზოგადად, აქვს განსხვავებული სახე  $\phi(t)$  მოდულირებული ხმაურის სპექტრთან შედარებით. ამ სიდიდეთა ბუნებაც განსხვავებულია. გავიხსენოთ, რომ  $x(t)$  აღწერს ჯაჭვის ოსცილატორთა მიერ შექმნილ გასაშუალოებულ შემთხვევით ველში მოთავსებული ოსცილატორის ქაოსურ რხევებს. გასაშუალოებული შემთხვევითი ველის გავლენა გათვალისწინებულია  $\phi(t)$  ხმაურში. წანა პარაგრაფში ნაჩვენებია იქნა, რომ აღნიშნული სისტემა, როგორც მთლიანი ხასიათდებოდა კოჰერენტულობით (იხილეთ ნახ.3.12). ამიტომ სიდიდეები, რომლებიც აღწერენ ოსცილატორების ჯაჭვის კოლექტიურ რხევებს (მაგალითად გასაშუალოებული ველი) უნდა ხასიათდებოდნენ ნაკლები ქაოტურობით, ვიდრე სიდიდეები, რომლებიც აღწერენ ცალკეული ოსცილატორის რხევებს. ეს ნიშნავს, რომ  $\phi(t)$  ხმაურის სიგანე უნდა იყოს უფრო ვიწრო ვიდრე (3.59) განტოლებით მოცემული  $x(t)$  ფლუქტუაციის უწყვეტი სპექტრის სიგანე.

დავუშვათ, რომ  $\sigma_0$  სიდიდე აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\sigma_0^2 > 1. \quad (3.60)$$

მაშინ (3.59) განტოლებაში ფუნქცია  $\exp[B_0(t)]$  სწრაფად ეცემა როდესაც  $t$  სცილდება ნულოვან მნიშვნელობას. ვთქვათ, რომ

$$B_0(\tau) \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \tau^2, \quad (3.61)$$

მაშინ

$$e^{B_0(\tau)} - 1 \approx e^{\sigma_0^2(1-\alpha^2\tau^2)}, \quad \alpha^2 = |B_0(0)|, \quad (3.62)$$

და (3.59) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$G(\omega) = \frac{\alpha_0^2}{4\alpha\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-(\omega_0-\omega)^2/2\alpha^2\sigma_0^2} + e^{-(\omega_0+\omega)^2/2\alpha^2\sigma_0^2} \right]. \quad (3.63)$$

ამრიგად ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ  $G(\omega)$  (3.63) სპექტრი უფრო განიერია ვიდრე (3.52)  $\phi(t)$  სპექტრი. მართლაც (3.52), (3.62), და (3.63) განტოლებების თანახმად ჩვენ გვაქვს შემდეგი თანაფარდობები:

$$\Delta\omega_\phi \sim \alpha, \quad \Delta\omega_x \sim \alpha\sigma_0, \quad \frac{\Delta\omega_x}{\Delta\omega_\phi} \sim \sigma_0 > 1. \quad (3.64)$$

ამრიგად, როგორც (3.64) თანაფარდობებიდან ჩანს, (3.50) ფაზით მოდულირებულ ბმულ ოსცილატორთა სისტემას შეიძლება გააჩნდეს გარკვეული კოჰერენტულობა. აღნიშნული კოჰერენტულობა მქლავნდება იმგვარად, რომ სიდიდეები, რომლებიც აღწერენ სისტემას როგორც მთლიანს (მაგალითად გასაშუალოებული ველი) ხასიათდებიან ნაკლები ქაოტურობით, ვიდრე ცალკეული ოსცილატორების რხევების დამახასიათებელი დინამიკური სიდიდეები. შედეგად ვღებულობთ (3.64) თანაფარდობებს.

გადავიდეთ ახლა უფრო ზოგადი (3.49) შემთხვევის განხილვაზე. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ, ზოგად შემთხვევაშიც, როცა  $a_n$  ამპლიტუდები არ არიან ერთმანეთის ტოლი, მაშინ განაწილების  $W(x)$  ფუნქცია არის გაუსის ტიპის. (3.49) შემთხვევითი პროცესის  $W(x)$  განაწილების ფუნქციის განსაზღვრის მოსახერხებელი გზაა მისი მახასიათებელი ფუნქციის შეფასება:

$$\theta(v) = \langle e^{ixv} \rangle. \quad (3.65)$$

(3.49) განტოლების ჩასმა უკანასკნელ თანაფრდობაში მოგვცემს შემდეგ გამოსახულებას:

$$\theta(v) = \left\langle \exp \left[ i v \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \right] \right\rangle = \prod_{n=1}^N \theta(v a_n), \quad (3.66)$$

სადაც  $\theta(v a_n)$  ერთი მოდის მახასიათებელი ფუნქციაა:

$$\theta(v a_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i v a_n \cos(\omega_n t + \phi_n)) d\phi_n. \quad (3.67)$$

გამოვიყენოთ ქაოსური ფაზების მიახლოება [56] (3.67) გამოსახულების გამარტივების მიზნით. დავუშვათ, რომ ფაზები არიან განაწილებულნი თანაბრად, განაწილების ფუნქციის:

$$W(\phi_n) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \phi_n \leq \pi. \quad (3.68)$$

შესაბამისად. (3.68) განტოლების გათვალისწინებით, (3.67) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\theta(v a_n) = J_0(v a_n). \quad (3.69)$$

სადაც  $J_0(x)$  ნამდვილი არგუმენტის ნულოვანი რიგის ბესელის ფუნქციაა [57].

(3.69) თანაფრდობიდან შეიძლება განვსაზღვროთ  $W(x)$  განაწილების ფუნქცია ფურიე გარდაქმნის მეშვეობით:

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(v) e^{-i v x} dv, \quad (3.70)$$

(3.6) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ  $x$  სიდიდე მოთავსებულია ინტერვალში:

$$-A \leq x \leq A, \quad (3.71)$$

$$A = \sum_{n=1}^N a_n. \quad (3.72)$$

ამრიგად

$$W(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-i \frac{\pi k}{A} x\right), \quad (3.73)$$

სადაც  $c_k$  კოეფიციენტები განისაზღვრება შემდეგი თანაფრდობიდან:

$$c_k = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A W(x) \exp\left(i \frac{\pi k}{A} x\right) dx = \frac{1}{2A} \left\langle \exp\left(i \frac{\pi k}{A} x\right) \right\rangle. \quad (3.74)$$

უკანასკნელი თანაფრდობა ნიშნავს, რომ  $c_k$  კოეფიციენტები  $x$  პროცესის მახასიათებელი ფუნქციაა  $(2A)^{-1}$  მამრავლის გათვალისწინებით.

ამრიგად განაწილების  $W(x)$  ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi k x}{A}\right) \prod_{n=1}^N J_0\left(\frac{\pi k a_n}{A}\right) \right]. \quad (3.75)$$

დიდი  $N$ -თვის (3.75) განაწილების  $W(x)$  ფუნქცია იქნება გაუსის ტიპის [58].

ამის დასამტკიცებლად, ჩვენ გვინდა უპირველეს ყოვლისა შემდეგი ფუნქციის განაწილების ფუნქციის ფორმულირება:

$$\eta(t) = N^{-1/2} x(t). \quad (3.76)$$

სიმარტივისათვის ისევ დავუშვათ, რომ მოდების ამპლიტუდები ერთმანეთის ტოლია  $a_n = a$ .  $\eta(t)$  შემთხვევითი პროცესის მახასიათებელი ფუნქცია

$$\theta_\eta(\nu) = J_0^N\left(\frac{a\nu}{\sqrt{N}}\right). \quad (3.77)$$

ბესელის ფუნქცია გავშალოთ მწკრივად [57]:

$$J_0\left(\frac{a\nu}{\sqrt{N}}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(a\nu)^{2k}}{2^{2k} N^k (k!)^2}. \quad (3.78)$$

თუ გადავალთ ზღვარზე  $N \gg 1$ , შედეგად მივიღებთ:

$$\ln \theta_\eta(\nu) \approx -\frac{(a\nu)^2}{4} + \frac{(a\nu)^4}{64N}, \quad (3.79)$$

$$\theta_\eta(\nu) = \exp\left\{-\frac{(a\nu)^2}{4}\right\} \left[1 - \frac{(a\nu)^2}{16N}\right]. \quad (3.80)$$

ამრიგად (3.76) პროცესის  $W(x)$  განაწილების ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$W(\eta) = \exp\left\{-\left(\frac{\eta}{a}\right)^2\right\} \left[1 - \frac{1}{64N} H_4\left(\frac{\eta}{a}\right)\right], \quad (3.81)$$

სადაც  $H_4(x)$  ჰერმიტის პოლინომია [57].

განაწილების ფუნქცია (3.81) უფრო თანაბარია ვიდრე გაუსის ფუნქცია. მაგრამ როცა  $N \gg 1$  განაწილების ფუნქცია  $W(\eta)$  გარდაიქმნება გაუსის ფუნქციად. შედეგად მივიღებთ:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.82)$$

$$\sigma^2 = N\sigma_\eta^2 = \frac{Na^2}{2}. \quad (3.83)$$

ამრიგად ჩვენ ვაჩვენეთ გაუსის პროცესის და (3.45) სისტემის ქაოსური ამონახსნების ანალოგია. კერძოდ, აღმოჩნდა, რომ ოსცილატორთა ჯაჭვის კოჰერენტული მდგომარეობა დაკავშირებულია ცალკე აღებული ოსცილატორის, რომელიც იმყოფება სხვა ოსცილატორების მხრიდან მოქმედი ეფექტური გასაშუალოებული ველის ზემოქმედების ქვეშ, ფიზიკურ მახასიათებლებთან, თუ (3.64) პირობა შესრულებულია გასაშუალოებული ველის ფიზიკური მახასიათებლებისათვის, მაშინ ოსცილატორთა ჯაჭვის კოლექტიური რხევები ნაკლებად ქაოტური იქნება ვიდრე ცალკე აღებული ოსცილატორის რხევები. ამ შემთხვევაში წარმოშობილი მდგომარეობა ნაჩვენებია ნახ.3.10, ნახ.3.11, ნახ.3.12. როცა  $x_i(t)$  ცალკეული ამონახსნები სრულიად ქაოსურია,  $C(t)$  სიდიდე, რომელიც ახასიათებს ჯაჭვის კოჰერენტულობას არ მიისწრაფვის ნულისაკენ (იხილეთ ნახ.3.13). რაც ნიშნავს, რომ ჯაჭვი არის კოჰერენტულ მდგომარეობაში [59-62].

იმისათვის რათა უკანასკნელი მტკიცება გავხადოთ უფრო დამაჯერებელი, ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ (3.45) სისტემის ამონახსნების წარმოდგენა, როგორც (3.49) სახით მოცემული გაუსის პროცესი იძლევა ნახ.3.14-ზე ნაჩვენები შედეგების ახსნას, ანუ  $H(\dot{x}_i(t), x_i(t))$  სისტემის ენერჯის გამოსხივებისა და აღდგენის კოჰერენტულ მონაცვლეობას. ცხადია, რომ თუ ცალკეული ოსცილატორების  $x_i(t)$  ამონახსნები განხილულია, როგორც გაუსის პროცესი, მაშინ აღნიშნული სისტემის ჰამილტონიანი,

როგორც  $x_i(t)$  და მისი წარმოებულის  $\dot{x}_i(t)$  ფუნქცია, უნდა ხასიათდებოდეს იგივე თვისებით. მაშასადამე, სისტემის ენერგია უნდა იყოს ჩაწერილი შემდეგი სახით:

$$E(t) \approx E_0 + V(t), \quad (3.84)$$

სადაც  $E_0$  არის ნულოვანი რხევების შესაბამისი ენერგია, ხოლო  $V(t)$  ანჰარმონიულობის შედეგი. დავუშვათ, რომ  $V(t)$  დამოკიდებულებას (3.49) თანაფარდობის ანალოგიური სახე აქვს:

$$V(t) = \sum_n W_n e^{i\omega_n t} + c.c., \quad (3.85)$$

სადაც  $W_n$  გაუსის განაწილების ფუნქციაა.

იმისათვის რათა ავხსნათ ნახ.3.14-ზე მოცემული რიცხვითი შედეგები, ჩვენ ვისარგებლებთ სრული და ნაწილობრივი კვანტური ენერგიის აღდგენის ასახსნელად გამოყენებული მეთოდით [63-65]. ამისათვის დავუშვათ, რომ (3.85) განტოლებაში ნირმირებული განაწილების  $W_n$  წონით კოეფიციენტს აქვს ძირითადი მაქსიმუმი, როცა  $\bar{n} \gg 1$  და სიგანე  $\Delta n$ , რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:  $\bar{n} \gg \Delta n \gg 1$ . ამ შემთხვევაში  $\omega_n$  მოცემული სისტემის სიხშირეები გლუვად არიან დამოკიდებულნი  $n$  ინდექსზე და ჩვენ შეგვიძლია გადავიდეთ  $\omega(n)$  უწყვეტი ფუნქციის განხილვაზე. ზემოთაღნიშნული პირობების გათვალისწინებით  $\omega(n)$  ფუნქცია შეგვიძლია გავშალოთ  $\bar{n}$  არგუმენტის ხარისხოვან მწკრივად:

$$\omega(n) = \omega(\bar{n}) + \sigma_1 \frac{2\pi}{T_1} (n - \bar{n}) + \sigma_2 \frac{2\pi}{T_2} (n - \bar{n})^2 + \dots, \quad (3.86)$$

სადაც

$$\frac{2}{T_k} = \frac{1}{k!} \left| \omega^{(k)}(\bar{n}) \right| = \frac{1}{k!} \left| \frac{d^k}{dn^k} \right|_{n=\bar{n}}, \quad (3.87)$$

$\sigma_k = \pm 1$  იღებს იმ ნიშანს, რა ნიშანიც აქვს  $\omega^{(k)}(\bar{n})$  ფუნქციის  $k$ -ური წარმოებულს. (3.86) და (3.87) განტოლებების გათვალისწინებით, (3.85) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\sum_n W_n e^{i\omega_n t} = \exp[i\omega(\bar{n})t] S(t), \quad (3.88)$$

სადაც

$$S(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_m \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{t}{T_1} + \sigma_2 \frac{t}{T_2} m^2 + \sigma_3 \frac{t}{T_3} m^3 + \dots \right) \right] \quad (3.89)$$

(3.89) განტოლების ყოველი წევრი შეიცავს ფაზურ მამრავლს, რომელიც წარმოადგენს შემდეგი სახის წევრების ნამრავლს:

$$\exp \left( \frac{2\pi i m t}{T_1} \right), \quad \exp \left( \frac{2\pi i \sigma_2 m^2 t}{T_2} \right). \quad (3.90)$$

ამ წევრების მნიშვნელობა დამოკიდებულია კონკრეტული დროის ინტერვალზე. პროცესის საწყის ეტაპზე ე.ი.  $t$  დროებზე, რომლებიც  $T_1$  რიგისაა, ძირითადი წვლილი შეაქვს წევრს  $\exp(2\pi i m t / T_1)$ . მაშასადამე სიგნალის გამოჩენა მოსალოდნელია დროებზე  $t \sim T_1$ . თუმცა, ამ დროის გავლის შემდეგ, მნიშვნელოვანი ხდება მეორე წევრის როლი  $\exp(2\pi i \sigma_2 m^2 t / T_2)$  და ასე შემდეგ.

ჩვენ შეიძლება გადავწეროთ (3.89) განტოლება მარტივი სახით, თუ გამოვიყენებთ პუასონის აჯამვის ფორმულას:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int f(m) \exp(-2\pi i l m) \quad (3.91)$$

(3.91) განტოლების გათვალისწინებით, (3.89) განტოლება იღებს შემდეგ სახეს:

$$S(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int W(\pi + m) \exp \left\{ 2\pi i \left[ \left( \frac{t}{T_1} - l \right) m + \sigma_2 \frac{t}{T_2} m^2 + \sigma_3 \frac{t}{T_3} m^3 + \dots \right] \right\} \quad (3.92)$$

რადგან  $W(x)$  წარმოადგენს გაუსის განაწილების ფუნქციას:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta n^2}} \exp \left[ -\frac{(x - \bar{n})^2}{2\Delta n^2} \right], \quad (3.93)$$

ამიტომ, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$S(t) \approx \exp \left[ -\frac{(t - lT_1)^2}{2\sigma_r^2(t)} \right] \times \exp \left[ -i\sigma_2 \frac{(t - lT_1)^2}{2\sigma_i^2(t)} \right], \quad (3.94)$$

სადაც გაუსის განაწილების სიგანეები:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2(t) &= \left[ \frac{1}{4\pi^2 \Delta n^2} + 4\Delta n^2 \left( \frac{t}{T_2} \right)^2 \right] T_1^2, \\ \sigma_i^2(t) &= \left[ \frac{1}{16\pi^3 \Delta n^2 t / T_2} + \frac{1}{\pi} \Delta n^2 \frac{t}{T_2} \right] T_1^2, \end{aligned} \quad (3.95)$$

დროის მიხედვით ზრდადი ფუნქციებია.

(3.94) და (3.95) ფორმულები თვისობრივად აღწერენ სისტემის ენერჯის დამოკიდებულებას დროზე. ამრიგად მოვლენა, რომელსაც ადგილი აქვს არაწრფივ გიროტროპულ გარემოში, კვანტურ ოპტიკაში ცნობილი კვანტური ენერჯის აღდგენის კლასიკური ანალოგია [62-65].

### 3.8 დასკვნა

ნაშრომის ამ თავში შესწავლილია გიროტროპული გარემოს კლასიკური და კვანტური დინამიკა კუნის არაწრფივი მოდელის ფარგლებში. კლასიკური დინამიკის განხილვისას სუსტი არაწრფივობის შემთხვევაში მიღებულია ანალიზური ამონახსნები, რომლებიც კარგ თანხვედრაშია რიცხვით ამონახსნებთან. ხოლო ძლიერი არაწრფივობის შემთხვევაში დადგენილია პარამეტრების ის მნიშვნელობები, რომელთა დროსაც სისტემაში ჩნდება ქაოსი. ნაჩვენებია, რომ ურთიერთქმედების პოტენციალის პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობებისათვის მოდელი არის ზუსტად ინტეგრებადი და გარკვეულ პირობებში დაიყვანება ე.წ. უნივერსალურ ჰამილტონიანზე. კვანტური დინამიკის განხილვის დროს ნაჩვენებია არაწრფივი გიროტროპული გარემოს მიერ გარეშე ველის ენერჯის სტოქასტური შთანთქმის შესაძლებლობა. განხილულია ურთიერთქმედ ოსცილატორთა უსასრულო ჯაჭვის შემთხვევა და დადგენილია, რომ შესაძლებელია ასეთ გარემოში სოლიტონური ტიპის ტალღების გავრცელება.

ჩვენ ასევე განვიხილეთ კუნის მოდელი, რომელიც აღწერს ბმულ ოსცილატორთა სისტემას. როგორც რიცხვითმა გამოთვლებმა გვიჩვენა, მიუხედავად ცალკეული ოსცილატორების ქაოტური რხევებისა, სისტემას, როგორც მთლიანს, გააჩნია კოჰერენტულობა. ასეთ კოჰერენტულობას კი თავის მხრივ მივყავართ კლასიკურ ენერჯის აღდგენის მოვლენასთან. კერძოდ, არაწრფივი ოსცილატორების კუნის

სისტემას, რომელიც განიცდის გარეშე დატუმბვას, კვაზიპერიოდულად კოჰერენტულად ასხივებს ენერგიას. აღნიშნული მოვლენა საინტერესოა არაწრფივი ოპტიკური გარემოს შესწავლის თვალსაზრისით.

### ძირითადი შედეგები

1. შევისწავლილია ორი ბმული ნანომექანიკური რეზონატორის დინამიკა, როდესაც რხევები ამ რეზონატორებში აღიმკვრება გარეშე ძალის მეშვეობით. მიღებულია ანალიზური გამოსახულებები ბმული არაწრფივი რეზონატორების ამპლიტუდურ სიხშირული მახასიათებლისათვის, რომლებიც სამართლიანია ბმულობის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და სუსტი ბმულობის შემთხვევაში ეთანადება ადრე მიღებულ შედეგებს [14]. ნაჩვენებია, რომ ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი წარმოადგენს ორ დახრილ მრუდს (პიკს), რომლებიც დაცილებულნი არიან ერთმანეთისაგან 2D ტოლი მანძილით. ნაჩვენებია, რომ ეს მრუდები შეიცავენ არასტაბილურ უბნებს, რომელთა მიდამოში გარეშე ძალის სიხშირის ცვლილებას თან სდევს რხევის ამპლიტუდის მყისიერი და ნახტომისებური ცვლილება. რაც იძლევა საშუალებას, რომ სწრაფად ვცვალოთ რეზონატორებს შორის ენერგიის გადაცემის რეჟიმი. განხილულია აღნიშნულ სისტემაში ოსცილატორებს შორის ენერგიის გადანაწილების პროცესი. გავაანალიზეთ რა რხევის დინამიკის სტაბილური და არასტაბილური უბნები, ძირითადი აქცენტი გავამახვილეთ არაწრფივ უბანზე. დადგენილია, რომ რხევების მცირე ამპლიტუდებისათვის, ენერგიის გადაცემას რეზონატორებს შორის აქვს წრფივი ხასიათი  $A_1^2 = \frac{\sigma}{4} A_2^2$  და ენერგიის გადაცემის სიჩქარე განისაზღვრება ბმულობის კოეფიციენტით. როცა რხევის ამპლიტუდა იზრდება, მაშინ ენერგიის გადაცემა ღებულობს არაწრფივ ხასიათს  $A_1^2 = \left( \frac{4}{9} \cdot \frac{D^2}{\chi^2} A_2^2 \right)^{1/3}$  და ენერგიის გადაცემის სიჩქარე მცირდება. ენერგიის გადაცემის სიჩქარის ცვლილება გარეშე ძალის სიხშირის ცვლილების მეშვეობით არის ადვილად განსახორციელებელი და



დამზერადი ექსპერიმენტულად. მიღებული შედეგები შეიძლება გამოყენებულ იქნას ნანო-ელექტრომექანიკური რეზონატორის ბაზაზე მეტად მგრძობიარე გადამრთველის შესაქმნელად.

2. შესწავლილია ატომი-ველი სისტემა ანჰარმონიულ ოსილატორის მოდელის ფარგლებში, როდესაც ადგილი აქვს არაწრფივ რეზონანსს. დადგენილია ქმედების ის მნიშვნელობები, რომლის დროსაც ადგილი აქვს რეზონანსს განსაზღვრულია ის პირობები, რომლის შესრულების შემთხვევაში ქმედების მნიშვნელობა შესაძლოა იყოს იმდენად მცირე, რომ მისი შესწორება აღარ იქნება კლასიკური სიდიდე და ის უნდა განვსაზღვოთ კვანტური მექანიკის კანონების თანახმად. დაგენილია, რომ ქმედების შესწორების კვანტურ ჰამილტონიანს აქვს ისეთივე ფორმა, როგორც კვანტური ქანქარას ჰამილტონიანს. ხოლო აღნიშნული სისტემის შრედინგერის განტოლებას შესაბამისად მათივე განტოლების სახე. ნაჩვენებია, რომ ენეგეტიკულ დონეთა დასახლებები წარმოადგენენ მათივე განტოლების საკუთარ ფუნქციებს და რომ მათ აქვთ მკვეთრი მაქსიმუმი  $E \approx 2U_0$  ენერგიაზე. გამოთვლილია ენეგეტიკულ დასახლებათა ალბათობები და დადგენილია, რომ ადგილი აქვს ინვერსიულ დასახლებეთა განაწილებას  $W(2U_0) > W(E < 2U_0)$ . მიღებული შედეგებიდან დგინდება, რომ დროის პერიოდებზე, რომლებიც ნაკლებია რელაქსაციის დროზე შესაძლებელია ინვერსიული დასახლებების მიღებ. ამრიგად, ოპტიკური დიაპაზონის იმპულსური დატუმბვის შედეგად შესაძლებელია მიღებულ იქნას ენერგეტიკული დონეების ინვერსიული დასახლება მიკროტალღურ დიაპაზონში.

3. შესწავლილია გიროტროპული გარემოს კლასიკური და კვანტური დინამიკა კუნის არაწრფივი მოდელის ფარგლებში. კლასიკური დინამიკის განხილვისას სუსტი არაწრფივობის შემთხვევაში მიღებულია ანალიზური ამონახსნები, რომლებიც კარგ თანხვედრაშია რიცხვით ამონახსნებთან. ხოლო ძლიერი არაწრფივობის შემთხვევაში დადგენილია პარამეტრების ის მნიშვნელობები, რომელთვისაც სისტემაში ჩნდება ქაოსი. ნაჩვენებია, რომ ურთიერთქმედების პოტენციალის პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობებისათვის მოდელი არის ზუსტად ინტეგრებადი და გარკვეულ პირობებში დაიყვანება ე.წ. უნივერსალურ ჰამილტონიანზე. კვანტური დინამიკის განხილვის დროს ნაჩვენებია არაწრფივი გიროტროპული გარემოს მიერ გარეშე ველის ენერგის სტოქასტური შთანთქმის შესაძლებლობა. განხილულია ურთიერთქმედ ოსცილატორთა უსასრულო ჯაჭვის შემთხვევა და დადგენილია, რომ შესაძლებელია ასეთ გარემოში სოლიტონური ტიპის ტალღების გავრცელება. განვიხილულია ის შემთხვევა, როცა განზოგადებული კუნის მოდელის აღმწერი განტოლება არ არის ზუსტად ინტეგრებადი. ნაჩვენებია, რომ მიუხედავად ინდივიდუალური ოსცილატორების ქაოსური დინამიკისა, ასეთ ოსცილატორთა ჯაჭვი ინარჩუნებს კოჰერენტულობას როგორც მთლიანი სისტემა.

## ლიტერატურა

- [1] K. L. Ekinici, X. M. H. Huang, and M. L. Roukes. Ultrasensitive nanoelectromechanical mass detection. *Appl. Phys Lett.*, 84:4469–4471, 2004.
- [2] D Rugar, R Budakian, H J Mamin, Chui, and B W. Single spin detection by magnetic resonance force microscopy. *Nature*, 430:329–332,2004
- [3] Andrew N. Cleland and Michael L. Roukes. A nanometer-scale mechanical electrometer.*Nature*, 392:160, 1998
- [4] Zahringer, G. Kirchmair, R. Gerritsma, E. Solano, R. Blatt, C. F. Roos, *Phys. Rev. Lett.* 104, 100503 (2010).
- [5] G. Heinrich and F. Marquardt *EPL* 93, 18003 (2011)
- [6] M. Ludwig, K. Hammerer, and F. Marquardt *Phys. Rev. A* 82, 012333 (2010)
- [7] R.Lifshitz and M.C.Cross, *Reviews of Nonlinear dynamics and Complexity*, edited by H.G.Shuster(Wiley,Weinheim,2008),Chap.1,p.52.
- [8] R.Lifshitz and M.C.Cross,*Phys.Rev. B* 67,134302 (2003).
- [9] Y.Bromberg, and R.Lifshitz, *Phys.Rev.E* 73,016214 (2006).
- [10] H.G. Craighead, *Science* 290, 1532 (2000).
- [11] E. Buks and M.L. Roukes, *Europhys. Lett.* 54, 220 (2001).
- [12] D. Rugar and P. Grutter, *Phys. Rev. Lett.* 67, 699 (1991).
- [13] C. Masmanidis, et al. *Science* 317, 780 (2007).
- [14] R.B.Karabalin, M.C.Cross and M.L.Roukes, *Phys.Rev. B* 79,165309 (2009).
- [15] A.Blaqueire,*Nonlinear System Analysis(Academic Press New York and London)(1966).*
- [16] N.Hand and J.D.Finch, *Analitical Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [17] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, Reading MA,1994
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz , *Mechanics (Course of Theoretical Physics) vol.1, 3ed., Pergamon (1976)*

- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Vol. 1 of A Course in Theoretical Physics (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1976).
- [20] R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and G. M. Zaslavsky, *Nonlinear Physics* (Academic Publishing, Hardwood, NY, 1988).
- [21] A. Yariv, *Introduction to Optical Electronics* (Rinehart and Winston, New York, 1976).
- [22] N. Bloembergen, *Nonlinear Optics* (W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965).
- [23] M. Schubert and B. Wilhelmi, *Nonlinear Optics and Quantum Electronics* (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1986).
- [24] A. Ugulava, L. Chotorlishvili, and K. Nikoladze, [Phys. Rev. E68, 026216 \(2003\)](#).
- [25] L. Chotorlishvili and A. Ugulava, [Physica D 239, 103 \(2010\)](#).
- [26] A. Ugulava, L. Chotorlishvili, and K. Nikoladze, [Phys. Rev. E70, 026219 \(2004\)](#).
- [27] *Higher Transcendental Functions*, Based in Part on Notes Left by Harry Bateman and Compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Project (Director: Arthur Erdélyi) (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953).
- [28] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, NBS Applied Mathematics Series 55 (National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964).
- [29] *Tables Relating to Mathieu Functions: Characteristic Values, Coefficients, and Joining Factors* (Columbia University Press, New York, 1951).
- [30] Желудев Н.И., УФН ,т. 157 , № 4 , p.683, 1989.
- [31]. Petrenko A.D., Zheludev N.I. Optic. Acta. 1984.v.31.p.1174.
- [32] Ахманов С.А., Желудев Н.И., Задоян Р.С., ЖЭТФ, т.91, p.984, 1986.
- [33]. Y.P. Svirko and N.I. Zheludev. Polarization of Light in Nonlinear Optics. (John Wiley & Sons. Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto), 1998.
- [34]. Бутенин Н.В, Фуфаев Н.А, Неймарк Ю.И, Введение в теорию колебаний, М.Наука, 1987.
- [35] Рабинович М.И, Трубецков Д.И Введение в теорию колебаний и волн, М.Наука, 1984.
- [36] Заславски Г.М., Сагдеев, Введение в нелинейную физику, М.Наука, 1988.
- [37] A.J. Lichtenberg, M. Liberman, Regular and Stochastic Motion, Springer-Verlard, New-york, Heidelberg, Berlin, 1983.
- [38] Шустер Г., Детерминированный хаос, М., Наука, 1988.
- [39] P.Grassberger, Phis. Lett. A.v.97,p. 227, 1983.
- [40] P.Grassberger, Phis. Lett. A.v.97,p. 224, 1983.
- [41] P.Grassberger, I.Procaccia, Phisica D,v.9, p.189,1983.
- [42] Ахиезер Н. И, Элементы теории эллиптических функций М.Наука, 1970.
- [43] Абрамовиц М., Стиган И., Справочник по специальным функциям М.Наука, 1979.
- [44] Кузнецов С. П., Динамический хаос, М., ФМЛ., 2001.
- [45] Неймарк Ю.И Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания М.Наука, 1987.
- [46] Заславски Г.М., Стохастичность динамических систем М.Наука, 1984.
- [47] A.Ugulava,L.Chotorlishvili,and K.Nickoladze,Phys.Rev.E68,026216(2003).
- [48] A.Ugulava,L.Chotorlishvili,and K.Nickoladze,Phys.Rev.E70,026219(2004).
- [49] A.Ugulava,L.Chotorlishvili,and K.Nickoladze,Phys.Rev.E71,1(2005).
- [50] Kosevich Y.A.,Phys.Rev. B 47, 3138 (1993).
- [51] Lichtenberg A.J., Mirnov V.V., Day C., Chaos 15, 015109, 2005.
- [52] Y.P. Svirko and N.I. Zheludev, Polarization of Light in Nonlinear Optics, John Wiley and

- Sons, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore (1998).
- [53] M.I. Rabinovich and D.I. Trubetzkov, Introduction to the Theory of Oscillations and Waves, Nauka, Moscow (1987).
- [54] R. Chacon, Phys. Rev. E 74 (2006) 046202.
- [55] M. Antony and S. Rutto, Phys. Rev. E 52 (1995) 2361.
- [56] G.M. Zaslavsky, Chaos in Dynamical Systems, Nauka, Moscow (1984) (in Russian).
- [57] M. Abramowitz and I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, US Government Printing Office, Washington (1964).
- [58] S. Akhmanov, Y. Dyakov, and A. Chirkin, Introduction to Statistical Radiophysics and Optics, Nauka, Moscow (1981) (in Russian).
- [59] R. Roy and K.S. Thornburg, Phys. Rev. Lett. 72 (1995) 2009.
- [60] A.V. Ustinov, M. Cirillo, and B.A. Malomed, Phys. Rev. B 47 (1993) 8357.
- [61] K. Wiesenfeld, P. Colet, and S.H. Strogatz, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 404.
- [62] L.M. Florfa and J.J. Mazo, Adv. Phys. 45 (1996) 505.
- [63] C. Leichtle, I.Sh. Averbukh, and W.P. Schleich, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 3999.
- [64] C. Leichtle, I.SH. Averbukh, and W.P. Schleich, Phys.Rev. A 54 (1996) 5299.
- [65] M. Fleischhauer and W.P. Schleich, Phys. Rev. A 47(1993) 4258.